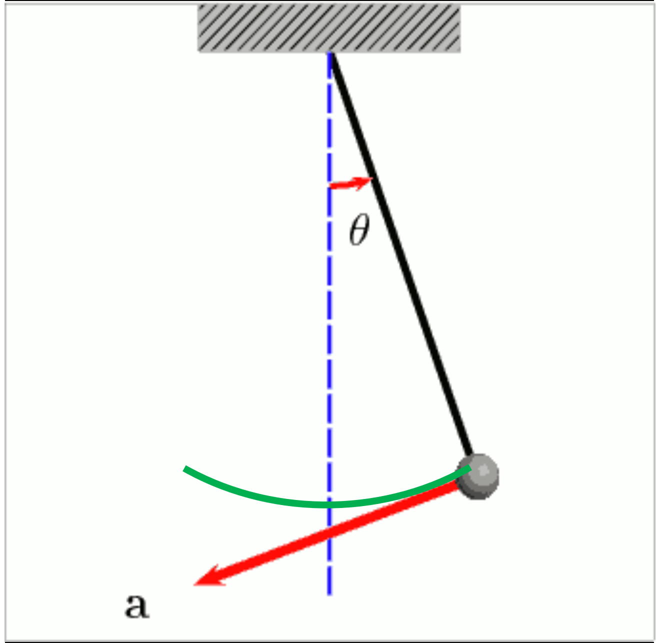
PRODIGIT **848497**

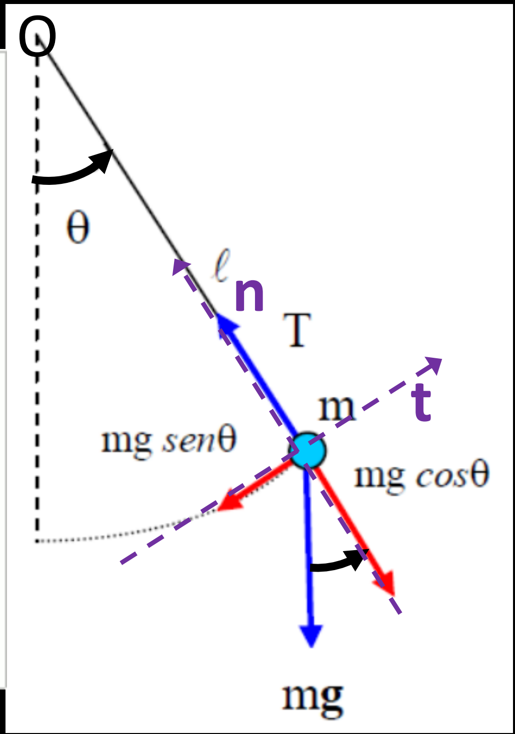
Fondamenti di fisica generale

RICEVIMENTO presenza/distanza: scrivere a adalberto.sciubba@uniroma1.it

Martedì 25 gennaio 2022
Aula Valdoni
11:00-13:00

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE – **PENDOLO** MATEMATICO (PENDOLO SEMPLICE)





$$-mg\sin\vartheta = m\,a_t = m\,l\,\alpha = m\,l\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

se ϑ «*piccolo*» $\rightarrow$ $\sin\vartheta \approx \vartheta$
$< 5° \approx 0{,}1$ rad

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \Omega^2\,u(t) = 0 \leftrightarrow u(t) \text{ armonica di periodo } T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

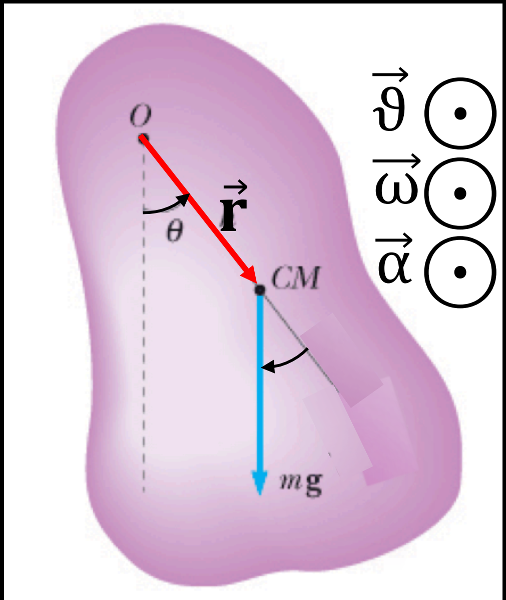
$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO – PENDOLO FISICO (PENDOLO COMPOSTO)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -\hat{k}\, r\, mg \sin\vartheta$$

$$\vec{M} = I\, \vec{\alpha} = I\, \hat{k}\, \frac{d\omega}{dt} = I\, \hat{k}\, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$



$\vec{\vartheta}$ ⊙
$\vec{\omega}$ ⊙
$\vec{\alpha}$ ⊙

⊙⊗???

$$-\hat{k}\, r\, mg \sin\vartheta = I\, \hat{k}\, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{r\, mg}{I} \sin\vartheta = 0$$

$\sin\vartheta \approx \vartheta$ per ϑ piccoli

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{r\, mg}{I}\, \vartheta = 0$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \Omega^2 \vartheta = 0 \qquad \Omega = \sqrt{\frac{rmg}{I}}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

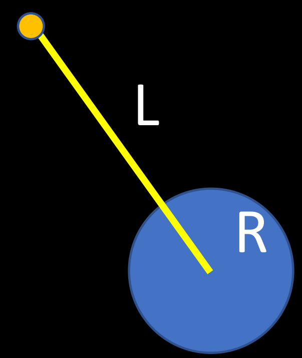
$$\omega(t) = \Omega \vartheta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\alpha(t) = -\Omega^2 \vartheta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rmg}}$$

Un pendolo è costituito da un'asta **leggera** lunga L libera di ruotare intorno a un perno orizzontale passante per una estremità.
L'altra estremità è fissata al centro di un disco omogeneo di raggio R giacente nel piano dell'oscillazione.
Determinare, per piccole oscillazioni, la pulsazione del moto.

$$\Omega = \sqrt{\frac{rmg}{I}} = \sqrt{\frac{L\,Mg}{M(\frac{1}{2}R^2 + L^2)}} = \sqrt{\frac{L\,g}{\frac{R^2}{2} + L^2}}$$



$$I = \tfrac{1}{2}\,M\,R^2 + M\,L^2$$

Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + m\,d^2$

MOTO DEL CORPO RIGIDO

CASI DI STUDIO

✓ **- TRASLAZIONE:** vedi moto del punto materiale

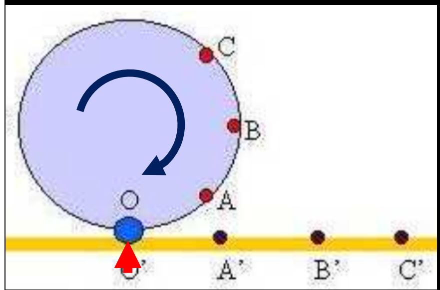
✓ - **ROTAZIONE**: ASSE FISSO (PULEGGIA; PENDOLO FISICO)

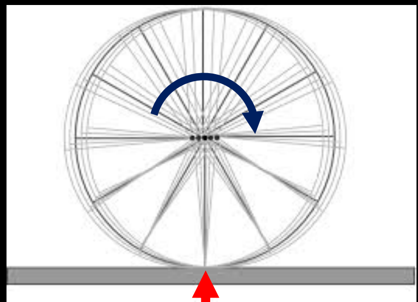
- **ROTOTRASLAZIONE:** ROTOLAMENTO SU PIANO (ORIZZONTALE, INCLINATO)

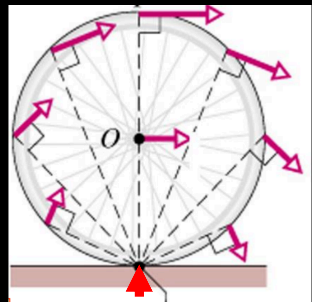
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO – ROTOLAMENTO (su piano orizzontale) CINEMATICA

rotolamento (puro): moto nel quale il corpo rotola senza strisciare

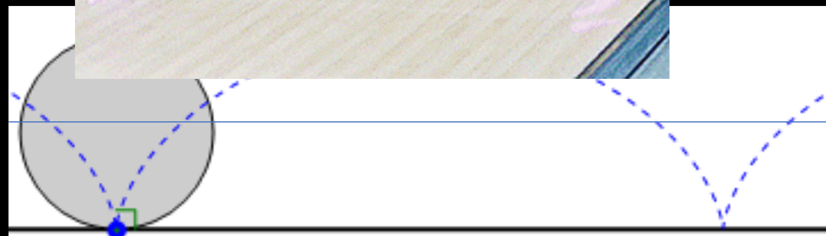
Nel punto di contatto non si ha spostamento relativo tra corpo e superficie di appoggio. Il corpo, quindi, ruota intorno al punto di contatto (asse istantaneo di rotazione): durante il **rotolamento**, tale punto è istante per istante fermo.

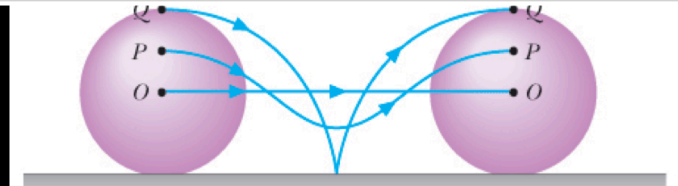




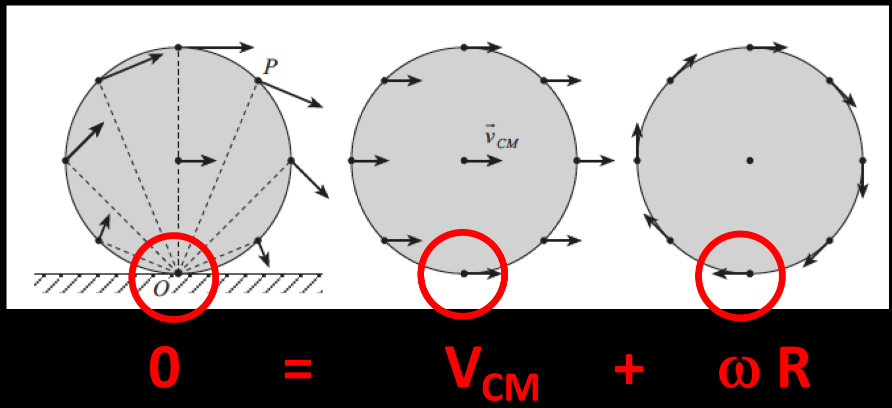


Durante il rotolamento a velocità costante, il CM trasla di moto rettilineo uniforme. Gli altri punti, che ruotano intorno al CM, descrivono una cicloide

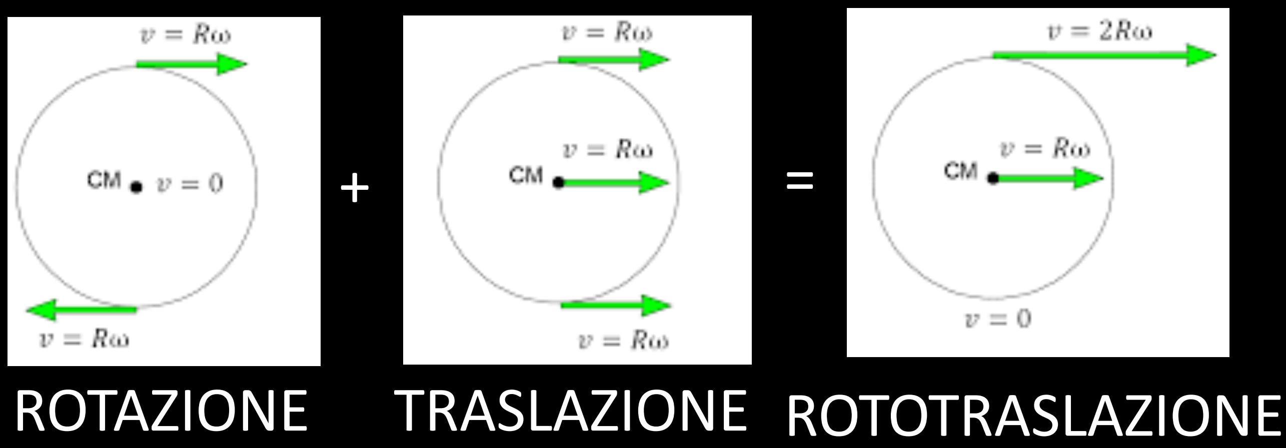




Il moto (rototraslatorio) può essere scomposto in una traslazione del CM (con velocità v) e in una rotazione del corpo intorno al CM (con velocità angolare ω).



In una ruota di raggio R in rotolamento puro la velocità v e la velocità angolare ω sono correlate: $v = \omega R$



Nel punto di contatto non si ha spostamento relativo tra corpo e superficie

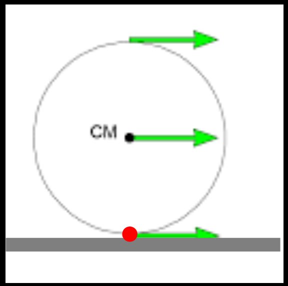
la velocità relativa corpo-superficie è nulla,

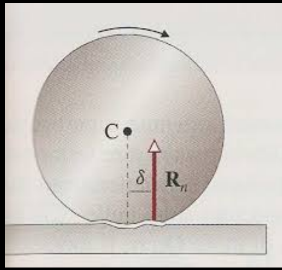
non c'è spostamento: l'attrito nel punto di contatto è di tipo statico

la forza d'attrito non compie lavoro,

non c'è dissipazione di energia!!!

Nel rotolamento puro non c'è strisciamento, l'attrito statico non dissipa energia.
In un moto traslatorio puro l'attrito è dinamico, si dissipa energia e il corpo si ferma.

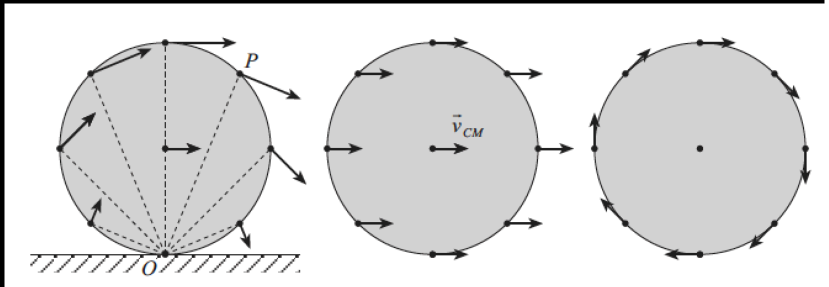




In realtà la piccola deformazione del corpo e della superficie non perfettamente rigidi producono una piccola dissipazione (attrito volvente di un corpo che rotola)

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO – ROTOLAMENTO

ROTOLAMENTO PURO: $v_{CM} = \omega R \rightarrow a_{CM} = \alpha R$



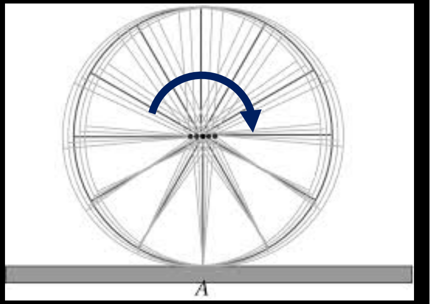
KÖNIG: $E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

HUYGENS-STEINER: $I = I_{CM} + m d^2$

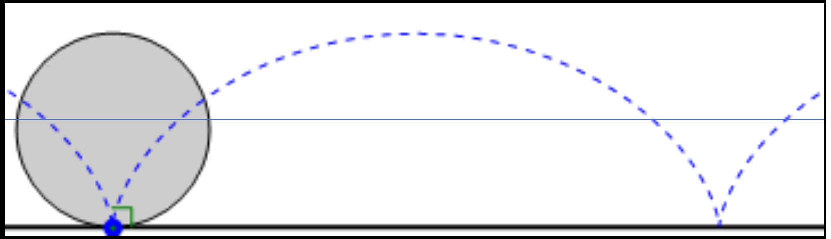
Consideriamo un corpo di massa m con simmetria circolare (anello, disco, cilindro pieno o cavo, sfera piena o cava) con momento d'inerzia I_{CM} per una rotazione intorno all'asse passante per il CM

Considerando il moto rototraslatorio si ha $E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

$= \frac{1}{2} m (\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} (m R^2 + I_{CM}) \omega^2$



Considerando il moto rotatorio intorno all'asse istantaneo di rotazione si ha $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (m R^2 + I_{CM}) \omega^2$



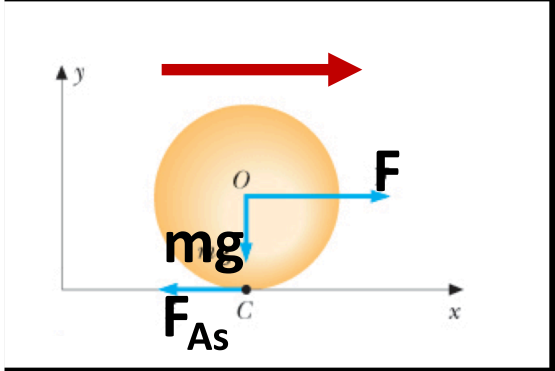
Un disco omogeneo di massa M = 1 kg ruota senza strisciare lungo un piano orizzontale scabro.

Sapendo che in un tempo $\Delta t = 2$ s il disco compie N = 10 giri e percorre una distanza d = 20 m determinarne il raggio e l'energia cinetica.

$d = N\,c \rightarrow 20\text{ m} = 10 \times (2\pi R) \rightarrow R = 1/\pi = 0{,}318\text{ m}$

$v_{CM} = d/t = 20\text{ m}/2\text{ s} = 10\text{ m/s}$

$Ec = \frac{1}{2} m\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 = \frac{1}{2} m\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} mR^2)\omega^2 = \frac{3}{4} m\, v_{CM}^2 = 76\text{ J}$



Se una forza F viene applicata al CM, ma l'attrito resta statico, si ha ancora rotolamento puro.
Se invece la forza F è eccessiva si ha slittamento e quindi dissipazione di energia.

Qual è la massima forza F che si può applicare senza produrre slittamento?

risultante delle forze: $F - F_{As} = m\,a$ (ora il CM accelera!)

Senza slittamento si ha:

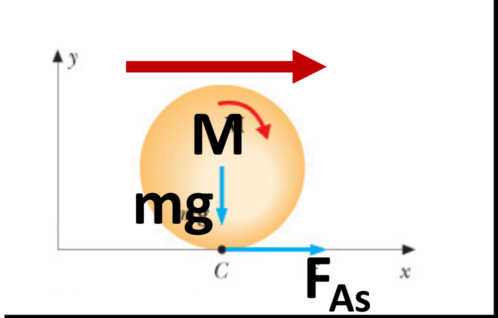
momento rispetto al CM: $r\,F_{As} = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,a/r \rightarrow F_{As} = I_{CM}\,a/r^2 \rightarrow a = F_{As}\,r^2/I_{CM}$

$$F - F_{As} = m\,a = m\,F_{As}\,r^2/I_{CM} \rightarrow F = F_{As}(1 + m\,r^2/I_{CM})$$

Affinché non ci sia slittamento la forza massima è pari a $F_{MAX} = F_{AsMAX}(1 + m\,r^2/I_{CM})$

slittamento se $F > F_{MAX} = 3\,\mu_s\,mg$ (disco)

slittamento se $F > F_{MAX} = 2\,\mu_s\,mg$ (anello)



Se un momento meccanico M (coppia motrice) viene applicato all'asse del corpo si ha ancora rotolamento puro finché l'attrito resta statico.

Per una coppia M eccessiva si ha slittamento.

risultante delle forze: $F_{As} = m\,a$ (è la forza di attrito che fa avanzare la ruota!)

Senza slittamento si ha:

momento rispetto all'asse di rotazione C: $M = I\,\alpha = I\,a/r \rightarrow a = Mr/I$

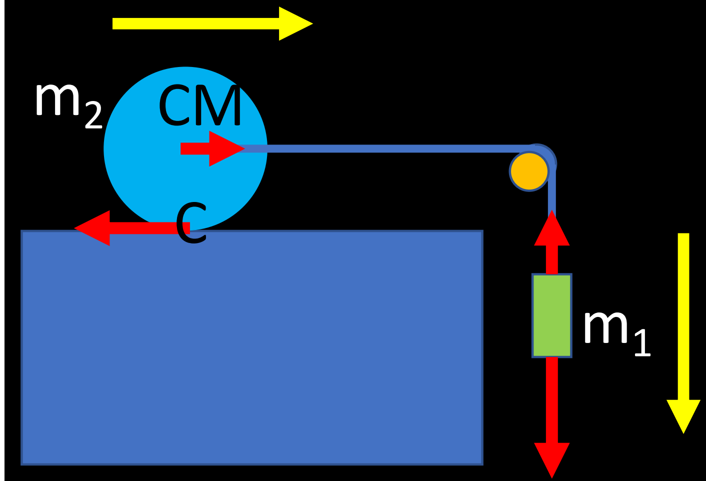
$$F_{As} = m\,a = m\,Mr/I \;\rightarrow\; M = I\,F_{As}/mr$$

Affinché non ci sia slittamento il massimo momento è pari a $M_{MAX} = I\,F_{AsMAX}/mr$

slittamento se $M > M_{MAX} = (1/2+1)\,mr^2\,\mu_s\,mg/mr = 3/2\,\mu_s\,mgr$ (disco)

slittamento se $M > M_{MAX} = (1+1)\,mr^2\,\mu_s\,mg/mr = 2\,\mu_s\,mgr$ (anello)

Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + m\,d^2$



Un cilindro omogeneo di massa m_2 e raggio r rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale tirato, tramite una fune ideale, da una massa m_1 che scende verticalmente.
Determinare l'accelerazione della massa m_1

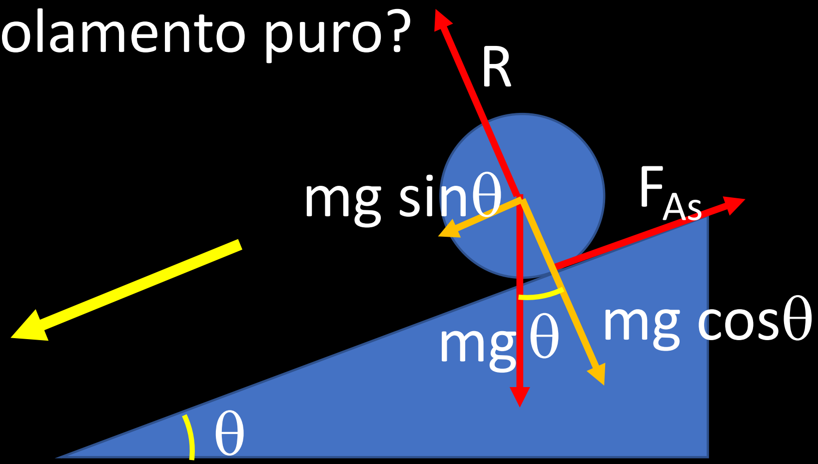
F_{TOT}: $m_1\, g - F = m_1\, a \rightarrow F = m_1\, g - m_1\, a$

M_C: $r\, F = I\, \alpha = (\frac{1}{2}\, m_2\, r^2 + m_2\, r^2)\, a/r \rightarrow F = I\, a/r^2 = (3/2\, m_2\, r^2)\, a/r^2 = 3/2\, m_2\, a$

$F = m_1\, g - m_1\, a = 3/2\, m_2\, a \rightarrow a = m_1\, g/(m_1 + 3/2\, m_2)$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO - ROTOLAMENTO **PIANO INCLINATO**

Un cilindro omogeneo di massa m e raggio r rotola lungo un piano inclinato.
Qual è la massima inclinazione del piano oltre la quale il moto non è più di rotolamento puro?



risultante delle forze: $mg \sin\theta - F_{As} = m a$

$\rightarrow F_{As} = mg \sin\theta - m a$

momento rispetto al CM: $r F_{As} = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\, a/r$

$r (mg \sin\theta - m a) = I_{CM}\, a/r$

$\rightarrow r\, mg \sin\theta - r\, m\, a = I_{CM}\, a/r$

$r\, mg \sin\theta = a (r\, m + I_{CM}/r) \rightarrow g \sin\theta = a (1 + I_{CM}/mr^2)$

$a = g \sin\theta/(1 + I_{CM}/mr^2)$

se disco o cilindro pieno $I_{CM} = ½\, mr^2$

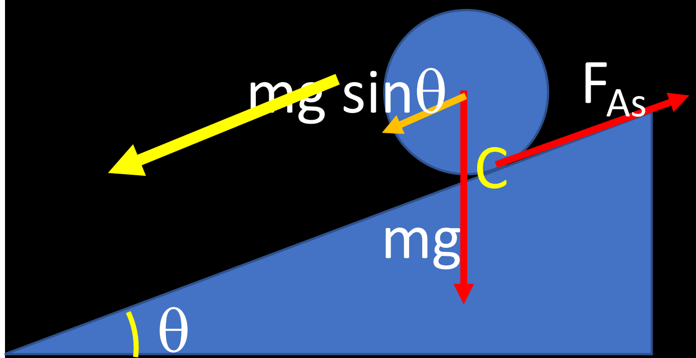
$\rightarrow a = g \sin\theta/(1 + I_{CM}/mr^2) = g \sin\theta/(1 + 1/2) = 2/3\, g \sin\theta$

momento rispetto al CM: $r F_{As} = I_{CM}\, a/r = ½\, mr^2\, a/r$

$\rightarrow F_{As} = ½\, m\, a = ½\, m\, 2/3\, g \sin\theta = 1/3\, mg \sin\theta \leq F_{AsMAX} = \mu_s\, mg \cos\theta$

$\rightarrow 1/3 \sin\theta \leq \mu_s \cos\theta \rightarrow tg\theta \leq tg\theta_{MAX} = 3\,\mu_s$

Un cilindro omogeneo di peso p = 60 N rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di 30°.
Quanto vale la forza di attrito statico?



$$F_{TOT}: m\,g\,\sin\theta - F_{As} = m\,a \rightarrow F_{As} = m\,g\,\sin\theta - m\,a$$

$$M_C: r\,m\,g\,\sin\theta = I\,a/r \rightarrow a = mr^2\,g\,\sin\theta/I$$

$$F_{As} = m\,g\,\sin\theta - m\,(mr^2\,g\,\sin\theta/I) = m\,g\,\sin\theta\,(1-mr^2/I)$$

$$= m\,g\,\sin\theta\,[1-mr^2/(3/2mr^2)] = 1/3\,m\,g\,\sin\theta = 10\text{ N}$$

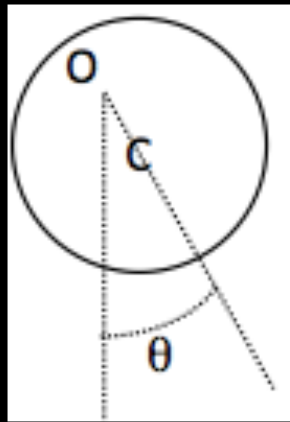
Fondamenti di fisica generale

IL CORSO E' TERMINATO,
ORA INIZIA/CONTINUA
LO **STUDIO** ...

RICEVIMENTO IN PRESENZA/ DISTANZA:
scrivere a **adalberto.sciubba@uniroma1.it**

https://www.sbai.uniroma1.it/sciubba-adalberto/fondamenti-di-fisica-generale/2021-2022

Un disco omogeneo di massa M e raggio R è libero di muoversi nel piano verticale ruotando intorno ad un perno orizzontale privo di attrito passante per il punto O distante R/2 dal centro C del disco. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni.



$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{rmg}}$$

$I = ½\ MR^2 + M(R/2)^2 = ¾\ MR^2$

Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + m\,d^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}MR^2}{\frac{R}{2}Mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{8g}} = \pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

Un cilindro omogeneo di raggio R = 1 cm e altezza h = 10 cm rotola senza strisciare su un piano scabro. Il cilindro è costituito da un materiale omogeneo di densità $\rho = 4 \times 10^3 kg/m^3$.

Determinare il momento d'inerzia del cilindro calcolato rispetto all'asse istantaneo di rotazione.

$$I = I_{CM} + m R^2 = ½ \, m R^2 + m R^2 = 3/2 \, m R^2$$

$$m = \rho \, \pi R^2 \, h = 4 \times 10^3 kg/m^3 \, \pi \, 10^{-4} m^2 \, 0,1 \, m = 4\pi \times 10^{-2} \, kg$$

$$I = 3/2 \, 4\pi \times 10^{-2} \, kg \;\; 10^{-4} m^2 = \; 6 \, \pi \, 10^{-6} \, kg \, m^2$$