***Università di Roma "La Sapienza"***

***Facoltà di Ingegneria***

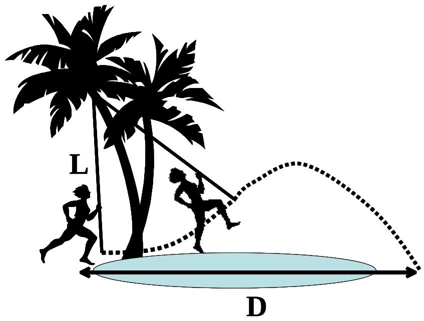
**FISICA**

A.A. 2021-2022

Ingegneria Gestionale (M-Z)

*Esonero del 30 Aprile 2022*

**1. Testo**. Un aborigeno del pianeta Nibiru corre in una foresta pluviale ad una velocità di 5 m/s ed afferra una liana per oltrepassare uno specchio d'acqua. La liana, inizialmente disposta lungo la verticale, è di massa trascurabile e di lunghezza L=5m. L'aborigeno decide di staccarsi quando la liana si inclina di un angolo $\alpha$=30° rispetto alla verticale. Al distacco segue un moto parabolico di caduta libera. Determinare lo spazio totale percorso D alla fine del salto (quando l'aborigeno tocca il suolo) ed il modulo e l'inclinazione della velocità di atterraggio rispetto all'orizzontale. Nota; sulla superficie del pianeta Nibiru c'è una accelerazione di gravità k minore di quella terrestre poiché la massa del pianeta è $M=8\cdot10^{23}$ kg mentre il raggio del pianeta è R=3000 km, essendo la costante di gravitazione universale $G=6.67\cdot10^{-11}$ $m^3/kg\ s^2$. Ai fini del calcolo della accelerazione di gravità si trascurino gli effetti della rotazione del pianeta intorno al proprio asse.




**1. Soluzione**

Sulla superficie del pianeta Nibiro di forma sferica è presente una accelerazione di gravità k calcolabile dalla relazione $k = G\dfrac{M}{R^2} = 6.67\cdot10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\cdot s^2}\dfrac{8\cdot10^{23}kg}{\left(3\cdot10^6\right)^2 m^2} = 5.93\dfrac{m}{s^2}$

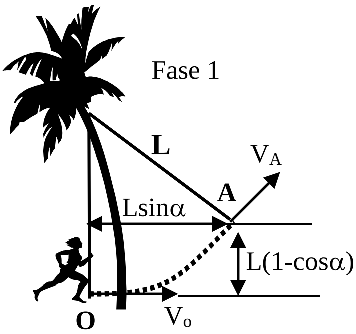
La traiettoria complessiva è la risultante di un arco di circonferenza (fase 1) e di un arco di parabola (fase 2).

**Fase 1:** calcolo della velocità al distacco nel punto A:

Dalla conservazione dell'energia meccanica fra i punti O ed A

$\frac{1}{2}mV_o^2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + mkL(1-\cos\alpha)$ da cui

$V_A = \sqrt{V_o^2 - 2kL(1-\cos\alpha)}$ **=4.13 m/s**



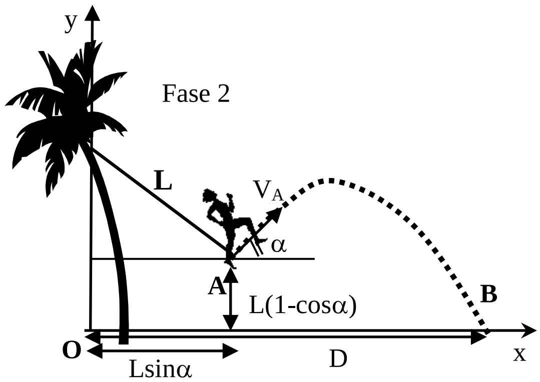

**Fase 2:** calcolo della gittata dal lancio nel punto A

**Lungo asse x**

$$\begin{cases} x(t) = V_A t\cos\alpha + L\sin\alpha \\ v_x = V_A\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$$

**Lungo asse y**

$$\begin{cases} y(t) = V_A t\sin\alpha - \dfrac{kt^2}{2} + L(1-\cos\alpha) \\ v_y = V_A\sin\alpha - kt \\ a_y = -k \end{cases}$$



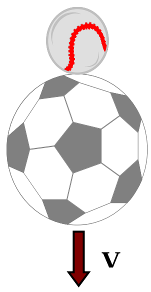
**tempo di volo:** $y(t^*)=0$ da cui $t^*=\dfrac{V_A\sin\alpha+\sqrt{V_A^2\sin^2\alpha+2kL(1-\cos\alpha)}}{k}$ **=0.938 s**

**lo spazio totale percorso** $D=x(t^*)=V_A t^*\cos\alpha+L\sin\alpha=$ **5.85 m**

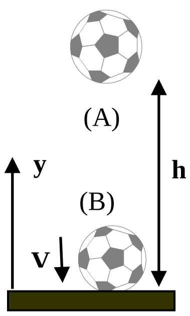
**la velocità di atterraggio** $V_B=\sqrt{V_{Bx}^2+V_{By}^2}=\sqrt{V_A^2\cos^2\alpha+(V_A\sin\alpha-kt^*)^2}=$ **5 m/s**

**(**in assenza di attriti si ha conservazione dell'energia cinetica iniziale!**)**

**angolo di atterraggio rispetto all'orizzontale** $\beta=\arctan\left(\dfrac{|V_{By}|}{V_{Bx}}\right)=$ **44°20'**




**2. Testo.** Una palla da baseball di massa $m_1$=142g è appoggiata sulla parte superiore di un pallone da calcio di massa $m_2$=450g. Le due sfere vengono poi lasciate cadere in verticale da una altezza di circa h=1m dal suolo. Trascurando la resistenza dell'aria il pallone per primo raggiunge il suolo rimbalzando urtando elasticamente il suolo. Immediatamente dopo il pallone, invertendo la sua velocità, urta ancora elasticamente e centralmente anche la palla da baseball soprastante. Determinare le massime quote raggiunte dal pallone e dalla palla di baseball durante la successiva fase di risalita.




**2, Soluzione**, Le due sfere cadono per effetto del peso con la stessa accelerazione di gravità. La velocità acquisita in prossimità del suolo si calcola imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti (a) e (b)

$E_{mA}=E_{mB}$ ossia $U_A=K_B$ da cui $mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$

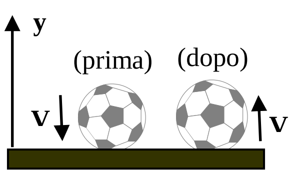
e quindi $v=-\sqrt{2gh}=-4.43\dfrac{m}{s}$

(il segno meno perché la velocità di caduta ha verso discorde dall'asse y positivo)

**Primo urto elastico contro il suolo**

Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica prima e dopo l'urto è sempre possibile ricavare le velocità successive all'urto elastico di due masse 2 (pallone) e 0 (suolo) se avviene lungo un asse. Le formule finali con le seguenti formule

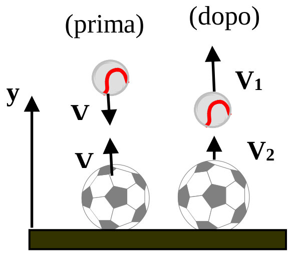
$$\begin{cases} V_o^{dopo}=\left(\dfrac{M_0-m_2}{M_0+m_2}\right)v_0^{prima}+\left(\dfrac{2m_2}{M_0+m_2}\right)v_2^{prima} \\ V_2^{dopo}=\left(\dfrac{2M_0}{M_0+m_2}\right)v_0^{prima}+\left(\dfrac{m_2-M_0}{M_0+m_2}\right)v_2^{prima} \end{cases}$$




In questo caso il suolo (0) ha massa infinita ($M_0\to\infty$) ed è fermo ($v_0^{prima}=v_{suolo}^{prima}=0$).

da cui $\begin{cases} V_0^{dopo}=V_{suolo}^{dopo}=0 \\ V_2^{dopo}=V_{pallone}^{dopo}=-v_{pallone}^{prima}=+\sqrt{2gh} \end{cases}$ (il pallone ha semplicemente invertito la sua velocità)

**Secondo urto elastico tra pallone e palla da baseball**
Possiamo qui applicare le stesse formule ove l'indice (2) è per il pallone, mentre (1) è per la palla da baseball, sapendo che prima di questo secondo urto i due corpi procedono alla stessa velocità $|v| = \sqrt{2gh}$ ma in senso opposto (+ per il pallone che va verso l'alto, - per la palla da baseball che scende verso il basso)

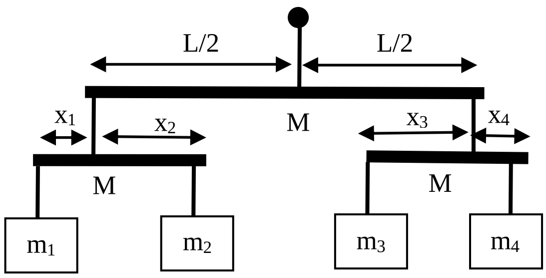



$$\begin{cases} V_{pallone}^{dopo} = V_2^{dopo} = \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)\sqrt{2gh} + \left(\dfrac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)\left(-\sqrt{2gh}\right) = \left(\dfrac{m_2 - 3m_1}{m_2 + m_1}\right)\sqrt{2gh} = 0.179\dfrac{m}{s} \\ V_{baseball}^{dopo} = V_1^{dopo} = \left(\dfrac{2m_2}{m_2 + m_1}\right)\sqrt{2gh} + \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\right)\left(-\sqrt{2gh}\right) = \left(\dfrac{3m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)\sqrt{2gh} = 9.03\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

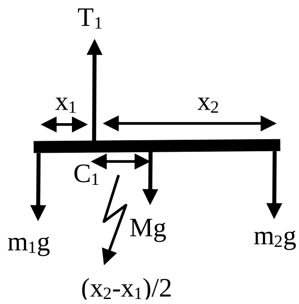
**Fase di risalita**
Applicando ancora la conservazione dell'energia meccanica come nella fase di caduta libera

si ottiene $$\begin{cases} h_{pallone} = \dfrac{V_2^2}{2g} = h\left(\dfrac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 0.0016m = 1.6mm \\ h_{baseball} = \dfrac{V_1^2}{2g} = h\left(\dfrac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 4.16m \end{cases}$$

**3. Testo.** Un sonaglio eolico è costituito da 4 piccole masse appese a tre sbarre rigide di egual massa M=20g come indicato in figura. Conoscendo il valore della massa $m_1$=100g sulla sinistra determinare i valori delle altre tre masse incognite che permettono al dispositivo di rimanere in equilibrio. Determinare inoltre i valori delle tensioni di tutti i fili di collegamento ($x_1$=3cm $x_2$=7cm, $x_3$=6cm, $x_4$=4cm, L=25cm)




**3. Soluzione. Statica dell'asta sottostante sinistra**
Per la statica dell'asta sottostante sinistra devono essere simultanemente nulle le due equazioni cardinali (la seconda applicata sul punto $C_1$)



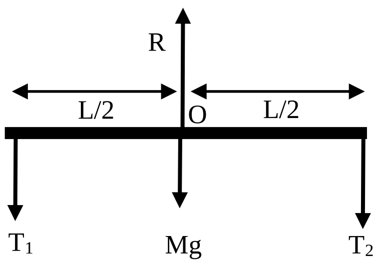

$$\begin{cases} F^{ext} = T_1 - m_1 g - m_2 g - Mg = 0 \\ M^{ext} = M_{m1} + M_{m2} + M_M = +m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - Mg\left(x_2 - x_1\right)/2 = 0 \end{cases}$$

il verso per i momenti è stato scelto positivo per rotazioni antiorarie intorno a C

dalla 2° equazione cardinale $m_2 = \dfrac{m_1 x_1 - M\left(x_2 - x_1\right)/2}{x_2} =$ **37.1 g**

dalla 1° equazione cardinale $T_1 = \left(m_1 + m_2 + M\right)g = \mathbf{1.54\ N}$

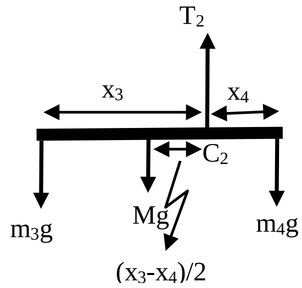
**Statica dell'asta soprastante centrale**
devono essere simultanemente nulle le due equazioni cardinali (la seconda applicata sul punto centrale O)



$$\begin{cases} F^{ext} = R - T_2 - T_1 - Mg = 0 \\ M^{ext} = M_{T1} + M_{T2} = +T_1\left(\frac{L}{2}\right) - T_2\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

dalla 2° equazione cardinale **$T_2$=$T_1$= 1.54 N**
dalla 1° equazione cardinale $R = T_1 + T_2 + Mg =$ **3.28 N**

**Statica dell'asta sottostante destra**
Per la statica dell'asta sottostante destra devono essere simultanemente nulle le due equazioni cardinali (la seconda applicata sul punto $C_2$)




$$\begin{cases} F^{ext} = T_2 - m_3 g - m_4 g - Mg = 0 \\ M^{ext} = M_{m1} + M_{m2} + M_M = +m_3 g x_3 - m_4 g x_4 + Mg\left(x_3 - x_4\right)/2 = 0 \end{cases}$$

il verso per i momenti è stato scelto positivo per rotazioni antiorarie intorno a $C_2$

dalla 1° equazione cardinale $m_3 + m_4 = \frac{T_2}{g} - M =$ **137 g**

dalla 2° equazione cardinale $m_3 x_3 - m_4 x_4 = -M\,\frac{x_3 - x_4}{2} =$ **-0.2 g·m**

Risolvendo il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & -x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137g \\ -0.2 g \cdot m \end{pmatrix}$

si ottengono i valori delle due masse incognite appese

**$m_3$=52.8 g**,  **$m_4$=84.2 g**