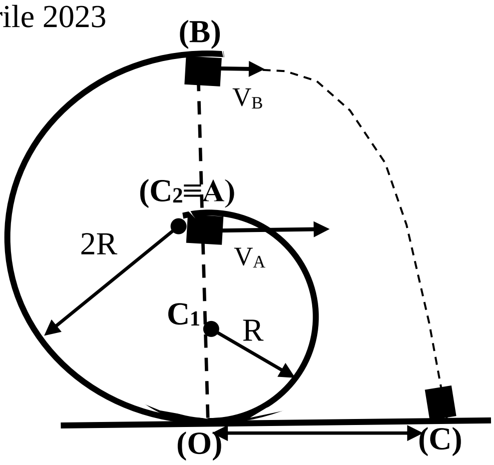
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
Soluzioni dell'esonero del 24 Aprile 2023

1. Testo. Un progettista intende fare uno studio di fattibilità di una montagna russa in cui la rotaia è composta da due tratti semicircolari rispettivamente di raggio R=1m e centro in C_1 e di raggio 2R e centro C_2 tangenti nel punto di minima quota O come descritto in figura (i due tratti hanno diamtri paralleli lungo la verticale OB). Trascurando tutti gli attriti lungo il tragitto, descrivere quale è la velocità minima V_A che occorre fornire in modo che il carrello possa effettuare il giro della morte ed arrivare nel punto di massima quota B in cui la rotaia si interrompe. Determinare inoltre il punto in cui il carrello impatta al suolo (C) calcolando la distanza OC.



1. Soluzione. Velocità minima richiesta per non distaccarsi dalla guida nei punti critici A e B

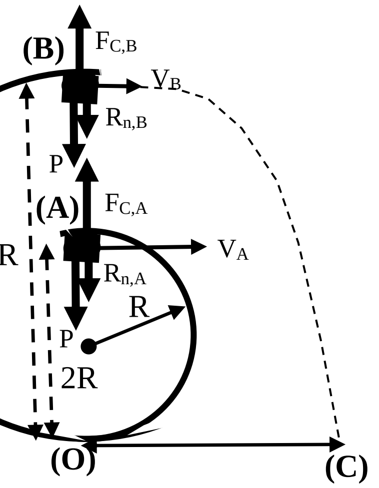
Nei punti A e B, di maggior criticità, il carrello si trova al di sotto della guida ed è soggetto alla forza peso **P=mg**, alla reazione della rotaia $\mathbf{R_n}$ anche questa diretta verso il basso, e alla forza centrifuga diretta invece verso l'alto $\mathbf{F_C} = \mathbf{mv^2/\rho}$ (dove ρ è il raggio di curvatura). Per evitare il distacco nei punti critici è necessario che $R_n>0$ ossia $F_c = \frac{mv^2}{\rho} > P = mg$ da cui $v > \sqrt{g \cdot \rho}$

Questo porta a due condizioni sulle velocità:

nel **punto A** : $v_A > \sqrt{g \cdot \rho_A} = \sqrt{gR}$

nel **punto B** : $v_B > \sqrt{g \cdot \rho_B} = \sqrt{2gR}$=**4.43 m/s**

(la condizione nel punto A è meno stringente ed è automaticamente verificata se è valida la condizione nel punto B)



Imponendo infine la conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B si calcola la velocità minima v_{Amin} con cui deve essere lanciato inizialmente il carrello con i seguenti passaggi:

$E_{mA}=E_{mB}$ da cui $U_A+K_A=U_B+K_B$ $\rightarrow mg(2R) + \frac{1}{2}mv_A^2 = mg(4R) + \frac{1}{2}mv_B^2$

da cui la **velocità in A** vale $v_A = \sqrt{v_B^2 + 4gR} > v_{Amin} = \sqrt{2gR + 4gR} = \sqrt{6gR}$ =**7.67 m/s**

Calcolo dell'impatto al suolo nel punto C

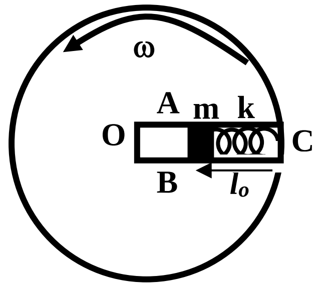
Uscito dalla rotaia nel punto B≡(0; 4R) il carrello percorre da quell'istante (t=0) un moto parabolico per effetto della accelerazione di gravità. Scomponendo il moto lungo gli assi *x* ed *y*

i due moti componenti sono rispettivamente: $\begin{cases} x(t) = v_{Bmin}t \\ v_x = v_{Bmin} \\ a_x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y(t) = 4R - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Il **tempo di volo** si ottiene imponendo y=0 da cui $t^* = \sqrt{8R/g}$ =**0.90 s**

Ed infine la **distanza OC** si calcola quindi dalla $x(t*) = v_{Bmin}t* = \sqrt{2gR}\sqrt{8R/g} = 4R$=**4 m**

2. Testo. Una piattaforma circolare è libera di ruotare su un piano orizzontale alla velocità angolare costante **ω**=4 rad/s. All'interno della piattaforma, lungo un suo raggio ***R***=20 cm, è praticata una scanalatura dove è presente una molla di costante elastica **k**=20 N/m, lunghezza a riposo $\boldsymbol{l_o}$=10 cm, collegata da un lato al punto C periferico all'estremo della piattaforma e dall'altro ad una massa **m**=0.5 kg libera di muoversi senza attrito lungo la scanalatura. Determinare la nuova posizione di equilibrio per la massa *m* (OP) ed il periodo delle oscillazioni. **Facoltativo:** determinare la forza di Coriolis durante le oscillazioni indicando anche se tende a far toccare la massa sul lato A o su quello B.



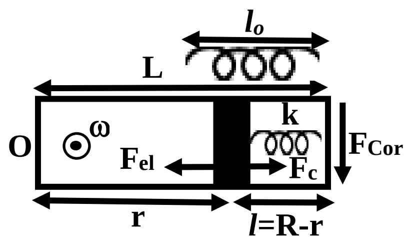
2. Soluzione. Studio delle forze agenti lungo l'asse radiale
La massa è soggetta alla forza centrifuga $\mathbf{F_C=m\omega^2r}$ verso l'esterno e a quella elastica $\mathbf{F_{el}=k(l\text{-}l_o)}$ $\mathbf{=k(R\text{-}r\text{-}l_o)}$ con verso che tende a riportare la lunghezza della molla $\boldsymbol{l}$ a quella naturale $\boldsymbol{l_o}$.

Applicando il II principio: $m\omega^2 r + k(R-r-l_o) = ma = m\frac{d^2r}{dt^2}$

dividendo per la massa si arriva all'equazione differenziale $\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\cdot r = \frac{k}{m}(R-l_o)$,

posto $\omega_o = \frac{k}{m}$, $\quad \frac{d^2r}{dt^2} + (\omega_o^2 - \omega^2)\cdot r = \omega_o^2(R-l_o)$

essendo $\omega_o > \omega$ $\quad \begin{cases} \omega_o^2 = k/m = 40\, rad^2/s^2 \\ \omega^2 = 16\, rad^2/s^2 \end{cases}$ il sistema ammette oscillazioni



La soluzione si ottiene sovrapponendo la soluzione dell'omogenea associata con l'integrale particolare $\quad r(t) = A\cos\left(\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,t + \theta\right) + \left(\frac{\omega_o^2}{\omega_o^2-\omega^2}\right)(R-l_o)$

dove l'ampiezza di oscillazione A e la fase iniziale θ sono determinate dalle condizioni iniziali

La **nuova posizione di equilibrio** $r_{eq} = \left(\frac{\omega_o^2}{\omega_o^2-\omega^2}\right)(R-l_o) = \frac{40}{24}(R-l_o) = \mathbf{16.7\ cm}$

il **periodo delle oscillazioni** è $\quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}} = \mathbf{1.28\ s}$

e **l'ampiezza delle oscillazioni** $\quad A = r_{eq} - (R-l_o) = \left(\frac{\omega^2}{\omega_o^2-\omega^2}\right)(R-l_o) = \mathbf{6.7\ cm}$

(nel caso di molla inizialmente in equilibrio, ove $\theta=\pi$**)**

Facoltativo: l'espressione della Forza di Coriolis è : $\quad \vec{F}_{Cor} = 2m\vec{v}_r \text{x} \vec{\omega}$

dove la velocità relativa si ottiene da $v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{A\cos\left(\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,t+\theta\right) + \left(\frac{\omega_o^2}{\omega_o^2-\omega^2}\right)(R-l_o)\right\}$

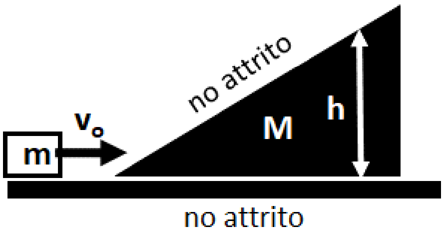
e vale $\quad v(t) = \frac{dr}{dt} = -A\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,sin\left(\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,t+\pi\right)$ da cui sostituendo i valori di A e $\theta=\pi$

$v(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}}(R-l_o)sin\left(\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,t\right)$ (nel senso radiale verso l'esterno)

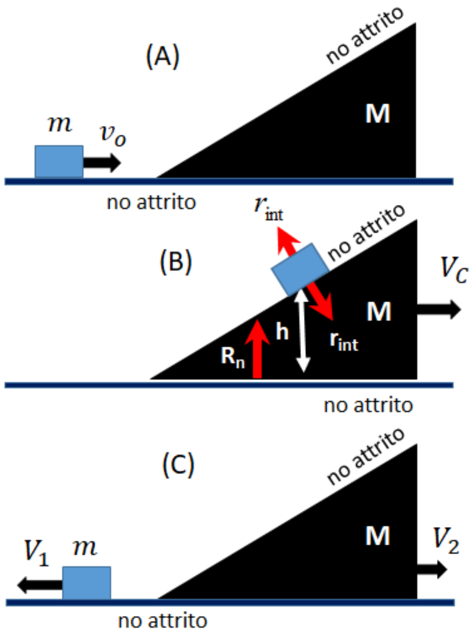
Poichè la velocità angolare di rotazione è uscente dal piano del disegno, la **Forza di Coriolis** risulta inizialmente diretta verso il lato B quando la velocità radiale è nel verso esterno. Tuttavia a causa delle oscillazioni la Forza di Coriolis cambierà il suo verso durante ogni semionda della sinusoide.

$F_{Cor} = \frac{2m\omega^3(R-l_o)}{\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}}sin\left(\sqrt{\omega_o^2-\omega^2}\,t\right)$ con valore massimo $F_{Cor,max} = \frac{\mathbf{2m\omega^3(R-l_o)}}{\sqrt{\boldsymbol{\omega_o^2-\omega^2}}}$ **=1.3 N**

3. Testo. Un blocco di massa **m=10 kg** si muove alla velocità costante **v₀=2 m/s** lungo un piano orizzontale liscio. In un certo istante il blocco sale sopra un cuneo di massa **M=30 kg** inizialmente fermo sul piano scalando il cuneo e raggiungendo la massima quota **h** (rispetto al piano orizzontale). Supponendo che siano nulli tutti gli attriti fra i corpi in contatto. **Determinare** la massima altezza **h** raggiunta, le velocità del blocco m e del cuneo M in quella situazione. Successivamente il blocco m ridiscende il cuneo fino ad allontanarsene. Determinare la velocità di allontanamento finale del blocco m rispetto al cuneo M.



3. Soluzione. La massa m è lanciata verso il cuneo con velocità v_o (fig.A) e lo potrà scalare senza urtarlo fino alla quota h (fig.B)**.** Nel periodo in cui la massa m sale sul cuneo di massa M si sviluppano delle reazioni vincolari mutue r_{int} che sono da considerarsi forze di azione e reazione quindi interne al sistema massa+cuneo. Esse pertanto non sono conteggiate nella I eq. cardinale e non contribuiscono alla variazione della quantità di moto del sistema. Viceversa tutte le forze peso e le reazioni normali esercitate dal piano orizzontale di appoggio sono forze esterne ma tutte dirette verticalmente (gli attriti sono assenti!) per cui bisogna applicare la **conservazione della quantità di moto del sistema solo lungo l'asse orizzontale x**, durante tutte le tre fasi A, B, C.



$$mv_0 = (M+m)V_C = mV_1 + MV_2 \quad (1)$$

le velocità sono assunte positive verso destra. Qui la velocità V_1 nella fase C sarà quindi negativa.
Si è assunto che in B entrambe le masse abbiano la medesima velocità V_C, poiché quando il blocco m raggiunge la quota massima esso si ferma per un istante nel sistema relativo solidale al cuneo prima di ridiscendere. Dalla Eq.(1) si ottiene facilmente la **velocità comune V_C nella fase B**:

$$mv_0 = (M+m)\cdot V_C \;\text{ da cui }\; V_C = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_0 = \frac{v_0}{4} = \mathbf{+0.5\ m/s} \quad (2)$$

Durante tutte le tre fasi A, B, C, in assenza di attriti vanno anche applicate i **principi di conservazione dell'energia meccanica del sistema** per cui:

$$K_A = U_B + K_B = K_C \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}(M+m)V_C^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \quad (3)$$

Combinando le Eq.(2) e (3) limitatamente alle fasi A e B si ottiene la **quota massima h** come segue:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}(M+m)\cdot V_C^2 = mgh + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0^2$$

da cui si ricava la **massima quota h** raggiunta prima della discesa $\boldsymbol{h = \left(\frac{M}{M+m}\right)\cdot \frac{v_0^2}{2g}}$ **=15.3 cm**

Per le velocità nella fase C occorre invece risolvere il sistema delle Eq.(1) e (3) (conservazione della quantità di moto e dell'energia) per le due fasi A e C. In sintesi:

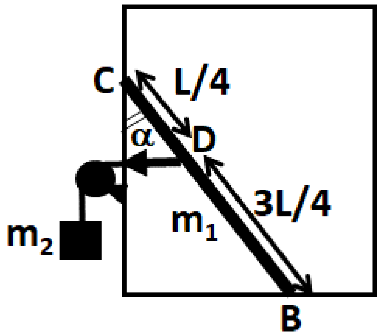
$$\begin{cases} mv_0 = mV_1 + MV_2 \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \end{cases}$$ Questo sistema è lo stesso trovato per l'urto normale centrale elastico che viene risolto abbassando il grado dell'equazione di secondo grado sulla conservazione dell'energia ed ottenendo un sistema lineare di due soluzioni in due incognite portando alle due velocità nella fase C della massa e del cuneo.

Velocità della massa m in C: $V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right) v_o = -\frac{1}{2} v_o$ = **-1m/s** (diretta verso sinistra)

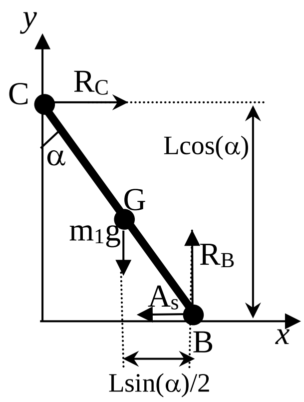
Velocità del cuneo M in C: $V_2 = \left(\frac{2m}{m+M}\right) v_o = \frac{1}{2} v_o$ =**+1m/s**

La **velocità di allontanamento di m da M** è quindi: $V_1 - V_2 = -v_o$ = **-2m/s**

4. Testo. Una scala di massa m_1=10 kg e di lunghezza L é poggiata nel punto B su un pavimento orizzontale scabro (μ_s=0.1) e nel punto C ad una parete verticale liscia inclinata di un angolo α=25° rispetto alla verticale. In tali condizioni la scala non può rimanere in equilibrio, Pertanto nel punto D (a distanza L/4 dal punto C) viene fissata ad una sistema con una fune e puleggia e con un contrappeso di massa m_2 in modo da esercitare sulla scala una forza orizzontale di sostegno. Determinare quale è il valore minimo della massa del contrappeso m_2 per equilibrare il sistema e garantire l'equilibrio della scala.



4. Soluzione. Instabilità senza l'uso di una fune di sostegno
Nel caso il sistema non abbia la fune di sostegno le forze agenti sulla scala sono le seguenti: nel baricentro G è applicato il peso della scala **P=m₁g.** Nel punto di contatto B sono applicate la reazione normale $\mathbf{R_B}$ e la forza di attrito statico orizzontale $\mathbf{A_s}$. Infine la reazione $\mathbf{R_C}$ è applicata nel punto C



In condizioni statiche la somma di tutte le forze deve annullarsi (1ª equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze (2ª equazione cardinale).

1ª equazione cardinale: $\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} R_C - A_s = 0 \\ R_B - P = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A_s = R_C \\ R_B = P = mg \end{cases}$

2ª equazione cardinale (calcolata rispetto a B)

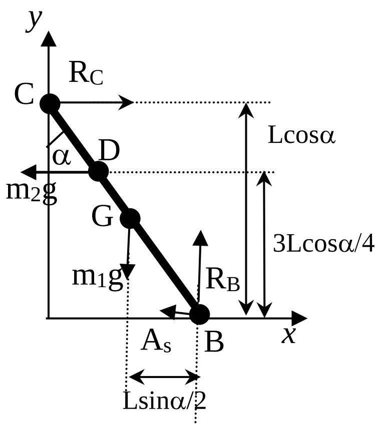
$M_P + M_{RC} = 0$ da cui $m_1 g \frac{L}{2} \sin\alpha - R_C L \cos\alpha = 0$

da cui $R_C = \frac{m_1 g}{2} tan\alpha$, e **l'attrito** $A_s = \frac{m_1 g}{2} tan\alpha \leq A_{max} = \mu_s R_B = \mu_s m_1 g$

da cui semplificando $m_1 g$ si giunge alla disequazione $\mu_s = 0.1 \geq \frac{\tan\alpha}{2}$ =0.23 !!

che **non è soddisfatta e che evidenzia l'instabilità del sistema**

Stabilità con l'uso di una fune di sostegno



Quando viene usata una fune di sostegno nel punto D viene applicata una forza aggiuntiva in orizzontale: la tensione statica della fune collegata alla massa m_2. In condizioni statiche tale tensione è esattamente pari al peso della massa collegata cosicché funi e carrucola siano fermi : **$T=m_2g$**

Applicando nuovamente le equazioni cardinali per la statica si ottiene:

1ª equazione cardinale: $\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} R_C - T - A_s = 0 \\ R_B - P = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A_s = R_C - m_2g \\ R_B = m_1g \end{cases}$

2ª equazione cardinale (calcolata rispetto a B)

$M_P + M_T + M_{RC} = 0$ da cui $m_1g\frac{L}{2}\sin\alpha + m_2g\frac{3L}{4}\cos\alpha - R_C L\cos\alpha = 0$

da cui $R_C = \frac{3}{4}m_2g + \frac{1}{2}m_1gtan\alpha$, **l'attrito** $A_s = -\frac{1}{4}m_2g + \frac{1}{2}m_1gtan\alpha \leq \mu_s R_B = \mu_s m_1 g$

da cui si calcola la **massa m_2 minima per equilibrare il sistema** $m_2 \geq m_1(2tan\alpha - 4\mu_s)$=**5.33 kg**

Esiste anche un valore massimo m_2 (non richiesto dal problema) oltre il quale il sistema si squilibrare nel senso opposto (l'attrito cambia verso etc..)