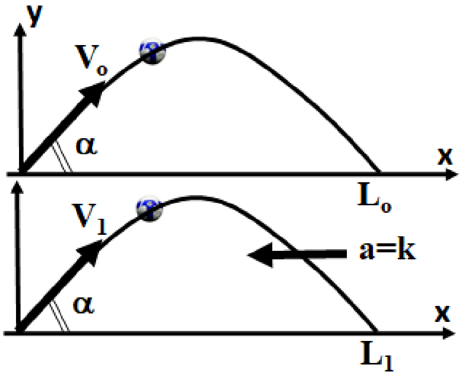
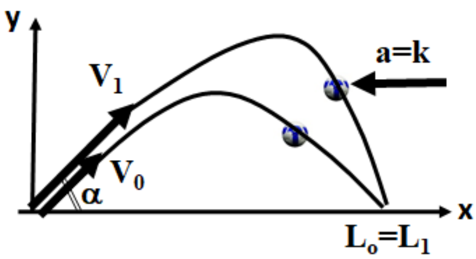
**_Università di Roma “La Sapienza”_**
**_Facoltà di Ingegneria_**
**FISICA**
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
**Esonero** del 26 Aprile 2024

**1. Testo.** Un ragazzo lancia un pallone con una velocità $V_o$=20 m/s con una inclinazione $\alpha$=45° rispetto all’orizzontale. Determinare la posizione $L_o$ di impatto del pallone sul terreno di gioco. Successivamente il ragazzo vuole ripetere il colpo ma si alza una folata di vento che imprime una accelerazione orizzontale costante di modulo $a=k$=2m/s$^2$ in senso contrario all’asse x. Il ragazzo ricalcola la traiettoria e decide di calciare nuovamente il pallone con la stessa inclinazione $\alpha$, ma imprimendo una nuova velocità $V_1$ con l’obiettivo di far atterrare la sfera nella stessa posizione $L_1$=$L_o$. Determinare il valore di $V_1$ ed il tempo di volo nei due casi.




**1. Soluzione. Equazioni della cinematica senza vento**
Il moto della palla di tipo parabolico. Fissando gli assi *x* ed *y* come in figura i due moti componenti sono rispettivamente rettilineo uniforme (lungo x) ed uniformemente accelerato (lungo y)

Lungo l’asse x $\begin{cases} x(t) = v_o\,cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = v_o\,cos(\alpha)\ , \\ a_x = 0 \end{cases}$




e lungo l’asse y $\begin{cases} y(t) = v_o\,sin(\alpha)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_o\,sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Il tempo di volo si ottiene imponendo la condizione di atterraggio y(t)=0
da cui $t_0 = \frac{2v_o\,sin(\alpha)}{g}$ =**2.89 s**

La posizione dell’ascissa di impatto al suolo (gittata) si ottiene imponendo $L_o$=x($t_o$)
da cui $L_0 = \frac{2v_0^2\,sin(\alpha)cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\,sin(2\alpha)}{g}$ = **40.8 m**

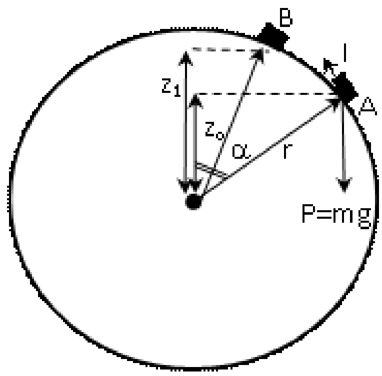
**Equazioni della cinematica con vento contrario**
Anche in questo caso il moto della palla di tipo parabolico ma con l’asse della parabola obliquo nel piano xy. i due moti componenti si ottengono con equazioni analoghe inserendo una accelerazione $a_x$=-k solo lungo x, modificando in $V_1$ la velocità iniziale e mantenendo l’angolo di inclinazione iniziale $\alpha$.

Lungo l’asse x $\begin{cases} x(t) = v_1\,cos(\alpha)\cdot t - k\cdot t^2/2 \\ v_x(t) = v_1\,cos(\alpha) - k\cdot t\quad , \\ a_x = -k \end{cases}$

e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_1\, sin(\alpha) \cdot t - g \cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_1\, sin(\alpha) - g \cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

Il tempo di volo si ottiene imponendo la condizione di atterraggio y(t)=0
da cui $t_1 = \frac{2v_1\, sin(\alpha)}{g}$ **= 3.24 s** (*questo valore è ottenuto a posteriori avendo ottenuto* $V_1$=22.4 m/s)
La posizione dell'ascissa di impatto al suolo (gittata) si ottiene imponendo $L_1=x(t_1)$
da cui $L_1 = \frac{2v_1^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)}{g} - k\frac{2v_1^2\, sin^2(\alpha)}{g^2} = \frac{2v_1^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)}{g}\left(1 - \frac{k}{g}tan(\alpha)\right)$
Imponendo $L_1=L_0$ si ottiene $\frac{2v_1^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)}{g}\left(1 - \frac{k}{g}tan(\alpha)\right) = \frac{2v_0^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)}{g}$
e dopo qualche semplificazione si trova la velocità di lancio $v_1 = \frac{v_o}{\sqrt{1-\frac{k}{g}tan(\alpha)}}$ **= 22.4 m/s**

**2. Testo.** Un blocco di massa m=500 g è collocato nel punto A sulla superficie di un tubo cilindrico liscio di raggio r=2m in una posizione ad una altezza $z_o$=50 cm rispetto alla quota di riferimento del centro. Al blocco viene applicato un impulso I in modo da fare risalire il blocco lungo il profilo del tubo verso il punto B alla quota più alta $z_1$ per poi invertire il moto e ridiscendere per gravità. Determinare quale sia il valore dell'impulso massimo erogabile $I_{max}$ che non fa distaccare il blocco m dal tubo e determinare per quel valore dell'impulso la quota $z_1$ nel punto B ed il relativo valore della reazione normale.




**2. Soluzione. Studio del moto di salita lungo la guida cilindrica**
L'impulso I erogato al tempo $t=0^-$ produce una variazione della quantità di moto Δp del blocco inizialmente fermo nel punto A secondo l'equazione $I=\Delta p=mv_o-m0= mv_o$
producendo quindi la velocità iniziale $v_o$ nel punto A.

Dallo studio delle forze agenti nel punto A si evince che esiste un valore massimo per la velocità (e quindi anche per l'impulso erogabile) al di sopra del quale il blocco si distacca immediatamente dalla guida cilindrica (condizione $\mathbf{R_{nA}=0}$)
Le **forze agenti** quando il blocco si trova in A sono:

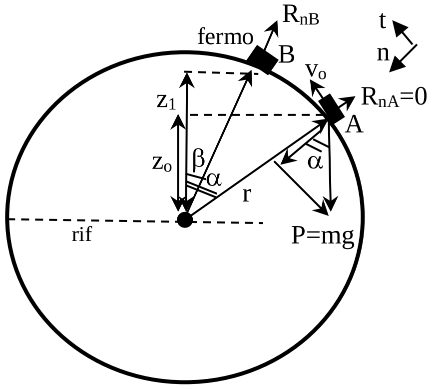
$$\begin{matrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{matrix}\begin{cases} Pcos\alpha - R_{nA} = ma_n = mv_0^2/r \\ -Psin\alpha = ma_t \end{cases}$$

Imponendo la condizione di distacco ($R_{nA}$=0) si ottiene $\frac{mv_{0,max}^2}{r} = mg\, cos\, \alpha$
da cui la **velocità massima di lancio in A** diviene $v_{0,max} = \sqrt{g \cdot rcos\alpha} = \sqrt{gz_0}$ **=2.21 m/s**
da cui il **massimo impulso erogabile** $I_{max} = m\sqrt{g \cdot rcos\alpha} = m\sqrt{gz_0}$ **=1.11 kg m/s**

**Calcolo della massima quota raggiungibile $z_1$ nel punto B**
In assenza di attriti, durante il moto di salita sulla guida liscia, l'energia meccanica del primo blocco rimane costante. In particolare imponendo la conservazione dell'energia nel punto iniziale A e in quello finale B (dove il blocco si ferma con $v_B$=0 prima di ridiscendere)

$E_A = E_B$ da cui $K_A + U_A = \cancel{K_B} + U_B$ e quindi $\frac{1}{2}mv_{0,max}^2 + mgz_0 = mgz_1$

da cui si ricava la **quota massima $z_1$ nel punto B**: $z_1 = z_0 + \frac{1}{2g}v_{0,max}^2 = z_0 + \frac{1}{2}z_0 = \frac{3}{2}z_0 = \mathbf{75\ cm}$

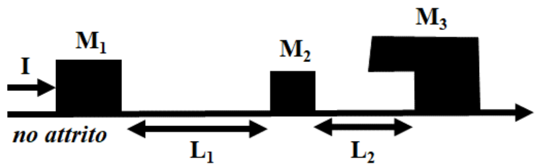



**Calcolo della reazione normale nel punto B**

Dallo studio delle forze nel punto B
(dove il blocco si ferma con $v_B$=0 prima di ridiscendere)
si ottiene:

$$\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} Pcos\beta - R_{nB} = ma_n = mv_B^2/r = 0 \\ \qquad\qquad -Psin\beta = ma_t \end{cases}$$

Dalla equazione lungo n si ottiene **la reazione normale in B** :
$R_{nB} = Pcos\beta = mgcos\beta = mg\frac{z_1}{r}$ =**1.84 N.**




**3. Testo.** Un blocco di massa $M_1$=5kg riceve un impulso I=0.2 kgm/s e viene così lanciato lungo un piano liscio urtando elasticamente la massa $M_2$=3kg dopo aver percorso la distanza $L_1$=3m. A seguito del primo urto la seconda massa $M_2$ prende a muoversi e percorre la distanza $L_2$=2m prima di urtare in modo perfettamente anelastico la massa $M_3$. Determinare per quale valore della massa $M_3$ il gruppo $M_2$+$M_3$ può essere ri-raggiunta e urtata dalla massa $M_1$ ancora in movimento. Nel caso di $M_3$=15 kg determinare i tempi ai quali avvengono in sequenza: il primo urto $M_1/M_2$, il secondo urto $M_2/M_3$, ed il terzo urto $M_1/M_2/M_3$.

**3. Soluzione.** Il meccanismo che mette in moto le masse è dato dalla successione dei vari processi d'urto descritti in figura. Di seguito vengono analizzati i singoli processi in sequenza.

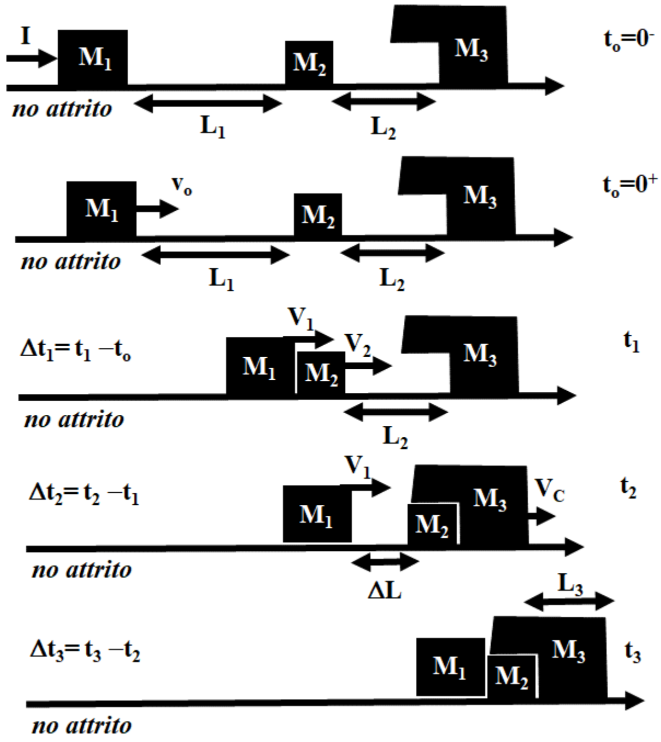
**Velocità di lancio del blocco $M_1$**

L'impulso I erogato al tempo $t_o=0^-$ produce una variazione della quantità di moto Δp del blocco inizialmente fermo secondo l'equazione I=Δp=$M_1v_o$-$M_1$0= $M_1v_o$
da cui si ricava la velocità di lancio del blocco $\mathbf{v_o}$ **=** I/$M_1$ **= 0.04 m/s**
subito dopo l'erogazione dell'impulso al tempo $t_o=0^+$

**Urto elastico fra i blocchi $M_1$ e $M_2$**

Il blocco $M_1$ lanciato alla velocità $v_o$ percorre la distanza $L_1$ in un tempo $\mathbf{t_1}$=$L_1/v_o$= **75 s**
A seguito dell'urto elastico le velocità dei due blocchi dopo l'urto saranno

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right)v_0 + \left(\frac{2M_2}{M_1+M_2}\right)v_2(fermo!) = \left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right)\frac{I}{M_1} = 0.01\,m/s \\ V_2 = \left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}\right)v_0 + \left(\frac{M_2-M_1}{M_1+M_2}\right)v_2(fermo!) = \left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}\right)\frac{I}{M_1} = 0.05\,m/s \end{cases}$$




**Urto perfettamente anelastico fra i blocchi $M_2$ e $M_3$**

Il blocco $M_2$ lanciato dopo l'urto al tempo $t_1$ alla velocità $V_2$ percorre la distanza $L_2$ in un tempo $\Delta$**$t_2$**$=L_2/V_2=$ **40 s (**al tempo assoluto **$t_2$=115 s**)

E' importante notare che il blocco $M_1$, che procede più lentamente, durante l'intervallo $\Delta t_2$ è rimasto indietro, distanziato da $M_2$ per un tratto **ΔL**$=(V_2-V_1)\Delta$**$t_2$** = **1.6 m**

A seguito dell'urto i due blocchi procedono insieme ad una velocità comune **$V_C$** che si ottiene applicando la conservazione della quantità di moto:

$M_2V_2 = (M_2 + M_3)V_C$ da cui $V_C = \left(\frac{M_2}{M_2+M_3}\right) V_2 = \left(\frac{M_2}{M_2+M_3}\right)\left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}\right) v_0$

che comporta un generale rallentamento del gruppo $M_2+M_3$.

Si ricorda che contemporaneamente il blocco $M_1$ procede sempre alla velocità $V_1 = \left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right) v_0$.

**Quindi è possibile che il blocco $M_1$ possa urtare il gruppo $M_2+M_3$ se e solo se**

$$V_1 > V_C \rightarrow \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) v_0 > \left(\frac{M_2}{M_2 + M_3}\right)\left(\frac{2M_1}{M_1 + M_2}\right) v_0$$

che dopo qualche passaggio algebrico, esplicitando $M_3$, porta alla disequazione

$M_3 > M_{3min} = \left(\frac{2M_1M_2}{M_1-M_2}\right) - M_2 = M_2\left(\frac{M_1+M_2}{M_1-M_2}\right)$ **=12 kg**

**Nuovo urto fra blocco $M_1$ ed il gruppo $M_2+M_3$**

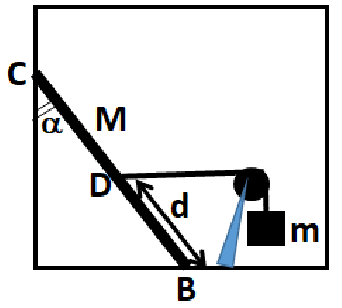
Nel caso di $M_3$=15 kg > $M_{3min}$ = 12 kg il blocco $M_1$ urterà il gruppo $M_2+M_3$

Il blocco $M_1$ procede infatti alla velocità costante $V_1 = \left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}\right) v_0 = \mathbf{0.01\ m/s,}$

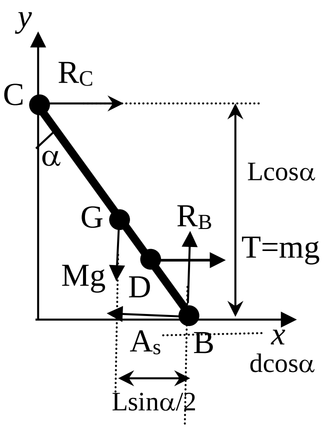
mentre il gruppo $M_2+M_3$ procede alla velocità inferiore $V_C = \left(\frac{M_2}{M_2+M_3}\right)\left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}\right) v_0 = \mathbf{0.0083\ m/s}$

Il blocco $M_1$ raggiunge e urta il gruppo quando recupera lo svantaggio **$\Delta L$=1.6 m** in un intervallo di tempo $\Delta$**$t_3$**$=\Delta L/(V_1-V_C)$ = **960 s** (al **tempo assoluto $t_3$=1075 s** )
dopo aver percorso un tratto di 9.6 m da confrontare con il tratto $L_3=V_c\Delta t_3$=8 m percorso dal gruppo. Lo spazio complessivo percorso dal blocco $M_1$ a partire dall'inizio (t=0) sarà quindi $L_{tot}$=13 m.

**4. Testo.** Una scala di massa M=20kg e di lunghezza L é poggiata nel punto B su un pavimento orizzontale scabro e nel punto C ad una parete verticale liscia inclinata di un angolo $\alpha$=20° rispetto alla verticale. Nel punto D (a distanza d=L/4 dal punto B) viene fissata ad una sistema con una fune e puleggia di massa trascurabilee con un contrappeso di massa m=5kg in modo da esercitare sulla scala una forza orizzontale che rischia di sbilanciarla. Determinare quale è il valore minimo del coefficiente di attrito che garantisce la stabilità del sistema.




**4. Soluzione. Stabilità del sistema.**
Le forze agenti sulla scala sono le seguenti: nel baricentro G è applicato il peso della scala **P=Mg.** Nel punto di contatto B sono applicate la reazione normale **$R_B$** e la forza di attrito statico orizzontale **$A_s$.** La reazione **$R_C$** è applicata nel punto C. Inoltre nel punto D viene applicata una forza aggiuntiva in orizzontale: la tensione statica della fune collegata alla massa m. In condizioni statiche tale tensione è esattamente pari al peso della massa collegata cosicché funi e carrucola siano fermi : **T=mg**
Applicando le equazioni cardinali per la statica si ottiene:




**1ª equazione cardinale**: $\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} R_C + T - A_s = 0 \\ R_B - P = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A_s = R_C + mg \\ R_B = Mg \end{cases}$

**2ª equazione cardinale** (calcolata rispetto al punto B)
$M_P + M_T + M_{RC} = 0$ da cui $Mg\frac{L}{2}\sin\alpha - mgd\cos\alpha - R_C L\cos\alpha = 0$

da cui $R_C = \frac{1}{2}Mg\tan\alpha - mg\frac{d}{L}$, l'attrito $A_s = mg\left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{1}{2}Mg\tan\alpha \le \mu_s R_B = \mu_s Mg$
da cui si calcola il coefficiente di attrito statico minimo $\mu_s \ge \frac{m}{M}\left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{1}{2}\tan\alpha = \mathbf{0.37}$