DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI FISICA MATEMATICA A.A. 2018-2019 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI, SANDRA CARILLO
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

- I richiami ai testi sono identificati così:
  A: *Versione preliminare* degli Appunti del corso, pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso;
- La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

Presentazione del corso.
Derivazione dalla dinamica dell'equazione delle onde in una dimensione spaziale
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F$$
come modello di una corda vibrante con carico F anche concentrato. Deduzione dell'equazione del calore con sorgente; ipotesi di Fourier. L'ipotesi di Fick e l'equazione della diffusione.

Esempio 1.1. 1) equazione immediatamente riducibile a una alle derivate ordinarie:
$$u_x = u + y \,, \qquad x, y \in \mathbb{R} \,.$$
Assegnazione di un dato su $x = 0$. Perché non si può assegnare il dato su $y = 0$.
2) equazioni del tipo
$$au_x + bu_y = 0 \,,$$
in cui la soluzione è costante su rette caratteristiche.
3) Equazioni del trasporto:
$$u_t + cu_x = 0 \,,$$
in cui la soluzione ha la forma
$$u(x, t) = f(x - ct) \,.$$
Suo significato. □

Esercizio 1.2. Dimostrare come l'equazione delle onde sia composizione delle due equazioni del trasporto
$$u_t \pm cu_x = 0 \,.$$
□

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 1.1, 1.4.

Motivazione e panoramica sul programma del modulo (3 CFU) riguardante studio di equazioni differenziali mediante metodi qualitativi e perturbativi.
Teoremi di conservazione dell'energia e sistemi meccanici ad un solo grado di libertà.

Esempio 2.1. Pendolo semplice. Cioè, punto P di massa m, soggetto al peso, vincolato, bilateralmente e senza attrito, ad appartenere ad una circonferenza, in un piano verticale.

- Equazione del moto e teorema di conservazione.
- Piano delle fasi.
- Piccole oscillazioni.

$\square$

Motivazione dei metodi perturbativi prendendo spunto dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin(\theta) \\ \theta(0) \ \ = \varepsilon \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

dove g indica il modulo dell'accelerazione di gravità, $0 < \varepsilon << 1$ e R il raggio della circonferenza cui è vincolato il punto P. Introducendo $x := \frac{\theta}{\varepsilon}$, il problema (2.1) si scrive

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{g}{R}\sin(\varepsilon x) \\ x(0) \ \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Nel seguito si studierà questo problema nonlineare (2.1) mediante *metodi perturbativi.*

Soluzioni a variabili separabili dell'equazione delle onde in dimensione 1 e in dimensione 2 (caso della costante non negativa).

Per casa 3.1. Trattare il caso della costante negativa, e quello dell'equazione del calore. □

Idea del metodo di Fourier, sviluppi in serie di soluzioni a variabili separabili.
Separazione delle variabili in un dominio generico $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
Autofunzioni del problema di Dirichlet e del problema di Neumann.

Teorema 3.2. *Gli autovalori del problema di Dirichlet sono strettamente positivi.*
Gli autovalori del problema di Neumann sono non negativi, e 0 *è autovalore con autofunzione costante.*

Esercizio 3.3. Ricerca delle autofunzioni del problema di Neumann nell'intervallo $(0, \pi)$ e nel quadrato $(0, \pi) \times (0, \pi)$. Autovalori. □

Per casa 3.4. Ricerca delle autofunzioni del problema di Dirichlet nell'intervallo $(0, \pi)$.
Ricerca delle autofunzioni del problema di Dirichlet nel quadrato $(0, \pi) \times (0, \pi)$. Autovalori. □

Problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione delle onde e del calore; loro significato applicativo.

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 2.3, 2.4, 3.1, 5.1, 5.2.

Teorema 4.1. *Se* (φ_1, λ_1), (φ_2, λ_2) *sono coppie a./a. per lo stesso problema, e* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *allora*

$$\int_{\Omega} \varphi_1(x)\varphi_2(x) \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Osservazioni sulle analogie con le matrici simmetriche.

Esempio 4.2. Esempio di un problema di Dirichlet per l'equazione del calore con soluzione a variabili separate in $(0, \pi)$. □

Metodo degli sviluppi in serie di autofunzioni del laplaciano per le soluzioni dell'equazione del calore non omogenea. Necessità dello sviluppo in serie infinita. Equazione differenziale per i coefficienti dipendenti dal tempo. Normalizzazione delle autofunzioni.

Esempio 4.3. Normalizzazione nel caso di $\cos(nx)$ in $(0, \pi)$. Verifica dell'ortogonalità. □

Per casa 4.4. Normalizzare il sistema $\sin(nx)$ $n \geq 1$ in $(0, \pi)$. Verificare l'ortonormalità. □

Per casa 4.5. Trovare i problemi di cui sono autofunzioni rispettivamente le $\sin(2n+1)x$ e le $\cos(2n+1)x$, $n \geq 0$ in $(0, \pi/2)$.
Trovare i problemi di cui sono autofunzioni le funzioni del sistema di Fourier 1, $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ in $(-\pi, \pi)$. □

Introduzione dello spazio $L^2(I)$; identificazione di funzioni tali che

$$\int_{I} |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Prodotto scalare di funzioni, norma, distanza tra funzioni. Proprietà del prodotto scalare; simmetria, linearità, positività. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare.
Integrali di funzioni illimitate.

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 5.2, 5.3, 7.1.

Metodo perturbativo diretto (STFWD): illustrazione ed esempi. Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0\,, \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Il sistema è *debolmente* dissipativo: dimostrazione.
Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
Metodo perturbativo diretto applicato al *toy problem* per illustrare il metodo perturbativo diretto (STFWD)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\ \varepsilon^k. \tag{5.2}$$

Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t)| < M \quad , \quad \forall k$.
Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
Soluzione esatta.
Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.
Equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \frac{\varepsilon^2}{6}x^3 = 0\,, \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Il sistema è *conservativo*: dimostrazione.
Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
Applicazione del metodo perturbativo diretto (STFWD) (5.2).
Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
Osservazione: in questo caso non è possibile trovare analiticamente la soluzione esatta. Il confronto, quindi, può solo essere fatto con soluzioni numeriche che, quindi, sono affette da errori di calcolo.

Teorema 6.1. *Se* f, $g \in L^2(I)$ *allora*

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\| .$$

Commenti sul significato della norma in $L^2(I)$. Definizione di convergenza di successioni e serie in $L^2(I)$.

Teorema 6.2. *Se* $f_n \to f$ *allora* $(f_n, g) \to (f, g)$.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = F$ *allora* $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n, g) = (F, g)$.

Definizione di funzioni ortogonali.

Proposizione 6.3. *Funzioni diverse da zero e ortogonali due a due sono linearmente indipendenti.*

Corollario 6.4. $L^2(I)$ *ha dimensione infinita come spazio vettoriale.*

Definizione di sistema ortonormale.
Approssimazione di funzioni con sistemi ortonormali; il metodo dei minimi quadrati.
Disuguaglianza di Bessel
Definizione di sistemi ortonormali completi. Sistema di Fourier, di soli seni e soli coseni. Sistemi per condizioni al bordo miste.
Identità di Parseval.

Esercizio 6.5. 1, 2/ 620 $\square$

Risoluzione di problemi con condizioni al bordo miste.

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 8.1, 8.2.

Metodo delle scale multiple: illustrazione ed esempi.
Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

N.B. Già dimostrato che il sistema è *debolmente* dissipativo e fornito la rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
Metodo delle scale multiple applicato al *toy problem* per illustrare il metodo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t,\tau)\ \varepsilon^k \quad , \quad \tau := \varepsilon t. \tag{7.2}$$

Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t,\tau)| < M \quad , \quad \forall k.$
Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.
Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.
Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t,\tau)$ e $x(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon x_1(t,\tau)$.
Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t,\tau)$ e $x_1(t,\tau)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
Soluzione esatta, già vista nella lezione precedente: richiamo.
Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.
Illustrazione dell'applicazione del metodo utilizzando utilizzando il calcolo simbolico (MUPAD toolbox di MatLab).
Visualizzazione, con proiezione sullo schermo, dei risultati ottenuti e confronto tra il metodo perturbativo diretto, quello delle scale multiple e la soluzione esatta.

Esempi di sistemi ortonormali completi: $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{C}}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$, per le varie condizioni al bordo.
Passaggio ad altri intervalli.
Applicazione del metodo di Fourier a problemi al contorno per l'equazione delle onde e del calore. Esempi.

Esercizio 8.1. 1, 17/610, 20/620. □

Teorema 8.2. (s.d.) *Sia il problema di Dirichlet che il problema di Neumann per il laplaciano hanno una successione infinita di coppie autofunzione/autovalore* (φ_n, λ_n). *Inoltre*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty\,.$$

Infine $\{\varphi_n\}$ *è un sistema ortonormale completo.*

Il caso $N = 1$ (intervalli di $\mathbb{R}$) si è considerato direttamente.
Il caso $N = 2$ con Ω rettangolo segue dal

Teorema 8.3. (s.d.) *Sia* $\{\varphi_n\}$, *rispettivamente* $\{\psi_m\}$, *un sistema ortonormale completo in* $L^2(I)$, *rispettivamente in* $L^2(J)$. *Allora* $\{\varphi_n\psi_m\}$ *è un sistema ortonormale completo in* $L^2(I \times J)$.

Per casa 8.4. 23/610; 1/625. □

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 8.3, 8.7, 9.1, 9.2, 9.5.

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x & , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{9.1}$$

N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto.
L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (9.1), definito mediante la (5.2), fornisce

$$y_0 = e^x \tag{9.2}$$

N.B. non abbiamo ottenuto una equazione differenziale, ma una funzione della variabile x che non verifica né la condizione $y(0) \ = 2$, né la condizione $y(1) \ = 1$. Quindi, possiamo pensare che la soluzione del problema assegnato possa essere approssimata dalla funzione $y_0(x) = e^x$ per $a < x < b$ dove $0 < a << 1$ e $0 << b < 1$.
Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.
Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-2} in modo tale che il prodotto $\varepsilon^2 y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio:
Introduzione delle nuove variabili:

$$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0, a), \qquad a << 1 \tag{9.3}$$

determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (9.9) in (9.1), si ottiene:

$$\varepsilon^{2-2-\alpha} Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\varepsilon^{-\alpha} X} \tag{9.4}$$

se chiediamo che i termini

$$(1) \ \text{ order of } \ (3) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

invece

$$(1) \ \text{ order of } \ (2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perché produce

$$\varepsilon Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\sqrt{\varepsilon} X}$$

$$Y + \varepsilon X Y - Y = -\varepsilon . \qquad (9.5)$$

Applicazione all'equazione (9.5) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X)\ \varepsilon^k. \qquad (9.6)$$

che verifica la condizione $Y(0) = 2$.
Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.
Osservazione: per $x \in (0, 1)$, segue $X \in (0, +\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.
Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \qquad (9.7)$$

Costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:

$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \qquad (9.8)$$

La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$. Quindi, bisogna ripetere lo stesso procedimento nell'intorno del punto $x = 1$. Si introducono quindi le nuove variabili:

$$\tilde{x} := \frac{x - 1}{\varepsilon^\beta} \quad , \quad \tilde{y} := y \quad \text{when} \quad x \in (b, 1), \quad 0 << b \qquad (9.9)$$

Determinazione di $\beta \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili $\tilde{x}, \tilde{y}$, l'equazione differenziale non sia singolare.
Si ripete la stessa procedura par lo *strato sottile* nell'intorno del punto $x = 1$. (i.e., trovato β, si scrive l'equazione differenziale non singolare nella incognita funzione $\tilde{y} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, si applica ad essa il metodo perturbativo diretto, imponendo la condizione $\tilde{y}(1) = 1$, trovata e determinando il parametro *libero* imponendo la condizione di *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno del punto $x = 1$.
Discussione del metodo e dei risultati ottenuti.

Teorema 10.1. *Se u soddisfa*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \qquad \text{in } (a,b) \times (\alpha,\beta),$$

vale

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,$$

per f e g funzioni opportune.

Teorema 10.2. *Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione $N = 1$ ha unica soluzione data dalla formula di D'Alembert*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Soluzione debole del problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Analisi della struttura della soluzione del problema di Cauchy nei due casi: 1) $u_0(x) = \chi(x)$, $u_1(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; 2) $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \chi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Qui $\chi(x) = 1$ se $x \in (a,b)$, $\chi(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$.
Formula di rappresentazione di Kirchhoff (in dimensione 3) e di Poisson (in dimensione 2) per la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde (s.d.). Differenze qualitative tra i due casi. Confronto con il caso della dimensione 1.

Esercizio 10.3. 3/310: caso dell'impulso concentrato; introduzione alla delta di Dirac. □

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 3.3, 10.1, 10.2, 10.3.

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{11.1}$$

N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto dal secondo al primo. L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (9.1), definito mediante la (5.2), fornisce, all'*ordine zero*,

$$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \\ y_0(0) \ = 0 \qquad \text{oppure} \qquad y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{11.2}$$

N.B. abbiamo ottenuto una equazione differenziale, del I ordine cui non possiamo imporre le due condizioni al contorno assegnate. Quindi, dobbiamo scegliere quale condizione imporre. Poichè la soluzione unica di (11.2) che soddisfa la condizione $y_0(0) \ = 0$ è la soluzione banale $y_0(x) \ = 0$, consideriamo

$$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \quad a < x < 1, a << 1 \\ y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{11.3}$$

Ipotizziamo, cioè che vi sia uno *strato sottile* nell'intorno (destro) dell'origine. La soluzione del problema (11.3) è:

$$y_0(x) = e^{1-x} \tag{11.4}$$

che approssima la soluzione del problema assegnato per $a < x < 1$ dove $0 < a << 1$.

Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.

Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-1} in modo tale che il prodotto $\varepsilon y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio

Introduzione delle nuove variabili:

$$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0, a), \qquad a << 1 \tag{11.5}$$

Determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (11.5) in (11.1), si ottiene:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} Y'' + 2\varepsilon^{-\alpha} Y' + 2Y = 0 \tag{11.6}$$

$$(1) \ \text{order of} \ (2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

invece

$$(1) \ \text{order of} \ (3) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perché produce

$$Y'' + 2\varepsilon^{-1/2}Y' + 2Y = 0$$

invece per $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\varepsilon^{-1}Y'' + 2\varepsilon^{-1}Y' - Y = 0.$$

che, moltiplicata per $\varepsilon > 0$, fornisce

$$Y'' + 2Y' + 2\varepsilon Y = 0. \tag{11.7}$$

Applicazione all'equazione (11.7) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X)\ \varepsilon^k. \tag{11.8}$$

che verifica la condizione $Y(0) = 0$.
Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.
Osservazione: per $x \in (0, 1)$, segue $X \in (0, +\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.
Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \tag{11.9}$$

Costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:

$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \tag{11.10}$$

La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$.
Costruzione della soluzione esatta del problema.
Confronto tra soluzione esatta ed approssimata.
Discussione del metodo e dei risultati ottenuti.
In riferimento al problema (11.1), costruzione della soluzione composita all'ordine 1, ripercorrendo tutti i passi visti nella lezione precedente.

Moto browniano e equazione della diffusione come conseguenza di un approccio statistico. Soluzione fondamentale e suo significato probabilistico.
Problema di Cauchy per l'equazione del calore. Formula di rappresentazione.
Teorema di esistenza e unicità per soluzioni limitate.

Teorema 12.1. *Se il dato iniziale soddisfa $m \le u_0 \le M$, allora la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore soddisfa $m \le u \le M$.*
Se il dato iniziale è integrabile in $\mathbb{R}^N$ allora la soluzione soddisfa

$$|u(x,t)| \le \frac{C}{t^{\frac{N}{2}}}\,, \qquad t > 0\,.$$

Proposizione 12.2. *Conservazione della massa per dati iniziali integrabili e non negativi.*

Propagazione con velocità infinita.

Teorema 12.3. *Se u è la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore, corrispondente al dato iniziale non negativo u_0, vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\int\limits_{\{|x| \le C_\varepsilon \sqrt{Dt} + L\}} u(x,t)\,\mathrm{d}x \ge (1-\varepsilon) \int\limits_{\{|x| \le L\}} u_0(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

per ogni $u_0 \ge 0$, $L > 0$.

Ottimalità della stima asintotica

$$u(x,t) \le \frac{\text{costante}}{t^{\frac{N}{2}}}$$

per soluzioni non negative del problema di Cauchy per l'equazione dl calore.

Per casa 12.4. 3, 4, 5/520. □

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 1.2, 11.4, 11.5.

Un esempio di problema non-lineare con uno *strato limite interno*

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - (y'-1)y = 0 \quad , \quad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \;= 1 \\ y(1) = -1 \end{cases} \tag{13.1}$$

Il problema è un *problema perturbativo singolare* poiché ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale passa dal secondo al primo ordine.
Applicazione del metodo perturbativo diretto e sui limiti.
Metodo dello strato sottile nel caso in cui la posizione dello strato all'interno dell'intervallo $(0, 1)$, in questo caso, non è nota.
problemi nell'applicazione del metodo.
Ordini successivi di approssimazione.
Confronto con altri problemi.
Un esempio di problema non-lineare con un parametro piccolo: il modello non-lineare di van der Pol. Tale modello può essere usato come approssimazione del funzionamento cardiaco.

$$\begin{cases} y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0 \quad , \quad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \;= 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{13.2}$$

Il problema è un *problema perturbativo regolare* poiché ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è del secondo ordine come la (13.2).
Applicazione del metodo perturbativo diretto e sui limiti.
Scale multiple e problemi nell'applicazione del metodo.
Ordini successivi di approssimazione.
Confronto con altri problemi.

Effetto regolarizzante dell'equazione del calore.

Esercizio 14.1. 11/520. □

Funzioni armoniche, subarmoniche, superarmoniche. Formula della media.
Principio di massimo per l'equazione di Laplace, principio di massimo forte, lemma di Hopf.

Esercizio 14.2. 22, 25/430. □

Unicità per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Unicità a meno di costanti additive per il problema di Neumann per l'equazione di Laplace; condizione di compatibilità sui dati e suo significato.
Principio di massimo per l'equazione del calore, principio di massimo forte, lemma di Hopf. Frontiera parabolica e interno parabolico.
Famiglie di soluzioni per l'equazione $u_t - Du_{xx} = 0$ date da

$$z_1(x,t) = ke^{-\alpha^2 Dt}\cos(\alpha x)\,, \qquad z_2(x,t) = ke^{-\alpha^2 Dt}\sin(\alpha x)\,.$$

Per casa 14.3. 1, 3, 5, 25/520;
3, 6, 7/420;
15/430;
3/470;
2, 9/480. □

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6.

Problemi con *strato limite.* Considerati gli esempi
Uno strato sottile

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{15.1}$$

Due strati sottili

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \ \ . \end{cases} \tag{15.2}$$

Illustrazione dell'applicazione del metodo perturbativo utilizzando il calcolo simbolico (MUPAD toolbox di MatLab), ricordando i risultati analitici precedentemente ottenuti.

Visualizzazione, con proiezione sullo schermo, dei risultati ottenuti e confronto tra il metodo perturbativo (strati limite) e la soluzione esatta.
Visualizzazione dei grafici relativi alle soluzioni approssimate ottenute. Confronto diretto tra le soluzioni esatte (ove possibile (15.1)) ed approssimate a complemento dello studio analitico precedentemente fatto. Cenno all'applicazione di metodi perturbativi ad equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali. Un esempio: ricerca di soluzioni *piccole* dell'equazione di Burgers

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \quad , \quad |u| << 1. \tag{15.3}$$

Cenno ad altri metodi di soluzione di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali. La trasformazione di Cole-Hopf.
Possibili temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti. (Materiale messo a disposizione sulla piattaforma Elearning: *https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4650*)

Il metodo delle soprasoluzioni e sottosoluzioni per l'equazione del calore.

Esercizio 16.1. 1, 6/420. □

Il metodo di Galerkin.
Applicazione del metodo di Galerkin all'equazione del calore con diffusività variabile.
Confronto tra i metodi di Galerkin e di Fourier.
Corda con carico concentrato costante, caso evolutivo. Condizioni di raccordo. Risoluzione mediante il metodo di Fourier.
Corda con carico concentrato dipendente dall'incognita. Condizioni di raccordo. Risoluzione mediante il metodo di Galerkin.
In alternativa, risoluzione mediante il metodo di Fourier: ricerca delle autofunzioni. Gli autovalori sono positivi.
Metodo di Fourier per l'equazione di Poisson.

Esercizio 16.2. 7/630. □

Per casa 16.3. 5, 11/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 4.4, 14.1, 14.3.

Problemi con *soluzioni periodiche.*
Caso di sistemi dinamici conservativi nonlineari nei quali la soluzione ottenuta con il metodo perturbativo diretto non è limitata.
Metodo delle scale multiple adattato a problemi con *soluzioni periodiche.* Si sviluppa in serie (formale) di potenze nel parametro *piccolo* ε la pulsazione ponendo:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon\omega_2 + \dots \ . \tag{17.1}$$

Pendolo semplice. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \theta'' + \sin\theta = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ \theta(0) \ = \varepsilon \\ \theta'(0) = 0 \end{cases} \tag{17.2}$$

come scrivere il problema in modo da trattarlo con un metodo perturbativo.
Introduzione della variabile dipendente:

$$x := \frac{\theta}{\varepsilon} \ ; \tag{17.3}$$

mediante la quale il problema (17.2) diventa

$$\begin{cases} \varepsilon\ddot{x} + \sin(\varepsilon x) = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \ . \end{cases} \tag{17.4}$$

Soluzione mediante il metodo perturbativo diretto.
Confronto con il corrispondente problema nel caso dell'equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon^2 x^3 = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \ . \end{cases} \tag{17.5}$$

Applicazione del metodo delle scale multiple, con periodo dato dalla (17.1), allo studio del problema di Cauchy (17.5).

Confronto tra metodo delle scale multiple con periodo variabile e non in riferimento all'equazione di Duffing.
Limiti di applicazione del metodo.
Suggerimenti e domande studenti relativamente ai temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti.
(Materiale messo a disposizione sulla piattaforma Elearning).
https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4650

19. Giovedì 06/12/2018

(Carillo) (Aula 1B1: 09-11)

Ricevimento studenti: Suggerimenti e domande studenti relativamente ai temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti.

20. Lunedì 10/12/2018

(Andreucci) (Aula 1B1: 10-13)

Formulazione rigorosa e soluzioni dell'equazione

$$-\Delta v = p\delta_(x - x_0)\,, \qquad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

con $p > 0$. Approssimazione delle soluzioni (se $N = 2$) con soluzioni dei problemi

$$-\Delta v_\varepsilon = \frac{p}{\pi\varepsilon^2}\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)\,, \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Il principio di Dirichlet; equivalenza tra il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace e il problema di minimo per il funzionale dell'energia

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\,, \quad u \in K = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\,, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\}\,.$$

Discussione degli argomenti delle tesine.

Paragrafi di riferimento sul testo: A: 1.3, 14.4, 14.6.

Metodo delle scale multiple: caso di soluzioni periodiche. Equazione di Mathieu:

$$\begin{cases} y'' + (1 + \varepsilon\delta + \varepsilon\cos(kt))y = 0 \quad , \quad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{21.1}$$

Il metodo perturbativo diretto produce soluzioni non limitate, per tempi *lunghi* in analogia con quanto visto nei casi dell'oscillatore debolmente smorzato che delle equazioni di Duffing e del pendolo.
Metodo delle scale multiple applicato al problema (21.1);

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t,\tau)\ \varepsilon^k \quad , \quad \tau := \varepsilon t. \tag{21.2}$$

Convergenza uniforme e condizione $|y_k(t,\tau)| < M \quad , \quad \forall k$.
Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon\frac{d}{\partial \tau}$$

Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.
Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.
Determinazione di $x(t) \simeq y_0(t,\tau)$ e $y(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon y_1(t,\tau)$.
Problema all'*ordine zero*:

$$\begin{cases} y_{0tt} + y_0 = 0 \quad , \\ y_0(0,0) \ = 1 \quad y_{0t}(0,0) = 0 \end{cases} \tag{21.3}$$

Soluzione della forma

$$y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{it} + A^*(\tau)e^{-it} \quad , \quad A \in \mathbb{C} \ , \tag{21.4}$$

dove A^* indica il complesso coniugato di A. Le condizioni iniziali forniscono delle condizioni sui valori di $A(0)$ e $A^*(0)$.
Problema all'*ordine uno*:

$$\begin{cases} y_{1tt} + y_1 = -2y_{0t\tau} - (\delta + \cos(kt))y_0 \quad , \\ y_1(0,0) \ = 0 \\ y_{1t}(0,0) = -y_{0\tau}(0,0) \end{cases} \tag{21.5}$$

Si ottiene la soluzione *limitata* imponendo che il termine noto nell'equazione (**??**) non sia in risonanza con l'operatore differenziale nella stessa equazione. Conviene usare la rappresentazione con esponenziali

$$y'' + \omega^2(\varepsilon t)y = 0 \tag{21.6}$$

FINE DEL CORSO