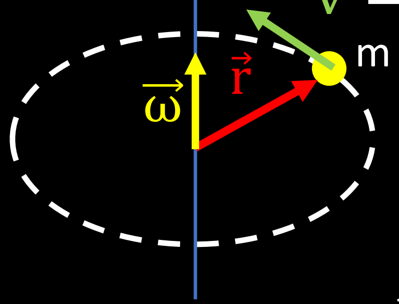
Fondamenti di fisica generale

Lunedì 12 dicembre 2022
meet/**ett-wttu-agt**
SINCRONA 15:00-16:30

ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO
IL MOMENTO D'INERZIA

ROTAZIONE: Il MOMENTO D'INERZIA

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

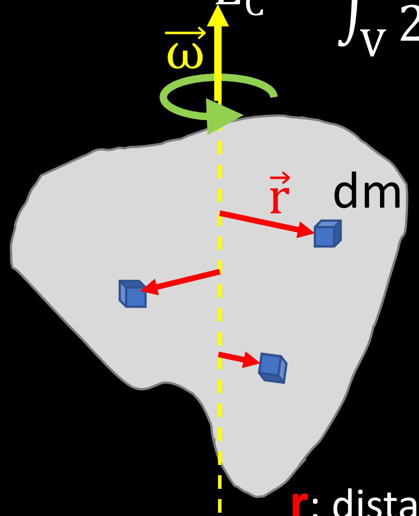


rotazione di un punto materiale intorno a un asse

$$I = m\,r^2 \quad \text{momento d'inerzia} \qquad \text{kg m}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad = \frac{1}{2}\,m\,(\omega\,r)^2 \quad = \frac{1}{2}\,(m\,r^2)\,\omega^2 \quad = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

$$E_C = \int_V \frac{1}{2}\,dm\,v^2 = \frac{1}{2}\int_V dm(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\left[\int_V r^2 dm\right]\omega^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$



$$I = \int_V r^2 dm \;=\; \int_V r^2 \rho\, dV$$

rotazione di un corpo rigido intorno a un asse

r: distanza dall'asse di rotazione

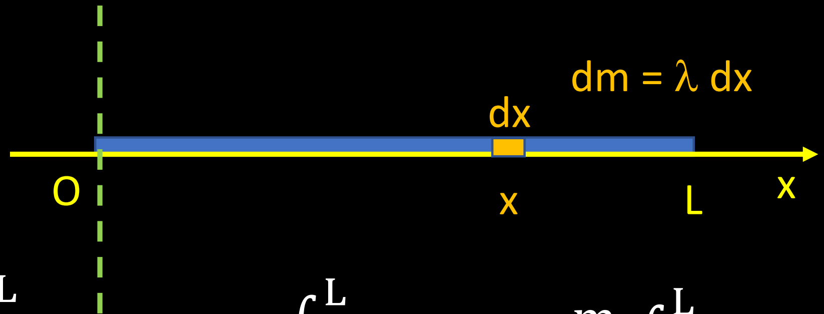
ESEMPIO DI CALCOLO DEL MOMENTO D'INERZIA

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

$\lambda = dm/dL = m/L$

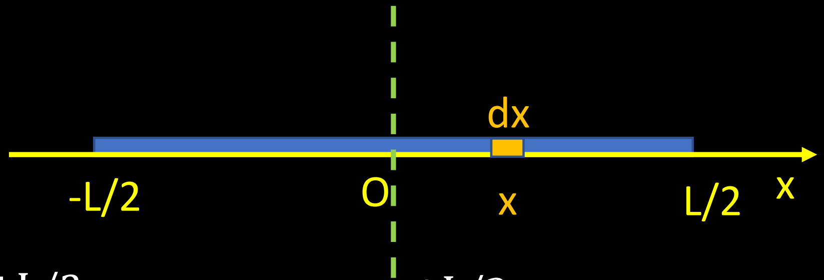
omogenea

rotazione di una sbarra omogenea intorno a un asse per una estremità



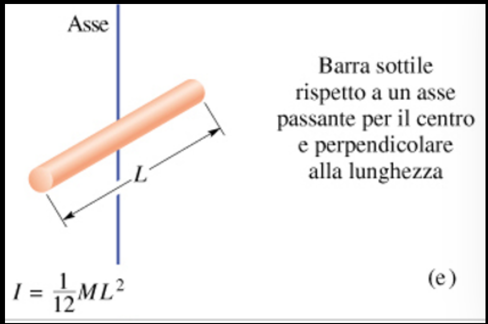
$$I = \int_V r^2 dm \rightarrow I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2\, dx = \frac{m}{L} \int_0^L x^2\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{L^3}{3} - \frac{0}{3}\right] = m\frac{L^2}{3}$$

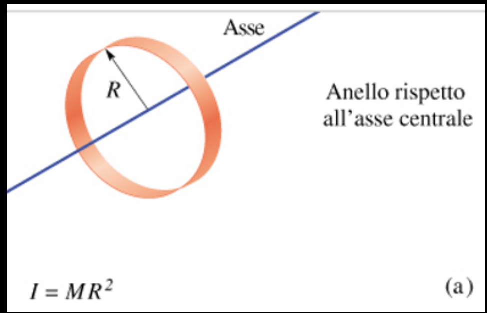
rotazione di una sbarra omogenea intorno a un asse per il centro di massa

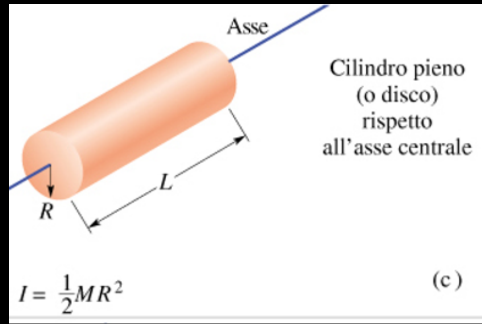


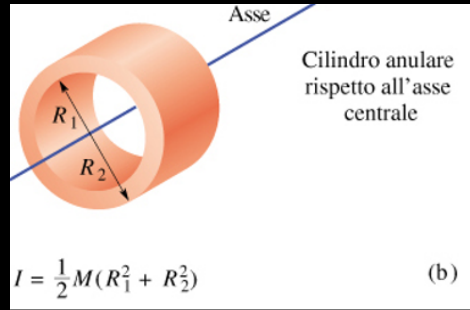
$$I = \int_V r^2 dm \rightarrow I = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda dx = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}\right] = m\frac{L^2}{12}$$

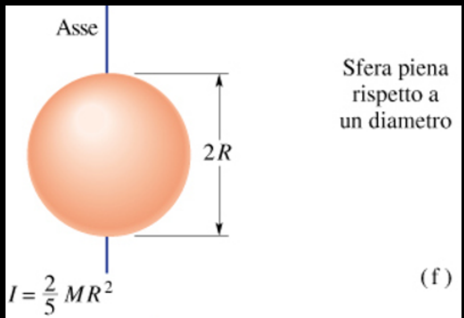
MOMENTO D'INERZIA

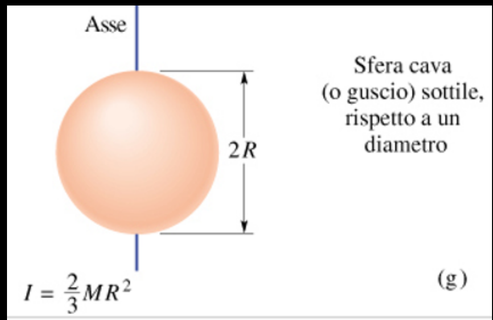


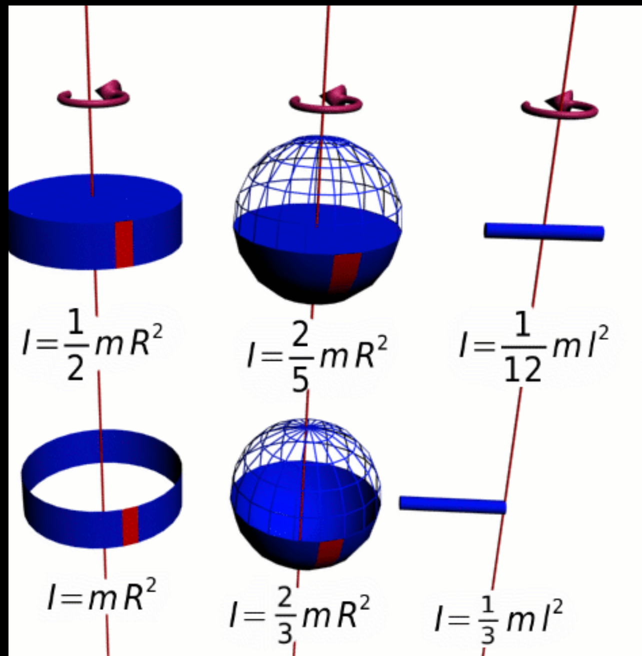






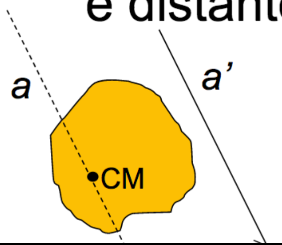






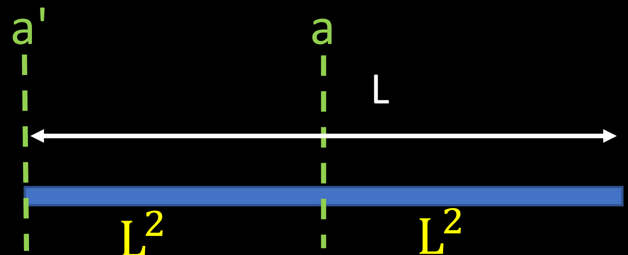
ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO

- Detto *I* il momento d'inerzia di un corpo di massa *m*, rispetto ad un asse *a* passante per il CM, il momento d'inerzia rispetto ad un asse *a'* parallelo al primo e distante *d* da questo e`



$$I' = I + md^2$$

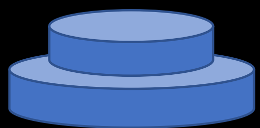
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER



$$I' = m\frac{L^2}{3} \qquad I = m\frac{L^2}{12}$$

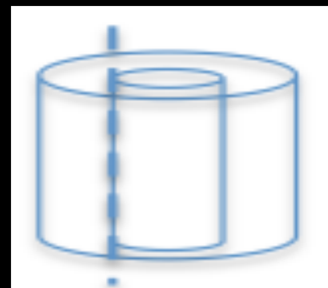
$$I' = m\frac{L^2}{12} + m\left[\frac{L}{2}\right]^2 = mL^2\frac{1+3}{12} = m\frac{L^2}{3}$$

1) Una puleggia è costituita da due dischi omogenei coassiali solidamente uniti fra loro. Il disco maggiore ha raggio R = 4 cm; il minore ha raggio r = 3 cm; entrambi i dischi hanno massa 40 g. Determinare il momento d'inerzia della puleggia calcolato rispetto all'asse baricentrale e rispetto ad un asse passante a 3 cm dal centro. [I_{CM} = 500 gcm^2; I_a = 1220 gcm^2]



2) Determinare il momento d'inerzia di un cilindro cavo (raggio interno R_1; raggio esterno R_2, massa M) rispetto a un asse parallelo a quello baricentrale distante R_1 da esso

[$I = ½ M(3R_1^2 + R_2^2)$]



MECCANICA DEL CORPO RIGIDO

Il moto complessivo del corpo rigido è determinato dall'azione delle forze caratterizzate da: una risultante $\vec{F}$ e da un momento risultante $\vec{M}$.

La risultante delle forze $\vec{F}$ accelera il centro di massa: $\boxed{\vec{F} = m_{TOT}\ \overrightarrow{a_{CM}}}$

m_{TOT} <-> inerzia alla traslazione

Si potrebbe dimostrare che la risultante dei momenti $\vec{M}$ (prendendo come polo un punto fisso o il CM) produce, intorno a tale punto, una rotazione con accelerazione angolare $\vec{\alpha}$: $\boxed{\vec{M} = I\ \vec{\alpha}}$

I <-> inerzia alla rotazione

STATICA

L'equilibrio statico richiede che non ci siano né traslazioni, né rotazioni.

Pertanto, come già noto, devono risultare contemporaneamente $\vec{F} = 0$ e $\vec{M} = 0$ e…

$\boxed{\overrightarrow{v_{CM_0}} = 0}$ $\boxed{\overrightarrow{\omega_0} = 0}$

L'azione di un momento meccanico $\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$ fa variare la velocità angolare $\vec{\omega}$ di un corpo dal valore iniziale $\overrightarrow{\omega_{IN}}$ a quello finale

$$\overrightarrow{\omega_{FIN}} = \overrightarrow{\omega_{IN}} + \int_0^t \vec{\alpha}\,dt = \overrightarrow{\omega_{IN}} + \int_0^t \vec{M}/I\,dt$$

Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro compiuto L è pari alla variazione dell'energia cinetica E_c

$$L = E_{c\,FIN} - E_{c\,IN} = \frac{1}{2} I\,\omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_{IN}^2 = \frac{1}{2} I[\omega_{FIN}^2 - \omega_{IN}^2]$$

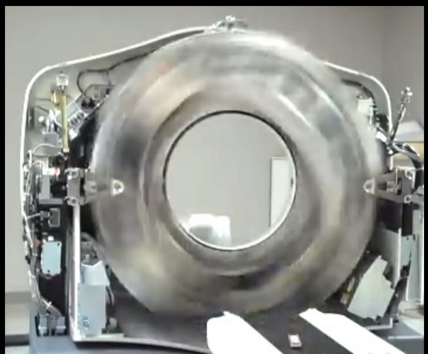
e la potenza P è pari alla sua derivata temporale:

$$P = \frac{dE_c}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} I\,\omega^2\right)}{dt} = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I\,\frac{d\omega^2}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} I\,2\omega\,\alpha = I\,\alpha\,\omega = M\,\omega$$

se M costante

$$L = \int_o^t P\,dt = \int_0^t M\omega\,dt = \int_0^t M\frac{d\vartheta}{dt}\,dt = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} M\,d\vartheta = M(\vartheta - \vartheta_0)$$

L'apparato rotante di un tomografo a raggi X può essere schematizzato come un anello omogeneo di diametro interno 80 cm, diametro esterno 1,4 m e massa 800 kg.
Quanto lavoro deve compiere il motore per portarlo da fermo alla massima velocità di rotazione che è 3 giri/s?



$$I = \tfrac{1}{2} M (R_1^2+R_2^2) = \tfrac{1}{2}\, 800\, (0{,}4^2 + 0{,}7^2) = 260 \text{ kg m}^2$$

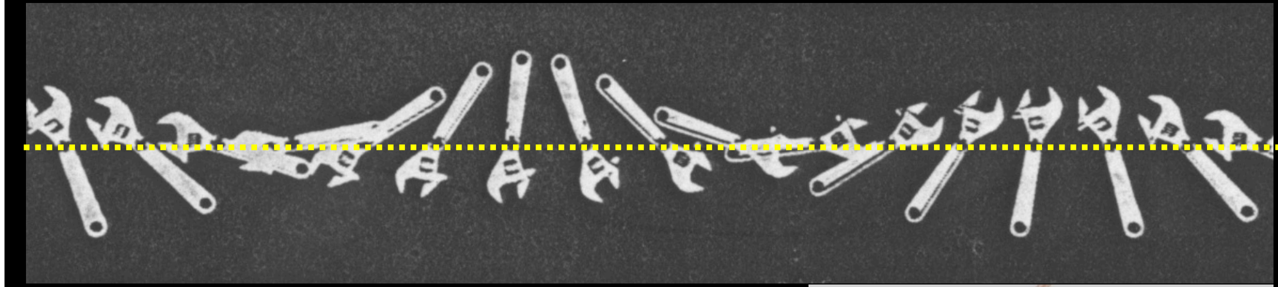
$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2} I[\omega_{FIN}{}^2 - \omega_{IN}{}^2] = \frac{1}{2} I\, [(3 \cdot 2\pi)^2 - 0] = 46{,}2 \text{ kJ}$$

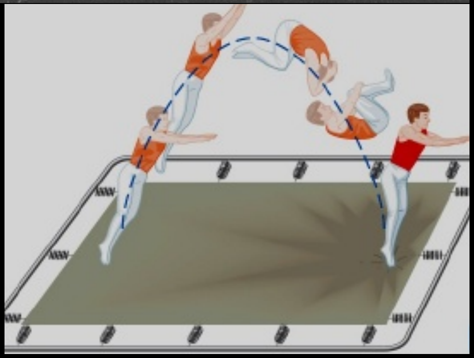
MOTO DEL CORPO RIGIDO

MOTO DEL CORPO RIGIDO

Il moto di un corpo rigido può essere scomposto in quello del centro di massa **(traslazione)** e in quello dei punti del corpo nel sistema del centro di massa. Poiché in un corpo rigido la distanza dei punti dal centro di massa non cambia, il moto di questi punti è circolare **(rotazione)**.

Rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo di un corpo rigido è la somma di una traslazione infinitesima con velocità $\vec{v}$ e una rotazione infinitesima con velocità $\vec{\omega}$





CM in moto rettilineo uniforme

rotazione intorno al CM

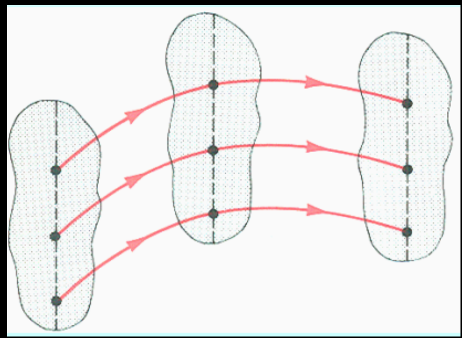
CM in moto parabolico

MECCANICA DEL CORPO RIGIDO

ENERGIA CINETICA NELLA TRASLAZIONE

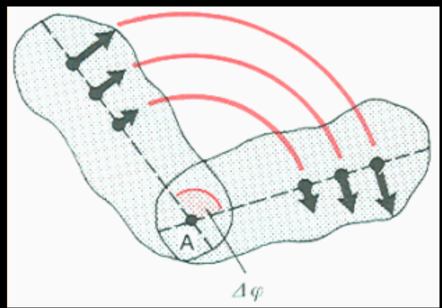
ENERGIA CINETICA NELLA ROTAZIONE

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{m} \qquad \vec{F} = m_{TOT}\, \overrightarrow{a_{CM}}$$



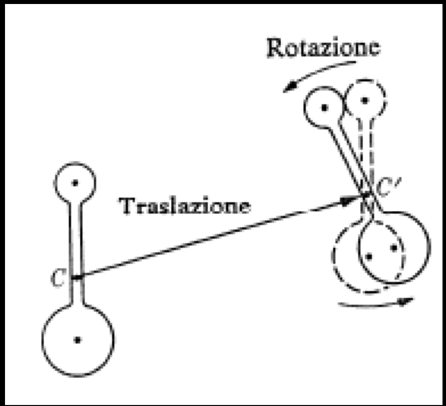
$$E_c = \tfrac{1}{2}\, m_{TOT}\, v_{CM}^2$$

$$I = \int_V r^2 dm \qquad \vec{M} = I\, \vec{\alpha}$$



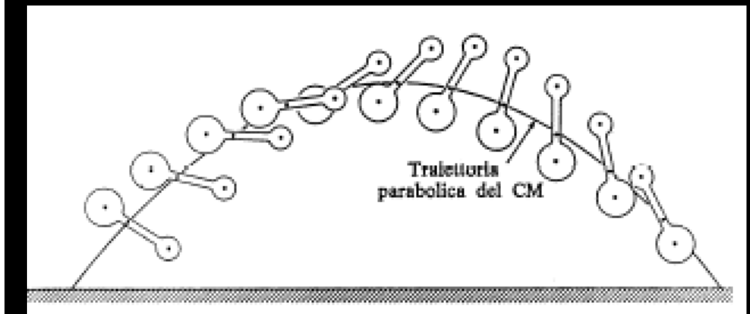
$$E_c = \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

ENERGIA CINETICA NELLA ROTOTRASLAZIONE



Teorema di König: l'energia cinetica di un corpo rigido è dato dalla somma dell'energia cinetica che il corpo avrebbe se tutta la massa fosse concentrate nel CM più l'energia cinetica che il corpo avrebbe se ruotasse intorno al CM

$$E_c = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



REGISTRARE PRESENZE

CASI DI STUDIO

- **TRASLAZIONE:** vedi moto del punto materiale

- **ROTAZIONE**: ASSE FISSO

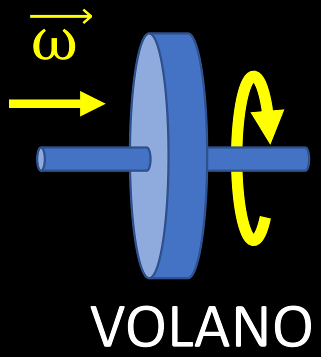
- **ROTOTRASLAZIONE:** ROTOLAMENTO SU PIANO

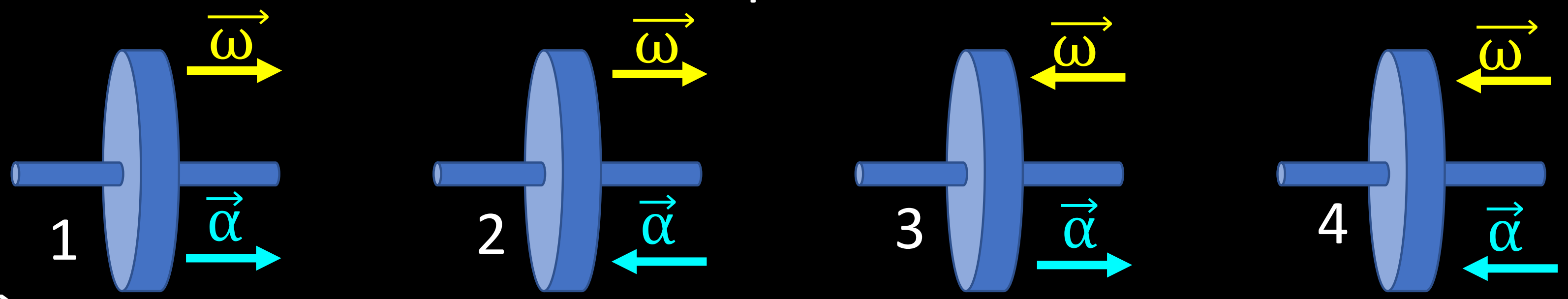
ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO INTORNO A UN ASSE FISSO

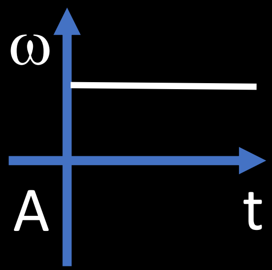
(caso importante nello studio di macchine e motori)

il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ ha la stessa direzione dell'asse mentre modulo e verso possono variare

l'eventuale accelerazione angolare $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ha la stessa direzione dell'asse mentre modulo e verso possono variare







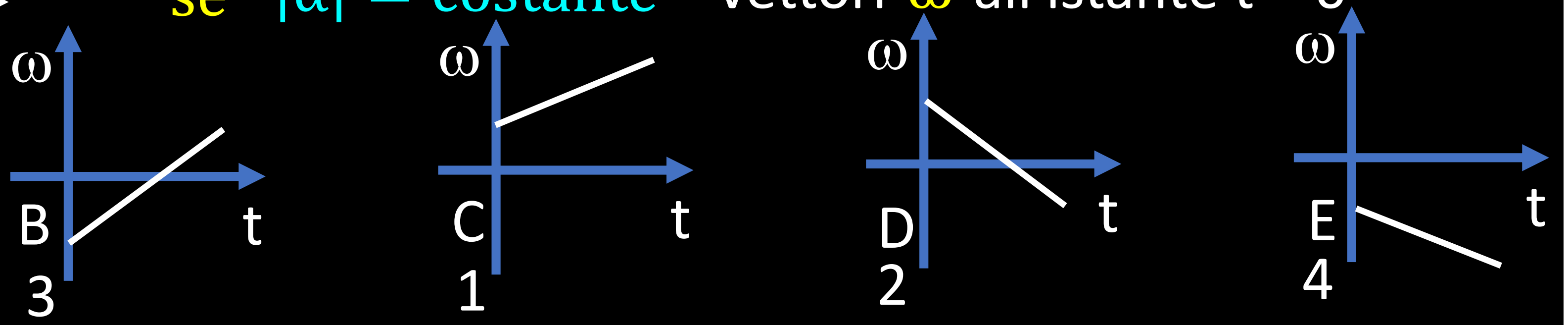
se $\vec{M} = 0$

$\vec{\alpha} = 0$

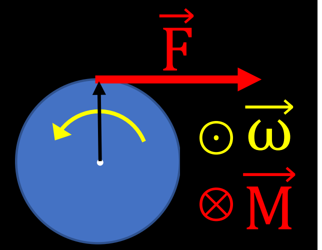
$\hat{k}$

se $|\vec{\alpha}| =$ costante

vettori $\vec{\omega}$ all'istante t = 0



ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO INTORNO A UN ASSE FISSO



Un disco omogeneo di raggio r = 0,5 m e massa m =10 kg ruota con velocità iniziale ω_0 = 100 rad/s attorno a un asse perpendicolare passante per il suo centro (I = ½ MR^2).

All'istante t = 0 una forza costante F agente tangenzialmente sul bordo del disco realizza un'azione frenante e la velocità del disco si annulla dopo 20 s.

Calcolare il modulo dell'accelerazione angolare, il modulo di F, l'energia E_d dissipata durante l'intera azione frenante

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha\, t \rightarrow 0 = \omega_0 - \alpha\, t^* \rightarrow \alpha = \omega_0 / t^* = (100\ \text{rad/s})/(20\ \text{s}) = 5\ \text{rad/s}^2$$

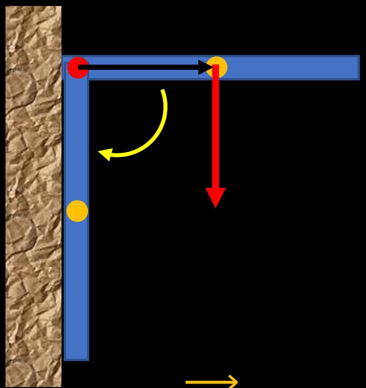
$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

$$M = r\,F = I\,\alpha \rightarrow F = I\,\alpha/r = (½\, m\, r^2)\,\alpha/r = ½\, m\, r\,\alpha = 12{,}5\ \text{N}$$

$$E_d = ½\, I\, \omega_0^2 = ½\,(½\, m\, r^2)\,\omega_0^2 = 625\ \text{J}$$

ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO INTORNO A UN ASSE FISSO

Una sottile asta omogenea di massa m = 2 kg e lunga L = 50 cm ha un'estemità fissata a una parete tramite una cerniera (l'attrito sviluppa un momento costante M_{Att} = 2 Nm).



L'asta, inizialmente ferma in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare verso la parete.

Determinare l'accelerazione angolare nell'istante in cui l'asta inizia a ruotare e l'energia cinetica al momento dell'urto.

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

$$M = mg\,L/2 - M_{Att} = I\,\alpha(0) \rightarrow \alpha(0) = (mg\,L/2 - M_{Att})/(mL^2/3) = 17{,}4\ \text{rad/s}^2$$

$$E_c = mg\,h(0) - M_{Att}\,\theta = mgL/2 - M_{Att}\,\pi/2 = 1{,}77\ \text{J}$$

ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO INTORNO A UN ASSE FISSO

Una puleggia di raggio R = 40 cm e massa M = 70 kg ruota, partendo da ferma, sotto l'azione di una massa m = 7 kg sostenuta da una fune avvolta sulla puleggia. Calcolare la velocità angolare della puleggia 2 s dopo la partenza.

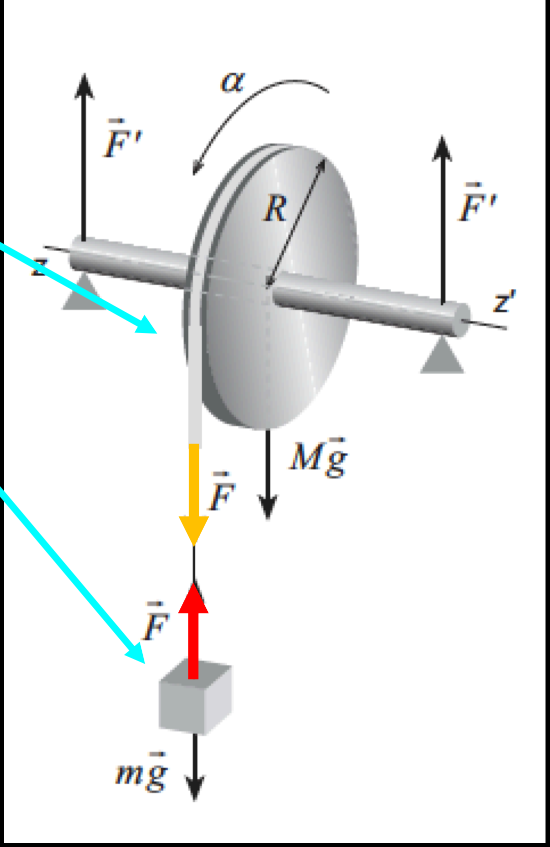
$$mg - F = ma = m\,\alpha R \rightarrow F = mg - m\alpha R$$

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

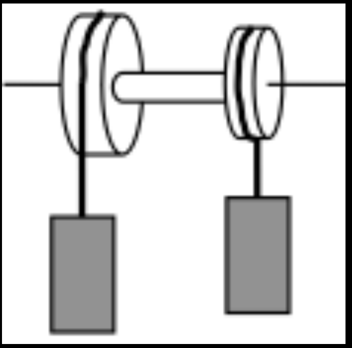
$$R\,F = I\,\alpha \rightarrow Rmg - m\alpha R^2 = I\,\alpha$$

$$\rightarrow \alpha = Rmg/(I+mR^2) = Rmg/(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2) = mg/[R(\tfrac{1}{2}M+m)]$$

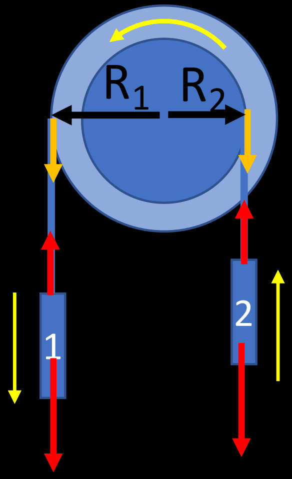
$$\omega = \alpha\,t = 8{,}2\ \text{rad/s}$$



Un sistema rigido di momento d'inerzia I è costituito da due pulegge di raggi R_1 e R_2 e da una leggera sbarra di collegamento. Sulle due pulegge sono arrotolate in versi opposti due funi ideali alle cui estremità sono appese due masse m uguali. Determinare l'accelerazione angolare delle pulegge.



sistema legato



$mg - F_1 = ma_1 = m\,\alpha R_1 \rightarrow F_1 = mg - m\,\alpha R_1$

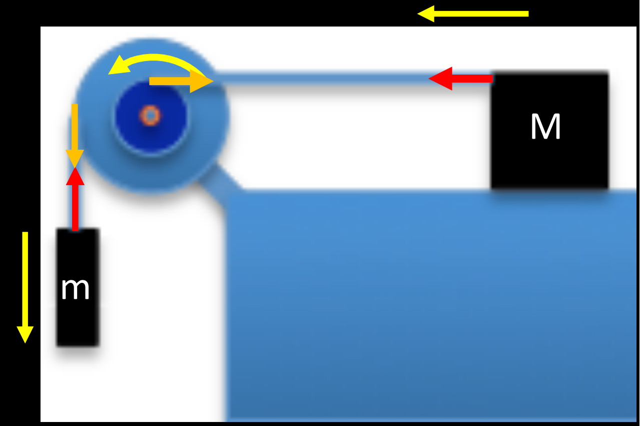
$-mg + F_2 = ma_2 = m\,\alpha R_2 \rightarrow F_2 = mg + m\,\alpha R_2$

$R_1 F_1 - R_2 F_2 = I\,\alpha \rightarrow (R_1\, mg - m\,\alpha R_1^2) - (R_2\, mg + m\,\alpha R_2^2) = I\,\alpha$

$R_1\, mg - R_2\, mg = m\,\alpha R_1^2 + m\,\alpha R_2^2 + I\,\alpha = [m(R_1^2 + R_2^2) + I]\,\alpha$

$\rightarrow \alpha = mg(R_1 - R_2)/[m(R_1^2 + R_2^2) + I]$

Su un piano orizzontale liscio è appoggiato un blocco di massa M collegato tramite un filo ideale a una puleggia di raggio R. La puleggia è costituita da due dischi concentrici. Intorno a quello di raggio 2R è avvolto un altro filo ideale alla cui estremità è appesa una massa m. Determinare l'accelerazione angolare della puleggia sapendo che ha un momento d'inerzia I rispetto all'asse di rotazione.



$$mg - F_1 = ma = m\alpha\, 2R \rightarrow F_1 = mg - 2\, m\alpha R$$

$$F_2 = M\, a = M\, \alpha R$$

$$2R\, F_1 - R\, F_2 = I\, \alpha$$

$$2R\, mg - 4\, m\alpha R^2 - M\alpha R^2 = I\, \alpha \rightarrow 2R\, mg = [4\, m\, R^2 + MR^2 + I]\, \alpha$$

$$\rightarrow \alpha = 2mgR/(I + 4mR^2 + MR^2)$$

Fondamenti di fisica generale

Mercoledì 21 dicembre 2022
in AULA B1
12:05-13:00