

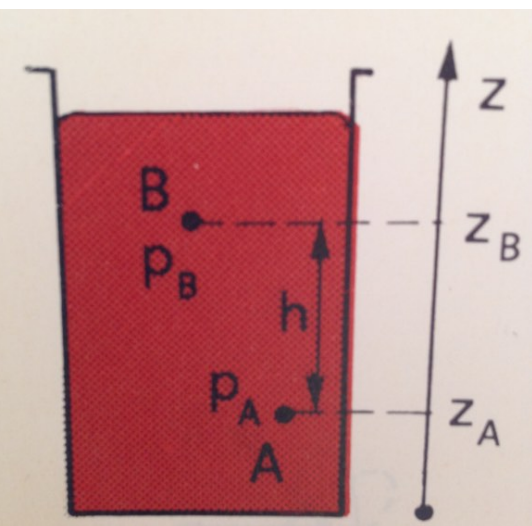
3° lezione (2ore) 2° parte

Fluidi

- **Bellini-Manuzio, Fisica per le Scienze della Vita, Piccin (viale regina margherita 290)**
- **Serway-Jewett, Principi di Fisica, EdiSes**
- **-Physics in Biology and Medicine, Paul Davidovits, Elsevier Academic Press**
- **-Physics of the Human Body, Irving P. Herman, Springer.**

Ricorda:

Legge di Stevino: $p_A = p_B + \rho gh$



→ La pressione dipende solo dalla profondità "h"

→ Una colonna di fluido in *equilibrio* esercita per effetto della gravità una pressione, ***p-IDROSTATICA***, su ogni punto sottostante.

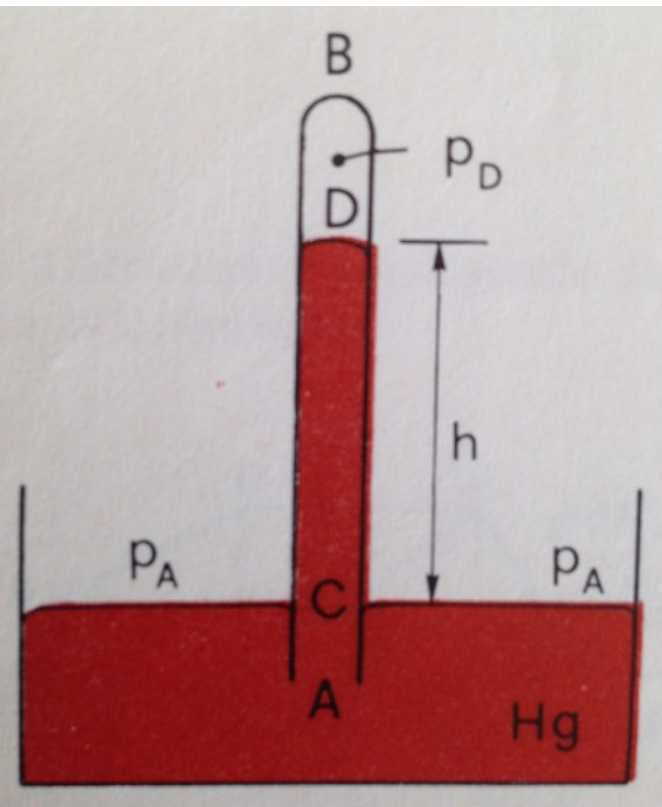
→ I piani orizzontali in un fluido in *equilibrio* per azione della gravità sono Superfici Isobariche e cioè la pressione su ogni punto del piano ha lo stesso valore.

Ricorda:

Legge di Stevino: $p_A = p_A + \rho gh$

Vaschetta con mercurio

Tubo riempito di mercurio



Immergendo un estremità del tubo nella vaschetta → piccolo svuotamento con mercurio nel tubo che rimane ad quota “h” dalla sup di mercurio nella vaschetta.

→ Situazione statica → Legge Stevino:
 $p_A = p_C$ (la superficie è isobara)

→ In C la pressione è uguale alla pressione idrostatica della colonna di mercurio di altezza “h”

Misura pressione atmosferica

Ricorda:

Legge di Stevino: $p_A = p_A + \rho gh$

→ In C la pressione è uguale alla pressione idrostatica della colonna di mercurio di altezza “h”

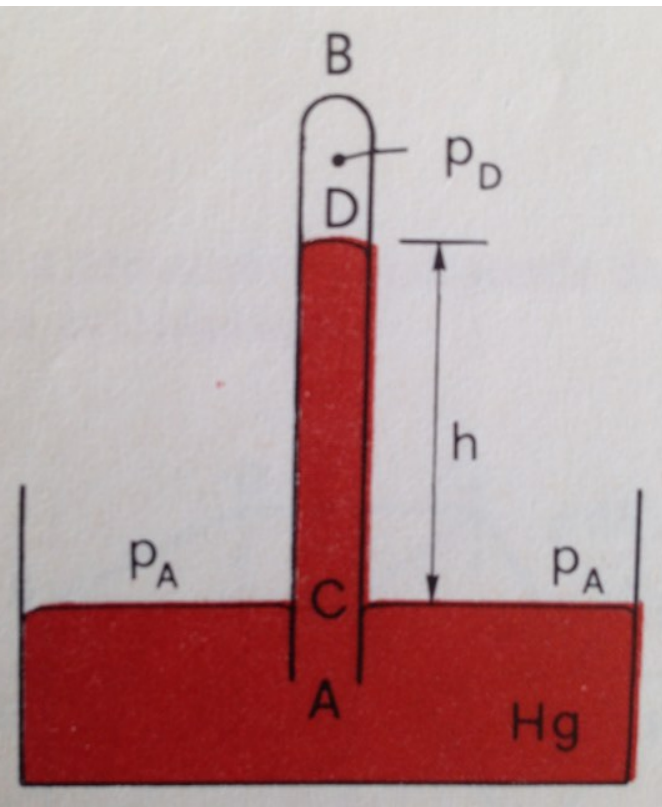
$$p_C = p_A = \rho gh$$

Nota: la pressione p_D è stata trascurata (c'è solo vapor saturo di mercurio)

→ Al livello del mare: $h=h_0=76\text{cm}$

$$p_A = p_0 = \rho gh = \left(13,596 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0.76\text{m})$$

$$\Rightarrow p_A = p_0 = 1.012 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$



Misura pressione atmosferica

→ Al livello del mare: $h=h_0=76\text{cm}$

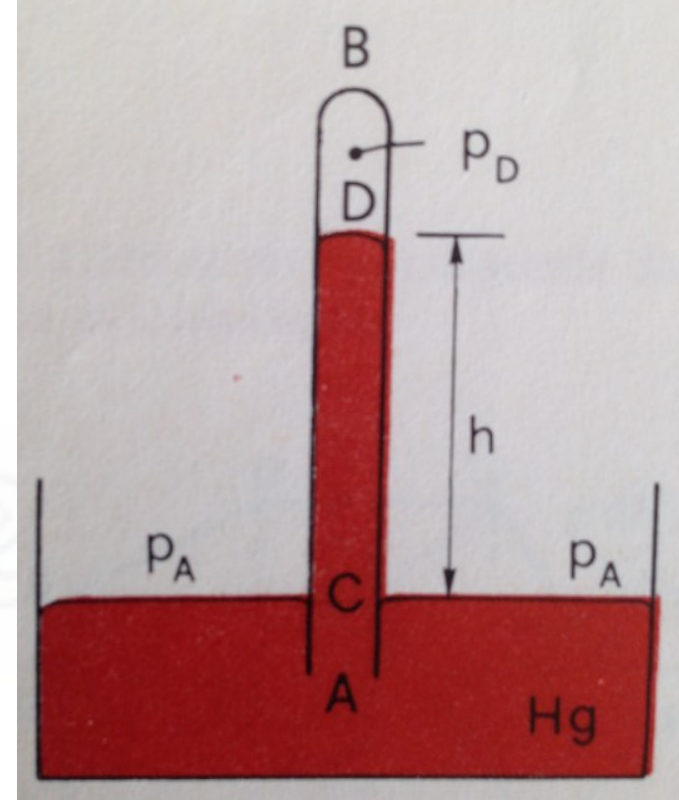
$$p_A = p_0 = \rho g h = \left(13,596 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0.76\text{m})$$

$$\Rightarrow p_A = p_0 = 1.012 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$



Def. $1\text{atm} = 1.012 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

Def. $1\text{atm} = 760 \text{ torr} \iff$ pressione idrostatica di una colonna di mercurio alta 1mm. Usata dai medici per misurare la pressione arteriosa.



Nota: $\rho_{\text{Hg}} \sim 13.6 \text{ g/cm}^3$
 $\rho_{\text{H}_2\text{O}} \sim 1 \text{ g/cm}^3$

Principio di Archimede

Un corpo immerso totalmente o parzialmente in un fluido riceve, per effetto della gravità, una spinta **A (spinta di Archimede)** verticale e orientata verso l'alto, avete modulo pari alla forza peso attiva sulla massa fluida spostata ed il cui punto di applicazione coincide con il baricentro della massa fluida spostata

Un corpo immerso in un fluido in quiete, si sostituisce all'interno del fluido, ad una porzione di esso avente lo stesso contorno del corpo considerato.

Quindi:

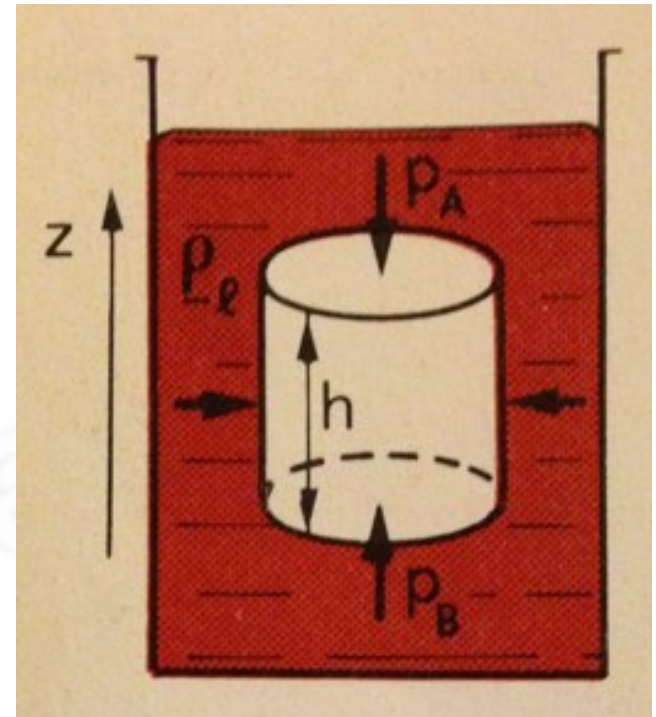
1) Volume fluido spostato = Volume corpo immerso

2) massa fluida spostata = $V \cdot \rho_{\text{fluido}}$

→ Spinta di Archimede: $A = g \cdot V \cdot \rho_{\text{fluido}}$

Principio di Archimede

Un corpo cilindrico di sezione S e altezza h , immerso in un fluido omogeneo di densità ρ_l . Troviamo la spinta di Archimede

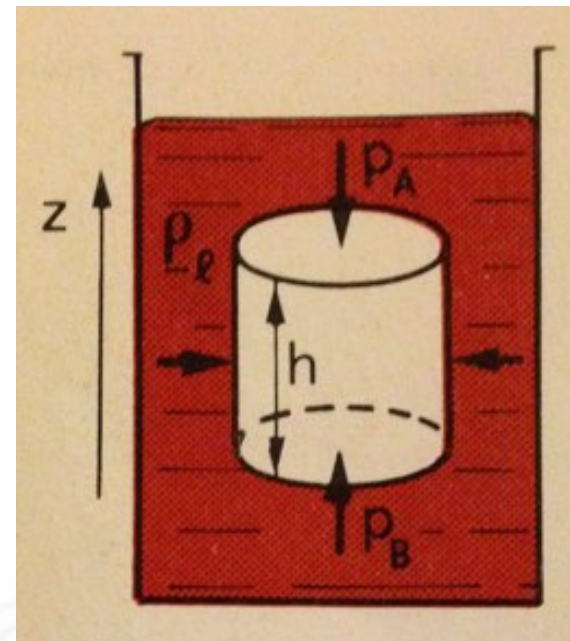


Calcolo delle forze agenti sul cilindro:

- 1) Sulla sup. superiore: $-p_A S$
- 2) Sulla sup. inferiore: $p_B = p_A + \rho_l g h$ (Stevino)
quindi la forza è: $S \cdot p_B = S \cdot (p_A + \rho_l g h)$

3) Sulle sup laterale la risultante delle forze è nulla:
Corpo incompressibile e in equilibrio (simmetria)

Principio di Archimede



Segue che la risultante di queste due forze è in modulo:

$$-p_A S + S \cdot p_B = -p_A S + S \cdot (p_A + \rho_l g h) = \rho_l g h S$$

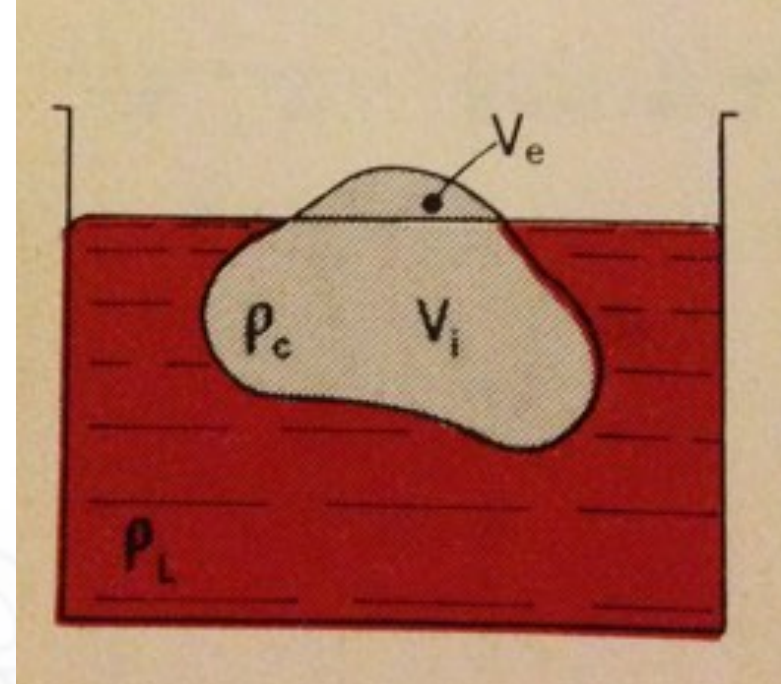
E cioè si ha: **$A = \rho_l g h S = m_l g$**

Cioè la spinta di Archimede è uguale alla forza peso agente su un volume di liquido pari al volume del corpo.

Principio di Archimede

Un corpo omogeneo $\rho_c = 0.9 \text{ g/cm}^3$ è immerso in acqua $\rho_L = 1 \text{ g/cm}^3$

Quale frazione del volume totale del corpo, all'equilibrio emerge dall'acqua) ?



Il testo domanda $\frac{V_e}{V_i + V_e}$

V_i : volume corpo immerso

V_e : volume corpo emergente

Analisi delle forze

Spinta Archimede: $A = \rho_L \cdot V_i \cdot g$

Forza peso del corpo complessivo: $F_p = m_c g = \rho_c \cdot (V_i + V_e) g$

All'equilibrio:

$$A = F_p \rightarrow \rho_L \cdot V_i \cdot g = \rho_c \cdot (V_i + V_e) g$$

$\rightarrow$

Principio di Archimede

$$\frac{V_i + V_e}{V_i} = \frac{\rho_L}{\rho_c}$$

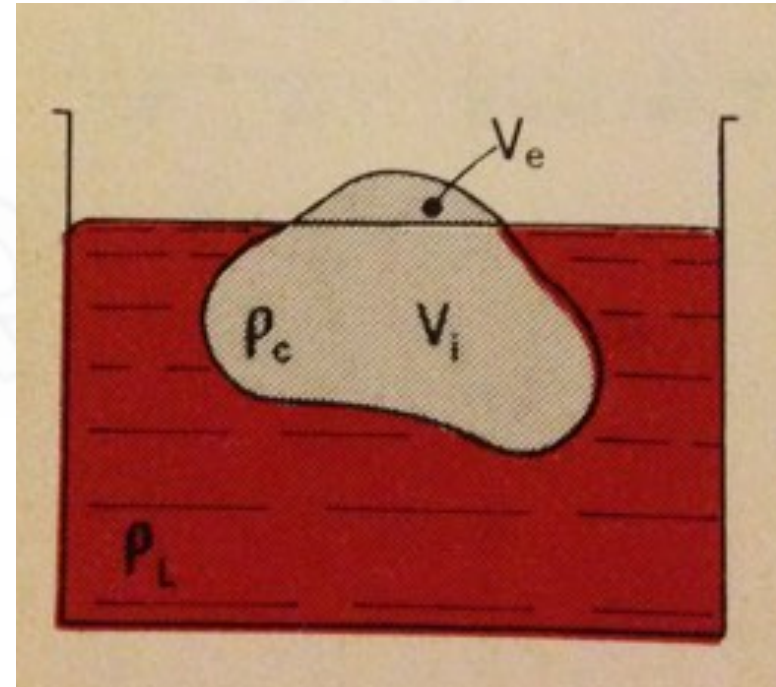
$$1 + \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L}{\rho_c} \Rightarrow \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L}{\rho_c} - 1 = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}$$

Il testo domanda $\frac{V_e}{V_i + V_e}$ conoscendo $\frac{V_e}{V_i}$

$$\Rightarrow \frac{V_e}{V_i + V_e} = \frac{V_e / V_i}{1 + \frac{V_e}{V_i}} = \frac{\frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}}{1 + \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_L}$$

$$\rightarrow \frac{V_e}{V_i + V_e} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_L} = 0.11 = 11\%$$

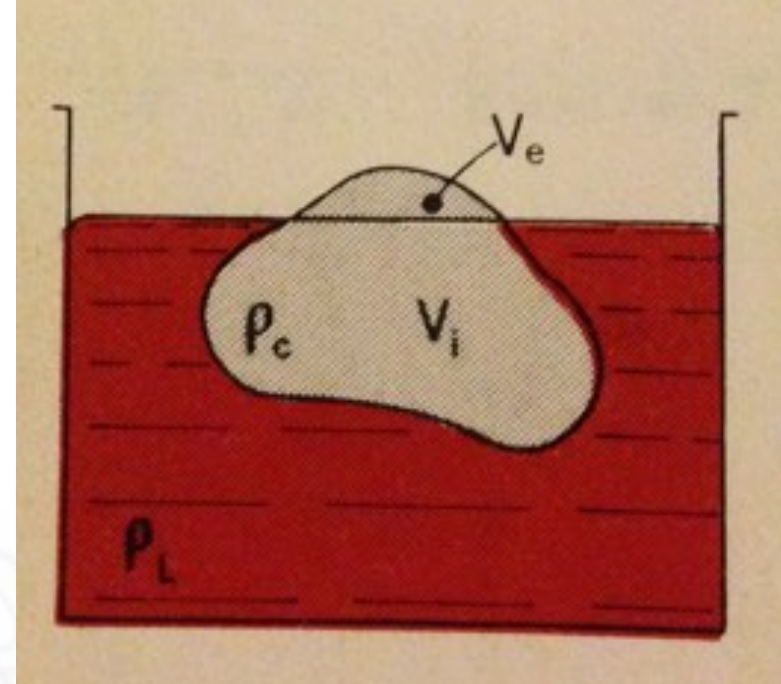
Il testo domanda $\frac{V_e}{V_i + V_e}$



Valori simili al caso in cui il corpo sia un iceberg

Principio di Archimede

Se forza Archimede < forza peso $\rightarrow$ corpo tende a cadere



Se forza Archimede = forza peso $\rightarrow$ situazione di equilibrio (le due densità sono uguali)

$\rightarrow$ Se il corpo era fermo rimane fermo

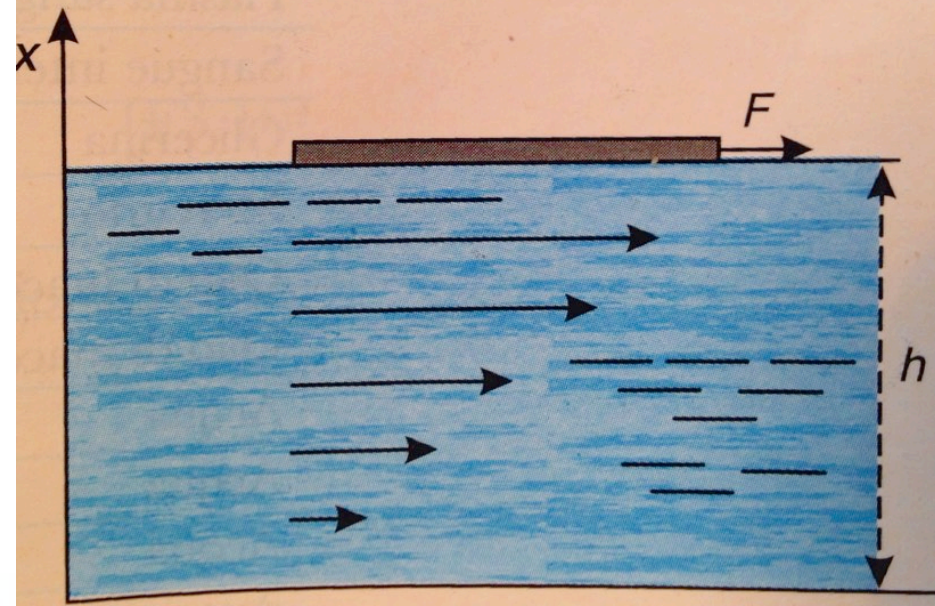
$\rightarrow$ Se il corpo era in moto si muoverà di moto decelerato a causa dell'attrito

Se forza Archimede > forza peso il corpo tende a risalire fino alla sup dove galleggia

Liquidi Viscosi

1) Una lastra di area ΔS è posata sulla superficie di un liquido ed è trascinata da una forza F .

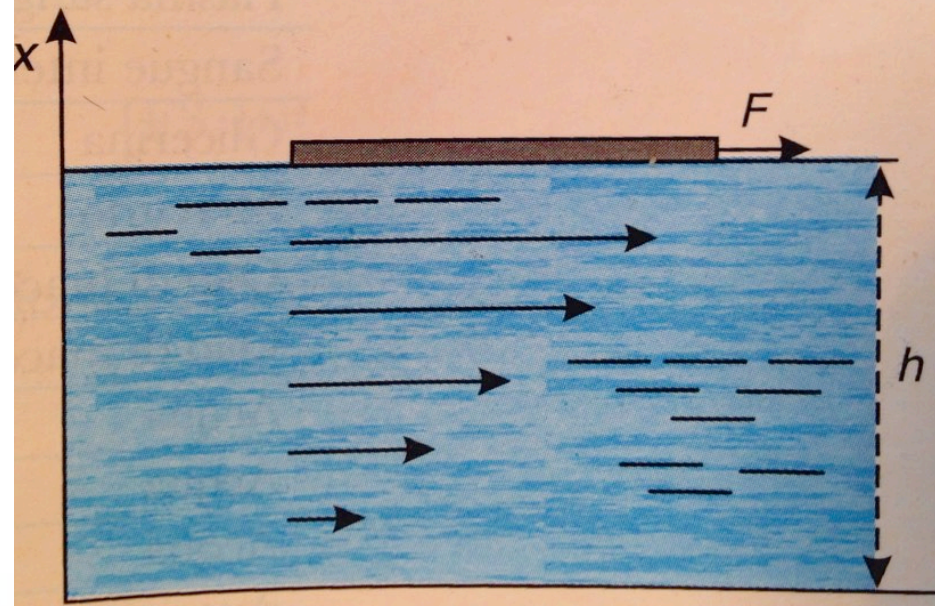
2) Passato un certo tempo e raggiunta una certa velocità " v " il moto della lastra diventa uniforme ($v=\text{costante}$)



➔ Significa che alla forza F se ne è opposta una che ha stesso modulo ma verso opposto (uguale e contraria). Questa forza si comporta come una forza di attrito.

Liquidi Viscosi

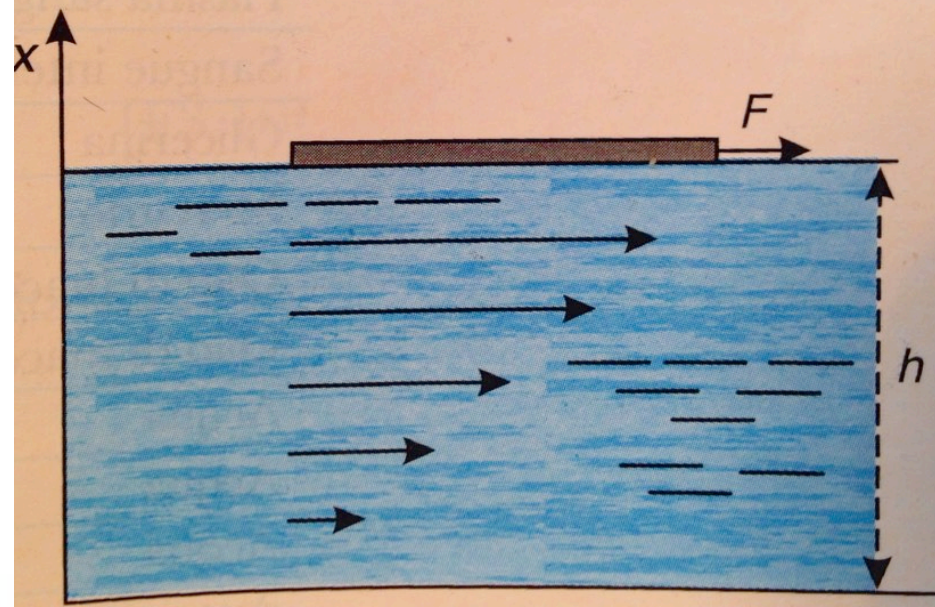
➔ Significa che alla forza F se ne è opposta una che ha stesso modulo ma verso opposto (uguale e contraria). Questa forza si comporta come una forza di attrito.



- 1) Non si tratta di attrito sulla sup della lastra: infatti lo strato di liquido a contatto con la lastra si muove anche lui con la stessa velocità della lastra.
- 2) Negli strati sottostanti il liquido non scorre liberamente: possiamo immaginare degli strati di acqua. Ciascun strato trasporta il liquido sottostante (lo strato sotto) con una velocità minore

➔ **Liquido a contatto con la base ha una velocità nulla; la velocità aumenta in modo continuo dal basso del recipiente fino alla superficie ad una altezza h dove si avrà la velocità della lastra.**

Liquidi Viscosi-Regime Laminare



➔ Liquido a contatto con la base ha una velocità nulla; la velocità aumenta in modo continuo dal basso del recipiente fino alla superficie ad una altezza h dove si avrà la velocità della lastra.

➔ Si può immaginare il moto del liquido come quello di tante lamine sottili che scorrono le una sulle altre incontrando una forza di attrito che si oppone alla scorrevolezza dell'una sull'altra.

Questo tipo di moto si chiama Regime Laminare (per velocità non troppo elevate)

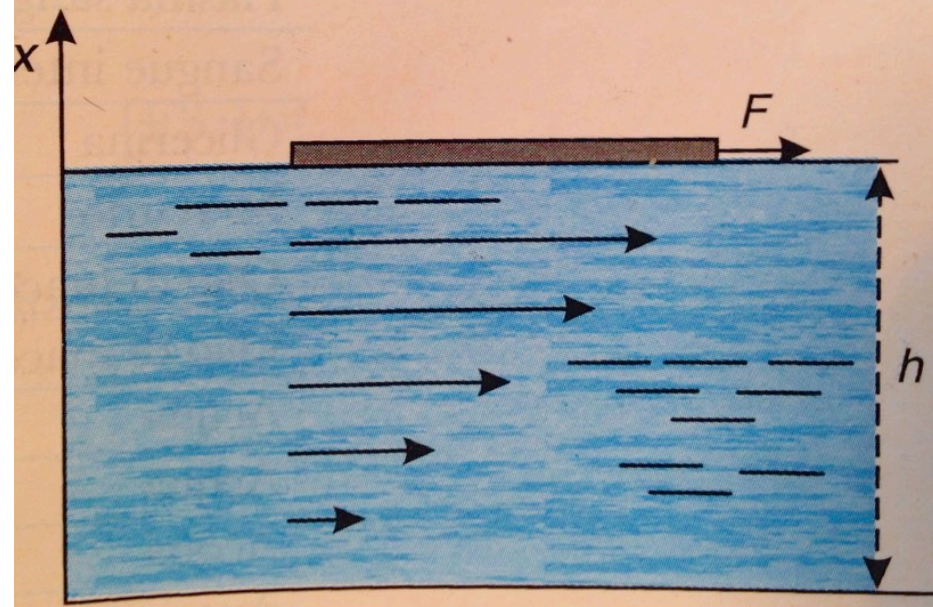
moto caratteristico dei liquidi viscosi.

Liquidi Viscosi-Regime Laminare

Si trova che la velocità varia al variare del liquido ed è:

$$u = \eta \frac{F \cdot h}{S}$$

Quindi la forza che si oppone è: $\Rightarrow F = \eta \cdot u \frac{S}{h}$



Coefficiente attrito Viscoso: η (oppure coeff. attrito interno)

$$[\eta] = [F] [L] / [L^2] [v]$$

S.I. $\rightarrow$ poiseuille : $1 \text{ Pl} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2 = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Coefficiente attrito Viscoso: $\eta \rightarrow$ è caratteristico del liquido;

per lo stesso liquido varia molto con la pressione e la temperatura:

Diminuisce rapidamente con la temperatura

Cresce con la pressione (eccetto che per l'acqua)

Liquidi Viscosi-Regime Laminare

$$u = \eta \frac{F \cdot h}{S}$$

$$\Rightarrow F = \eta \cdot u \frac{S}{h}$$

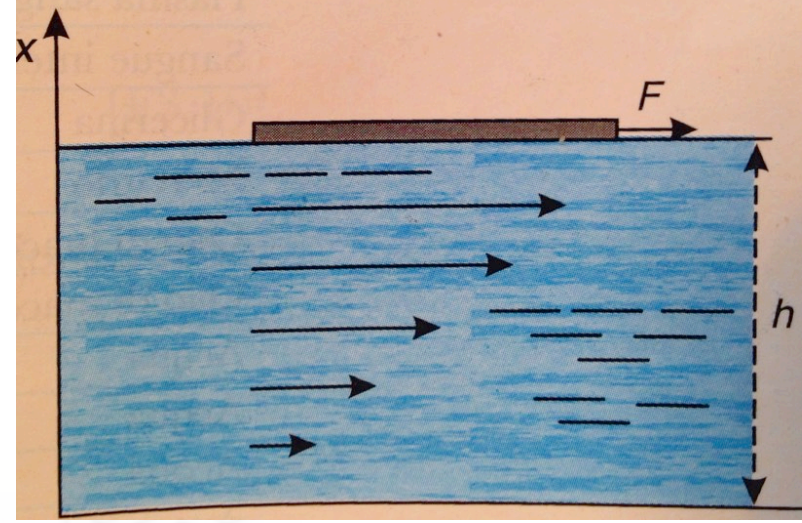
La viscosità del sangue dipende fortemente dalla temperatura e dalla pressione ma anche dalla composizione (numero di globuli rossi)

→ spesso la viscosità del sangue è rapportata a quella dell'acqua nelle medesime condizioni. Per una percentuale normale di globuli rossi la viscosità del sangue è 3-4 volte quella dell'acqua.

Liquidi Viscosi-Regime Laminare

$$u = \eta \frac{F \cdot h}{S}$$

$$\Rightarrow F = \eta \cdot u \frac{S}{h}$$

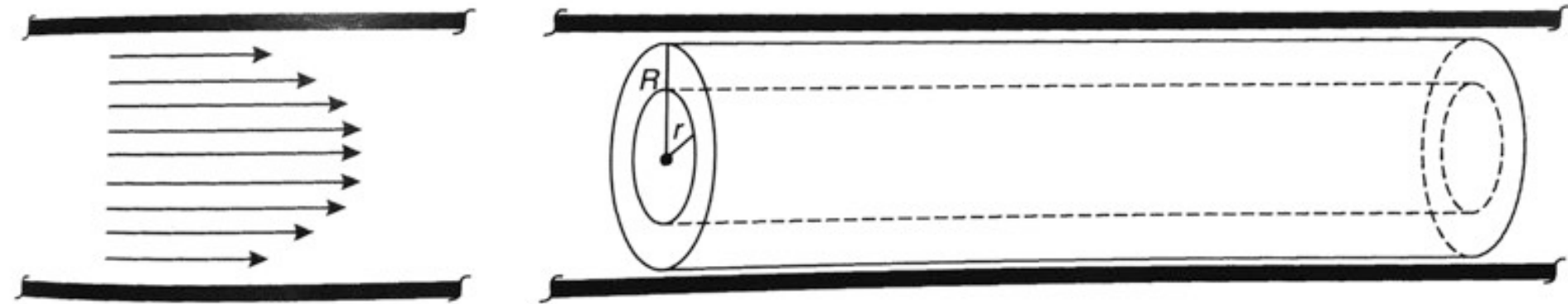


In questa espressione abbiamo assunto che la velocità vari linearmente con l'altezza. Questo non è sempre vero.

Liquidi Newtoniani: η è indipendente dallo stato di moto

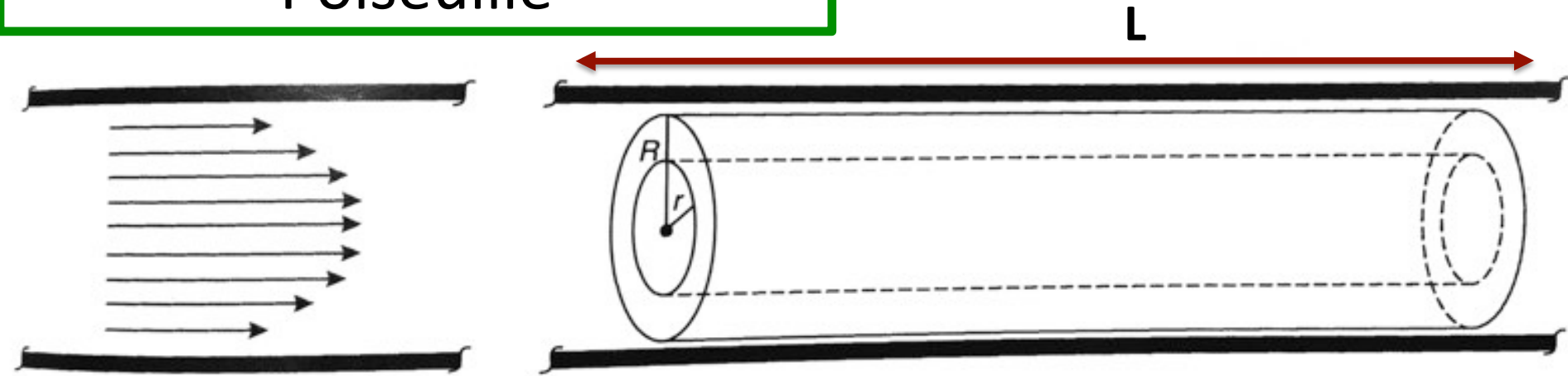
Fluido-Moto in Regime di Poiseuille

Fluido viscoso che scorre in un tubo orizzontale con sezione costante e pareti rigide con moto laminare e senza vortici



Le forze che agiscono sullo strato cilindrico preso in considerazione, sono forze di pressione (da destra e da sinistra) sulle facce esterne del tubo e forze di attrito sulle pareti laterali.

Fluido-Moto in Regime di Poiseuille



Si dimostra:

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

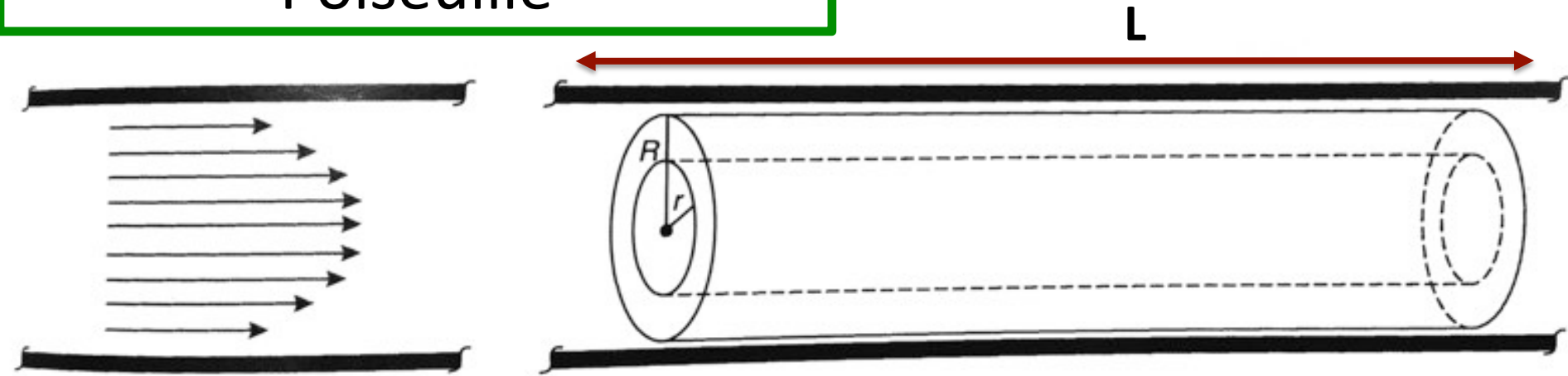
per $r = 0 \rightarrow u = u_{\max}$

per $r = R \rightarrow u = 0$

Differenza pressione
presente agli estremi
del tubo

$$u_{\max} = \frac{(p_1 - p_2) \cdot R^2}{4 \cdot \eta \cdot L}$$

Fluido-Moto in Regime di Poiseuille



Si dimostra:

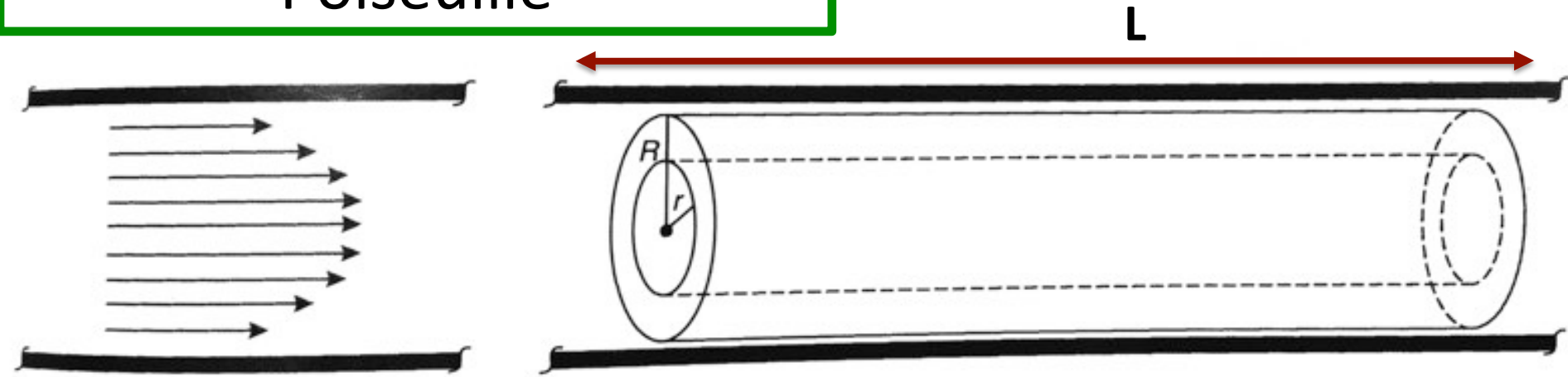
$$Q = \frac{\pi}{8} (p_1 - p_2) \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L}$$

Fattore geometrico dipendente dalle dimensioni del tubo.

Dipende fortemente da R infatti è R^4

➔ piccola variazione di R comporta una grande variazione di Q

Fluido-Moto in Regime di Poiseuille

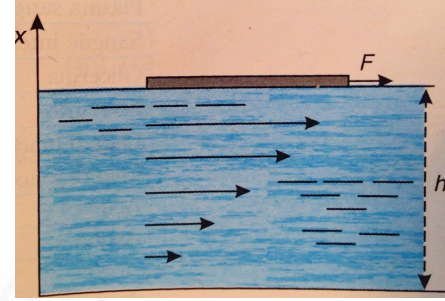


Essendo la portata $Q=S \cdot u$, e utilizzando la velocità media $\langle u \rangle$:

$$\begin{cases} Q = S \langle u \rangle = \pi R^2 \langle u \rangle \\ Q = \frac{\pi}{8} (p_1 - p_2) \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{8} (p_1 - p_2) \frac{1}{\eta} \frac{R^2}{L}$$

Liquidi Viscosi-Regime Laminare



Liquidi Newtoniani: η è indipendente dallo stato di moto (a basse velocità). → Regime Laminare, è silenzioso

→ Se la velocità aumenta fino ad una velocità critica u_c

Regime Idraulico o Macrovorticoso

Caratterizzato da vortici e da scambio di liquido tra la zona periferica e quella assiale. Il moto è turbolento. Rumoroso

$$u_c = \frac{R_c \eta}{R \rho}$$

R_c : numero di Reynolds.

Dipende dalla scabrosità e dalla pulizia delle pareti del tubo

Il valore di R_c per il quale si passa da un regime laminare ad uno turbolento si chiama Numero di Reynolds Critico

Resistenza di un condotto

Dalla legge di Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi}{8} (p_1 - p_2) \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L}$$

$$\Rightarrow (p_1 - p_2) = \Delta p = \frac{8}{\pi} \frac{L}{R^4} \eta \cdot Q$$

Si definisce resistenza di un condotto

$$R = \frac{|\Delta p|}{Q} = \frac{\text{variazione di pressione}}{\text{portata}}$$

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$


(Condotto cilindrico di lunghezza L e raggio r)

Quindi:

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{8}{\pi} \frac{L}{R^4} \eta \cdot Q = R \cdot Q$$

Resistenza di un condotto

Physics of the Human Body, Irving P. Herman, Springer.

Sappiamo quindi $\Rightarrow \Delta p = \frac{8}{\pi} \frac{L}{R^4} \eta \cdot Q = R \cdot Q$

Nota:

- 1) la differenza di pressione aumenta con la lunghezza del tubo.**
- 2) Aumenta fortemente con la sezione del tubo. + è stretto + aumenta**

Se prendo come riferimento un condotto con

$R=R_0=1\text{cm}$, $L=L_0=1\text{cm}$ e $\eta=0.004 \text{ Ns/m}^2$ (a $T=37^\circ$)

Ottengo:

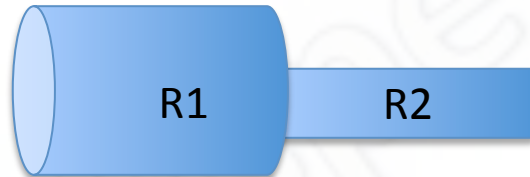
$$\Rightarrow \Delta p = R \cdot Q = R_0 Q = 7.7 \cdot 10^{-5} \text{ mmHg} \frac{L(\text{cm})}{r(\text{cm})^4} Q(\text{cm}^3 / \text{s})$$

Resistenza di un condotto

$$R = \frac{|\Delta p|}{Q}$$

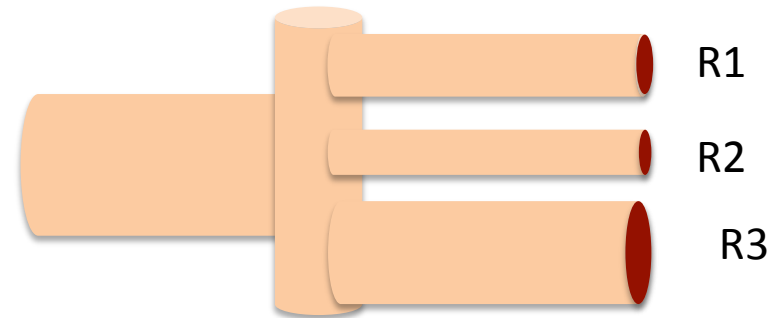
Se ho due o più condotte in serie, la resistenza totale è:

$$R_T = R_1 + R_2 + ..$$



Se ho delle condotte parallelo, la resistenza totale è:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ..$$



Resistenza di un condotto

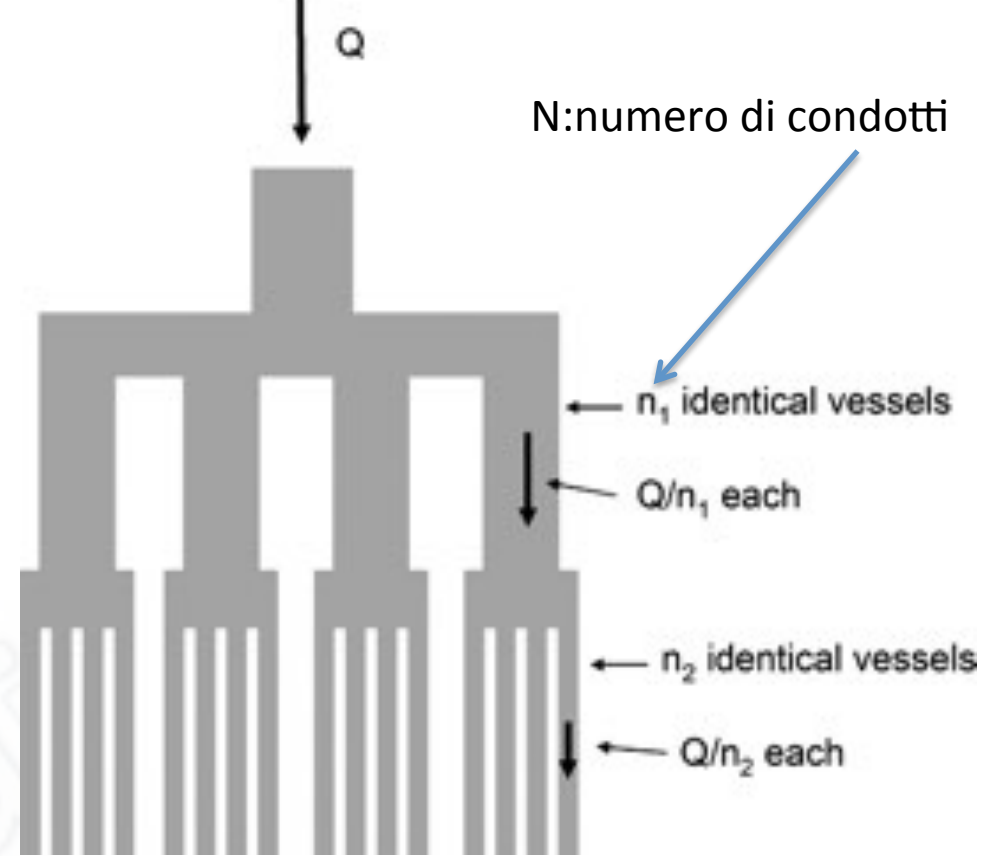
Physics of the Human Body, Irving P. Herman, Springer.
P 464

In questo caso sono in parallelo
→

$$Q_{tot} = 80 (cm^3 / s)$$

$$Q = Q_{tot} / n$$

$$\Rightarrow \Delta p = 7.7 \cdot 10^{-5} mmHg \frac{L(cm)}{r(cm)^4} \frac{Q}{n} (cm^3 / s) =$$



Aorta: $n=1$, $L=10cm$, $r=1.25cm \rightarrow \Delta p=0.025mmHg$

Arterie (larghe): $n=200$, $L=75cm$, $r=0.2cm \rightarrow \Delta p=1.4mmHg$

Arterie piccole (arteriole): $n=5000$, $L=0.6cm$, $r=30\mu m \rightarrow \Delta p=91mmHg$

Capillari: $n=10^{10}$, $L=0.2cm$, $r=3.5\mu m \rightarrow \Delta p=8.2mmHg$

Resistenza di un condotto

Arterie piccole (arteriole): $n=5000$, $L=0.6\text{cm}$, $r=30\mu\text{m} \rightarrow \Delta p=91\text{mmHg}$

Capillari: $n=10^{10}$, $L=0.2\text{cm}$, $r=3.5\mu\text{m} \rightarrow \Delta p=8.2\text{mmHg}$

Arteriole sono $n \sim 5000$

Capillari sono $n \sim 10^{10}$

Avendo tutte la stessa resistenza:

Arteriole R_a , capillari R_c si ottiene una resistenza totale per ciascun gruppo:

$$\frac{1}{Ra_T} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_a} + \dots = \frac{Na}{Ra} \Rightarrow Ra_T = \frac{Ra}{Na}$$

$$\frac{1}{Rc_T} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_c} + \dots = \frac{Nc}{Rc} \Rightarrow Rc_T = \frac{Rc}{Nc}$$

Resistenza di un condotto

Arterie piccole (arteriole): $n=5000$, $L=0.6\text{cm}$, $r=30\mu\text{m}$ $\rightarrow \Delta p=91\text{mmHg}$

Capillari: $n=10^{10}$, $L=0.2\text{cm}$, $r=3.5\mu\text{m}$ $\rightarrow \Delta p=8.2\text{mmHg}$

Avendo tutte la stessa resistenza: Arteriole R_a , capillari R_c si ottiene una resistenza totale per ciascun gruppo:

$$\frac{1}{Ra_T} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_a} + \dots = \frac{Na}{Ra} \Rightarrow Ra_T = \frac{Ra}{Na}$$

$$\frac{1}{Rc_T} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_c} + \dots = \frac{Nc}{Rc} \Rightarrow Rc_T = \frac{Rc}{Nc}$$

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

$\rightarrow R_a < R_c$ e in più $Na \ll Nc \rightarrow R_{Ta} > R_{Tc}$

Essendo $R = \frac{|\Delta p|}{Q}$. Ed essendo $Q = \text{cost} \rightarrow \Delta p_c < \Delta p_a$

Legge di Stokes

Consideriamo un corpo di forma sferica che si muove con velocità non troppo elevata in un fluido viscoso in quiete.

1) Al tempo $t=0$ il corpo è fermo.

2) Le sole forze agenti sono la forza peso $F_p = mg = 4\rho_{\text{corpo}}\pi R^3 g/3$
spinta Archimede: $A = 4\rho_{\text{fluido}}\pi R^3 g/3$

$$\begin{aligned} \text{Quindi: } F_{\text{tot}} = m \cdot a_0 &\rightarrow F_p + A = m \cdot a_0 \\ &\begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{corpo}}R^3g - \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{fluido}}R^3g = ma_0 \\ m = V \cdot \rho \end{cases} \\ \Rightarrow a_0 &= \frac{\rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}}}{\rho_{\text{corpo}}} g \end{aligned}$$

L'accelerazione a_0 fa acquistare velocità al corpo che quindi subisce un frenamento dovuto alla forza di attrito

Legge di Stokes

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho_{corpo}R^3g - \frac{4}{3}\pi\rho_{fluido}R^3g = ma_0 \\ m = V \cdot \rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{\rho_{corpo} - \rho_{fluido}}{\rho_{corpo}} g$$

L'accelerazione a_0 fa acquistare velocità al corpo che quindi subisce un frenamento dovuto alla forza di attrito F_u .

Si dimostra che $F_u = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot u$ **dipende dalla velocità**

Quando la forza di frenamento = forze attive ($F_p + \text{Archimede}$) il corpo non sarà più accelerato e avrà velocità costante

$$\frac{4}{3}\pi\rho_{corpo}R^3g - \frac{4}{3}\pi\rho_{fluido}R^3g = 6\pi\eta r \cdot u$$

$$\Rightarrow u_{limite} = \frac{2}{9}r^2g \cdot (\rho_{corpo} - \rho_{fluido}) \frac{1}{\eta}$$