Fondamenti di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

Martedì 12 gennaio 2021

11:00-13:00
(11:15-13:00)

meet.google.com/xsc-vwjs-msg

LEZ 9

MECCANICA DEI SISTEMI

la lezione di oggi 12 gennaio 2021:
DAL PUNTO MATERIALE AL SISTEMA DI PUNTI
CENTRO DI MASSA E BARICENTRO
CORPO RIGIDO
MOTO DEL CORPO RIGIDO
MOMENTO D'INERZIA
...
STATICA
ENERGIA CINETICA

MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

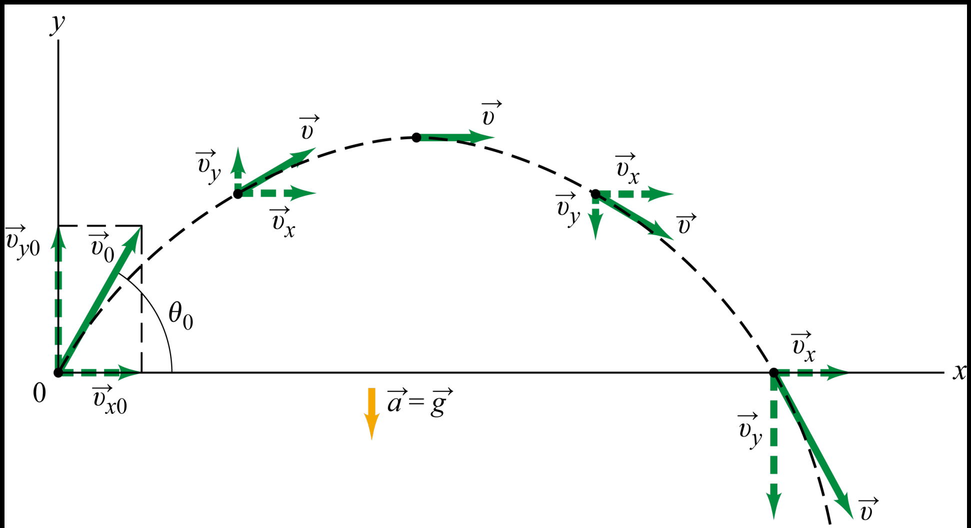
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

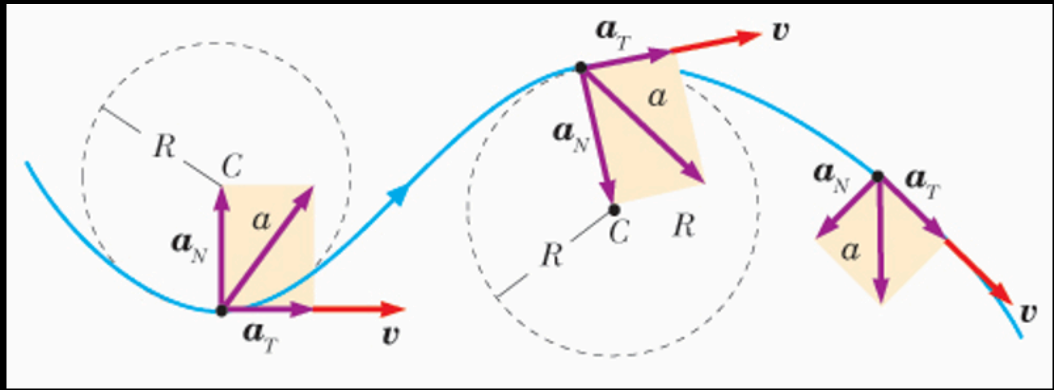
m <--> inerzia, difficoltà nel variare la velocità: a = F/m

se $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{v}$ = costante; se $v_0 = 0 \rightarrow$ STATICA

se $\vec{F}$ = costante $\rightarrow \vec{a}$ = costante $\rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

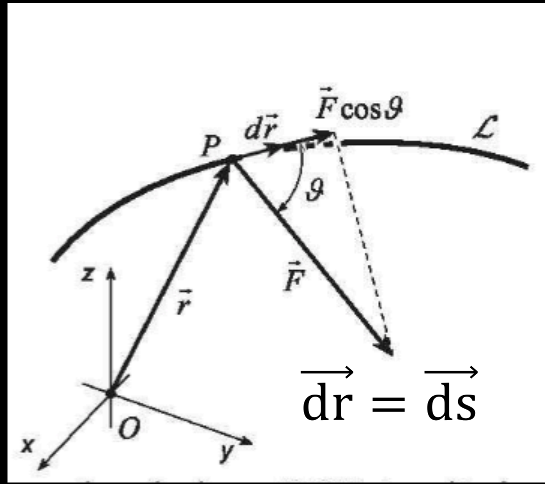
accelerazione e velocità iniziale definiscono la traiettoria





MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE

lavoro di una forza $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$ $\quad dL = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$ $\quad L = \int \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$



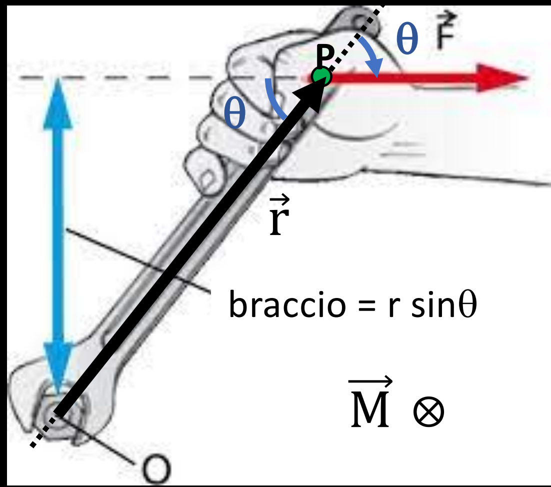
energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

energia potenziale gravitazionale $E_p = mgh$

$E = E_c + E_p$ si conserva (se forze conservative: no attrito)

potenza $P = dL/dt = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$

momento meccanico (torcente) $\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad M = r\,F \sin\theta = b\,F$

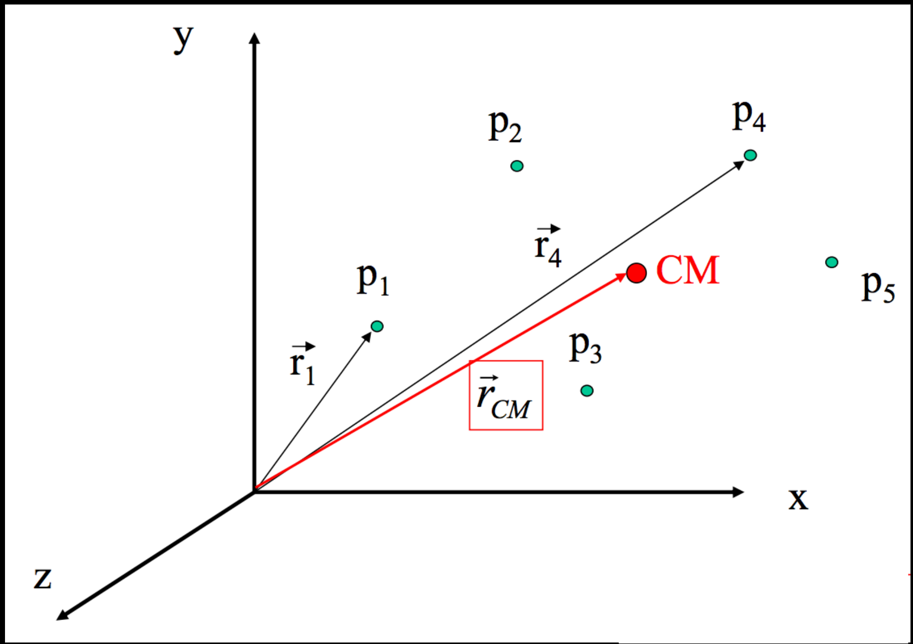


N punti p_i indipendenti di massa m_i nelle posizioni $\vec{r_i}$ (i = 1, N)
sottoposti all'azione delle forze $\vec{F_i}$ e dei momenti $\vec{M_i}$

$$\vec{F_i} = m_i\,\vec{a_i}$$

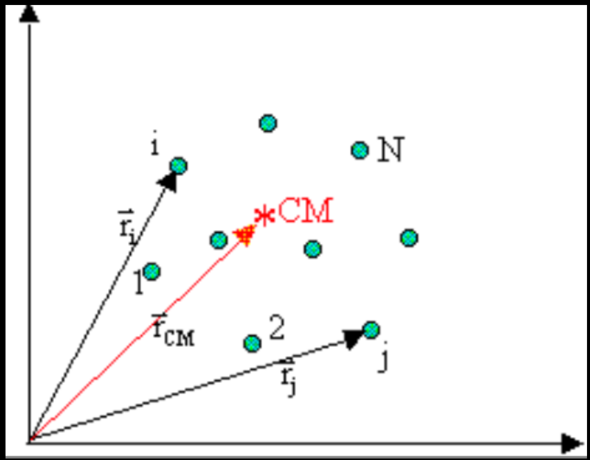
$$\vec{M_i} = \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



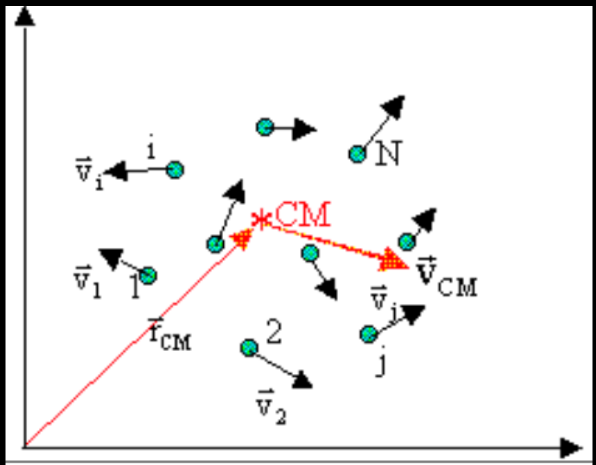
esiste un punto "rappresentativo": IL CENTRO DI MASSA

$$\vec{r_{CM}} = \frac{\sum m_i\,\vec{r_i}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\,\vec{r_i}}{m_{TOT}}$$



$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{m_{TOT}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

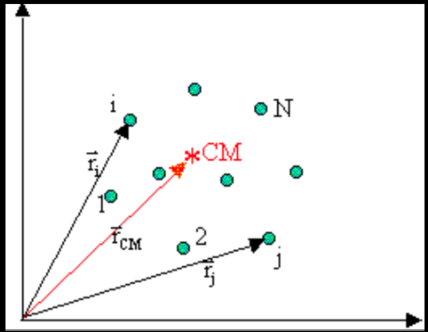


$$\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sum(m_i\vec{r_i})}{m_{TOT}}\right] = \frac{1}{m_{TOT}}\frac{d}{dt}\left[\sum(m_i\vec{r_i})\right]$$

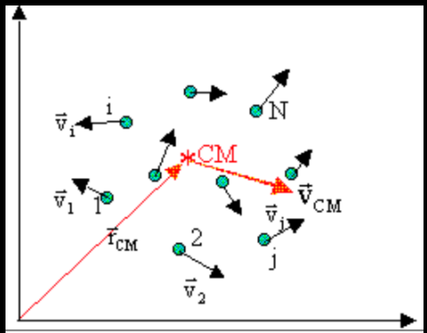
$$= \frac{1}{m_{TOT}}\Sigma\left[\frac{d}{dt}(m_i\vec{r_i})\right] = \frac{1}{m_{TOT}}\Sigma\left[m_i\frac{d\vec{r_i}}{dt}\right] = \frac{1}{m_{TOT}}\Sigma[m_i\vec{v_i}] = \frac{\sum m_i \vec{v_i}}{m_{TOT}}$$

SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

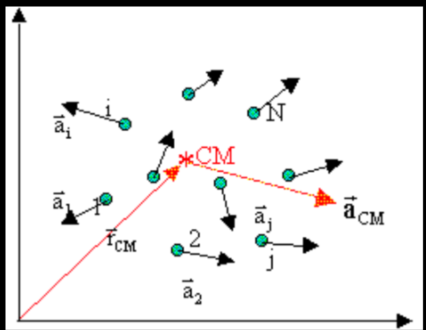
MOTO DEL CM



$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \, \vec{r_i}}{m_{TOT}}$$



$$\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{\sum m_i \, \vec{v_i}}{m_{TOT}}$$



$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} = m_{TOT} \; \overrightarrow{a_{CM}}$$

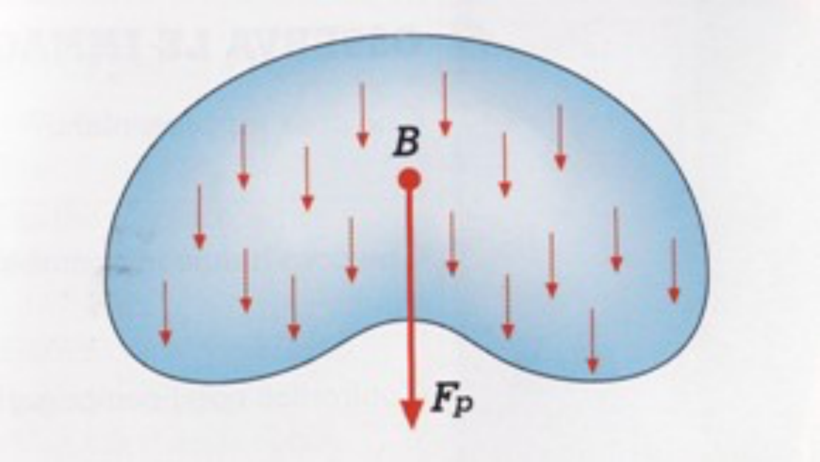
il CM si muove come se fosse un punto di massa m_{TOT} sotto l'azione della risultante $\vec{F}$ di tutte le forze $\vec{F_i}$

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sum(m_i \vec{v_i}\,)}{m_{TOT}}\right] = \frac{1}{m_{TOT}}\frac{d}{dt}\left[\sum(m_i \vec{v_i})\right] = \frac{1}{m_{TOT}}\Sigma\left[m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{m_{TOT}}\Sigma[m_i \vec{a_i}] = \frac{\sum \vec{F_i}}{m_{TOT}}$$

$$\vec{a_i} = \frac{d\vec{v_i}}{dt}$$

$$\vec{F_i} = m_i \, \vec{a_i}$$



$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} = m_{TOT}\ \overrightarrow{a_{CM}}$$

la risultante delle forze accelera il centro di massa

se le forza che agisce è la forza peso $\overrightarrow{F_{P_i}} = m_i\,\vec{g}$

$$\overrightarrow{F_P} = \sum \overrightarrow{F_{P_i}} = \sum m_i\,\vec{g} = \left[\sum m_i\right]\vec{g} = m_{TOT}\ \vec{g}$$

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \vec{g}$$

il centro di massa è il punto di applicazione della forza peso (baricentro) (solo se $\vec{g}$ è uniforme)

SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

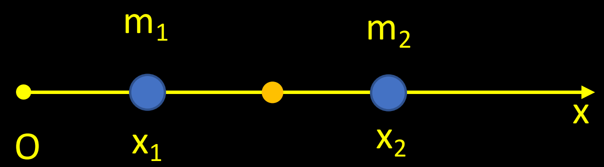
CENTRO DI MASSA

$$\vec{r_i} = \hat{\imath}\, x_i + \hat{\jmath}\, y_i + \hat{k}\, z_i$$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \left[\hat{\imath}\, x_i + \hat{\jmath}\, y_i + \hat{k}\, z_i\right]}{\sum m_i}$$

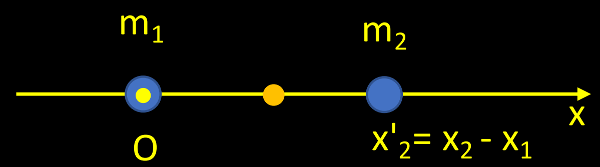
$$\overrightarrow{r_{CM}} = \hat{\imath}\, \frac{\sum m_i\, x_i}{\sum m_i} + \hat{\jmath}\, \frac{\sum m_i\, y_i}{\sum m_i} + \hat{k}\, \frac{\sum m_i\, z_i}{\sum m_i}$$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \hat{\imath}\, x_{CM} + \hat{\jmath}\, y_{CM} + \hat{k}\, z_{CM}$$



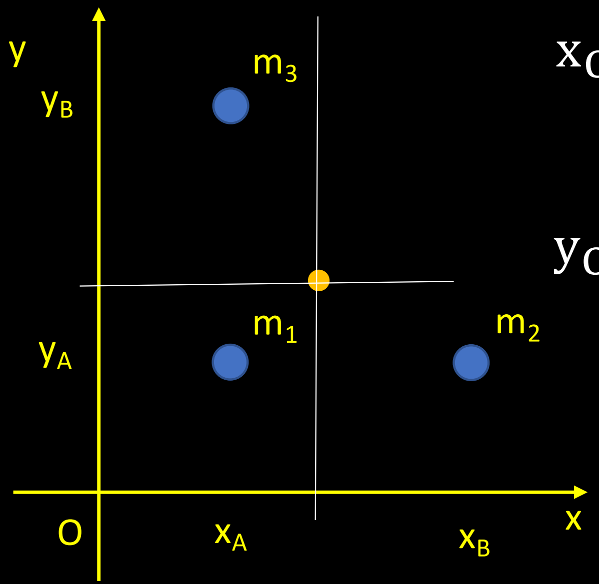
$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}$$

se $m_1 = m_2$ $\quad x_{CM} = (x_1+x_2)/2$



$$x'_{CM} = \frac{m_1 0 + m_2\, x'_2}{m_1 + m_2}$$

se $m_1 = m_2$ $\quad x'_{CM} = x'_2/2$



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_A + m_2\, x_B + m_3\, x_A}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_A + m_2\, y_A + m_3\, y_B}{m_1 + m_2 + m_3}$$

se $m_1 = m_2 = m_3$

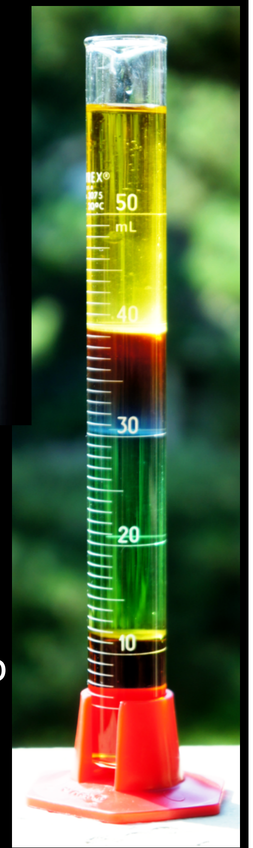
$x_{CM} = 2/3\ x_A + 1/3\ x_B$

$y_{CM} = 2/3\ y_A + 1/3\ y_B$

IL CORPO RIGIDO

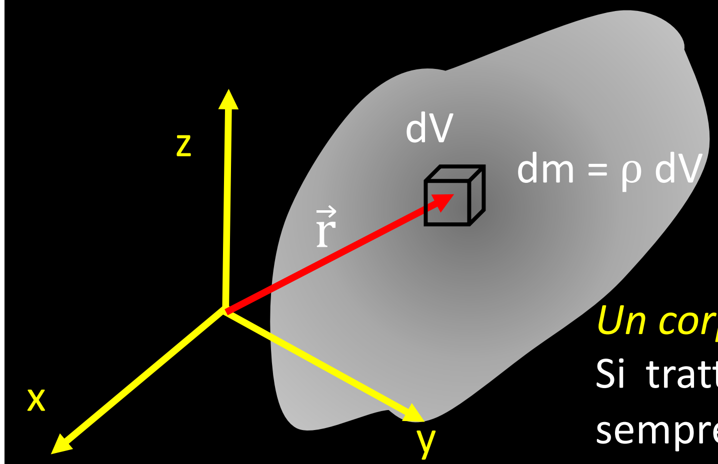
DEFINIZIONE

Se i punti dotati di massa costituiscono una distribuzione continua di massa si ha un **corpo** e se le distanze reciproche fra i punti sono fisse si ha un **corpo rigido**.



Caratteristica di un corpo è di avere in ogni punto una densità di massa [densità = massa/volume]

$$\rho = dm/dV \rightarrow dm = \rho\, dV$$



se il corpo non è omogeneo $\rho = \rho(\vec{r})$

Un corpo rigido è un sistema di punti le cui distanze reciproche sono fisse

Si tratta di un MODELLO IDEALE perché nella realtà i corpi subiscono sempre deformazioni (elasticità)

DISCRETO

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$$

$$\sum \mathbf{m_i} \rightarrow \int \mathbf{dm} = \mathbf{m}$$

$$\sum \mathbf{m_i \vec{r}_i} \rightarrow \int \vec{\mathbf{r}}\, \mathbf{dm}$$

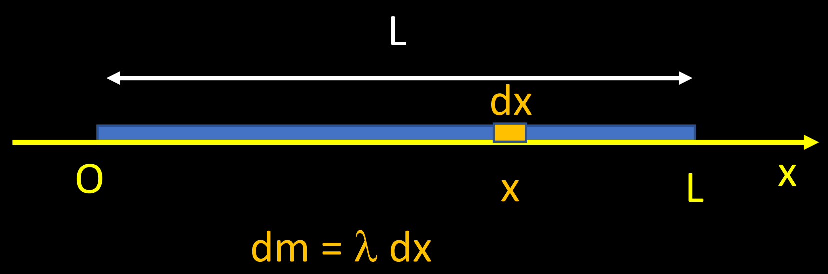
CONTINUO

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{m} = \frac{\int_V \vec{r}\, \rho\, dV}{m}$$

se il corpo non ha un volume ma si estende solo lungo una linea di lunghezza L (p.es. spago) la densità di massa lineare [densità = massa/lunghezza] è

$\lambda = dm/dL \rightarrow dm = \lambda \, dL$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{m}$$

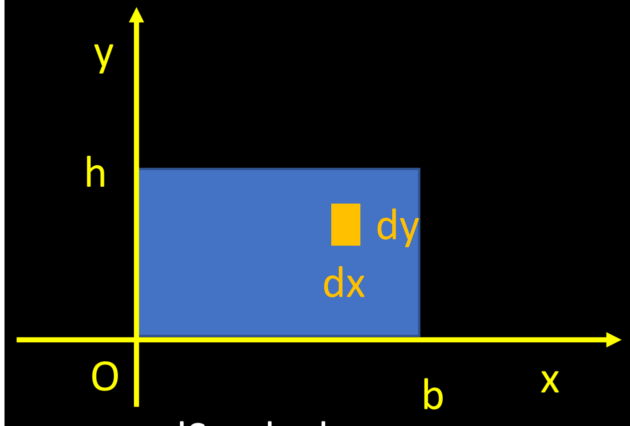


$$x_{CM} = \frac{\int_L x\, dm}{m} = \frac{\int_0^L x\, \lambda\, dx}{m} = \lambda \frac{\int_0^L x\, dx}{m} = \frac{m}{L}\frac{\frac{1}{2}L^2}{m} = \frac{L}{2}$$

ESEMPIO DI CALCOLO DEL CENTRO DI MASSA

se il corpo non ha un volume ma si estende solo lungo una superficie di area S (p.es. foglio) la densità di massa superficiale [densità = massa/superficie] è

$\sigma = dm/dS \rightarrow dm = \sigma\, dS$



$dS = dx\, dy$

$dm = \sigma\, dS = \sigma\, dx\, dy$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^h \int_0^b x\, dm}{m} = \frac{\int_0^h \int_0^b x\; \sigma\, dxdy}{m} = \sigma \frac{\int_0^h \int_0^b x\;\, dxdy}{m}$$

$$= \frac{m}{b\,h} \frac{\int_0^h \int_0^b x\;\, dxdy}{m} = \frac{m}{b\,h} \frac{\int_0^h \left[\int_0^b x\;\, dx\right] dy}{m}$$

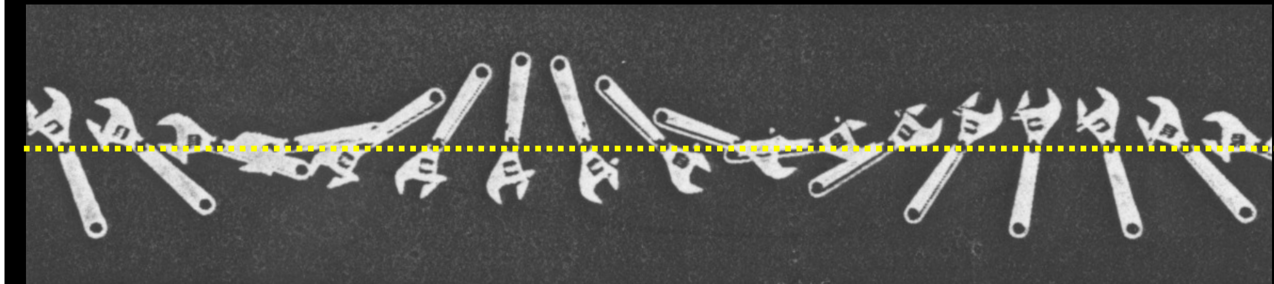
$$= \frac{m}{b\,h} \frac{\left[\int_0^b x\;\, dx\right]\left[\int_0^h dy\right]}{m} = \frac{m}{b\,h} \frac{\left[\frac{1}{2} b^2\right][h]}{m} = \frac{b}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{h}{2}$$

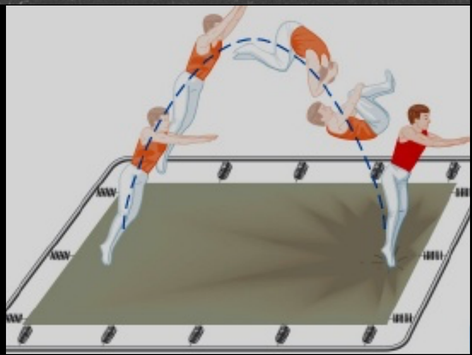
MOTO DEL CORPO RIGIDO

Il moto di un corpo rigido può essere scomposto in quello del centro di massa **(traslazione)** e in quello dei punti del corpo nel sistema del centro di massa. Poiché in un corpo rigido la distanza dei punti dal centro di massa non cambia, il moto di questi punti è circolare **(rotazione)**.

rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo di un corpo rigido è la somma di una traslazione infinitesima con velocità $\vec{v}$ e una rotazione infinitesima con velocità $\vec{\omega}$



CM in moto rettilineo uniforme

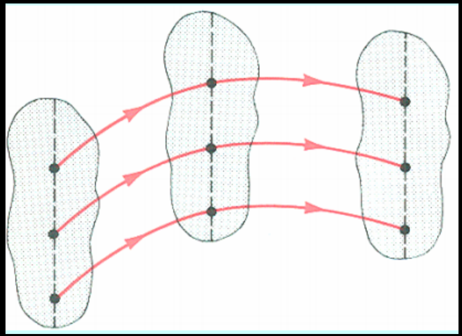


rotazione intorno al CM

CM in moto parabolico

MOTO DEL CORPO RIGIDO

TRASLAZIONE



tutti i punti (anche il CM) descrivono la stessa traiettoria con la stessa velocità

$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} = m_{TOT}\ \overrightarrow{a_{CM}}$$

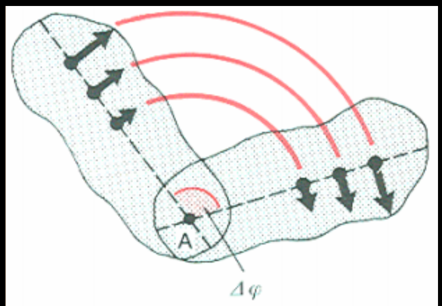
$$E_C = \sum E_{c_i} = \sum \frac{1}{2} m_i {v_{CM}}^2 = \frac{1}{2}\left[\sum m_i\right] {v_{CM}}^2 = \frac{1}{2} m_{TOT} {v_{CM}}^2$$

quanto già visto per il punto materiale si applica ai corpi rigidi che traslano

ponendo $m_{TOT} = m$ e $\overrightarrow{a_{CM}} = \vec{a}$

$$\vec{F} = m\ \vec{a} \qquad E_C = \frac{1}{2} m\, v^2$$

ROTAZIONE

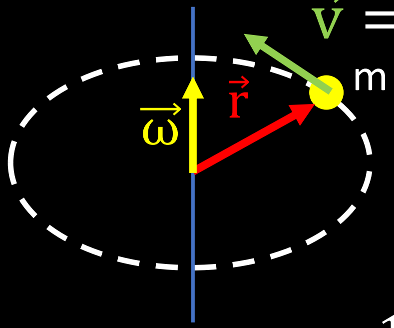


tutti i punti seguono una traiettoria circolare con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$

ma con velocità $\overrightarrow{v(\vec{r})} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ diverse

ROTAZIONE: Il MOMENTO D'INERZIA

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



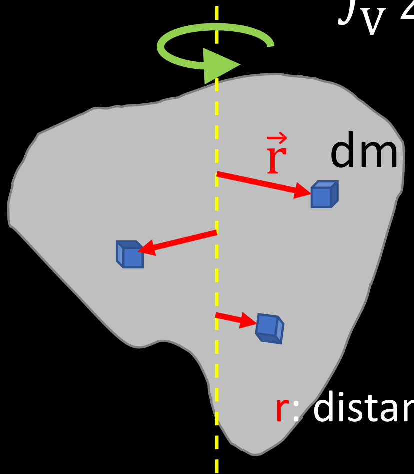
rotazione di un punto materiale intorno a un asse

$$I = m\,r^2 \quad \text{momento d'inerzia} \qquad \text{kg m}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,(\omega\,r)^2 = \frac{1}{2}\,(m\,r^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

$$E_C = \int_V \frac{1}{2}\,dm\,v^2 = \frac{1}{2}\int_V dm(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\left[\int_V r^2 dm\right]\omega^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho\, dV$$



rotazione di un corpo rigido intorno a un asse

r: distanza dall'asse di rotazione

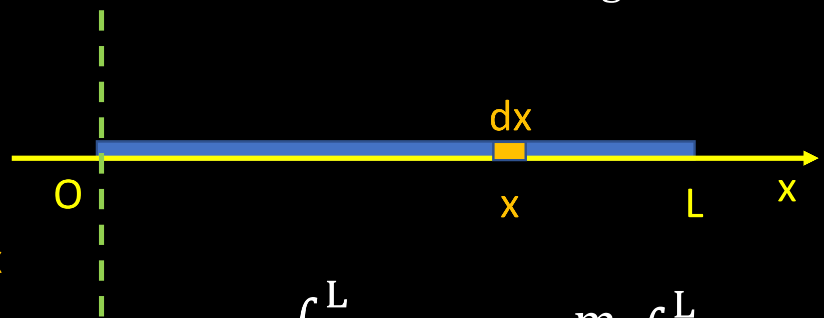
MOTO DEL CORPO RIGIDO

ESEMPIO DI CALCOLO DEL MOMENTO D'INERZIA

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

$\lambda = dm/dL$

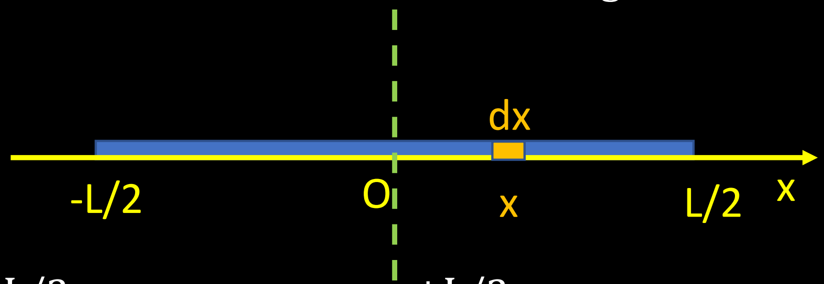
rotazione di una sbarra omogenea intorno a un asse per una estremità



$dm = \lambda\, dx$

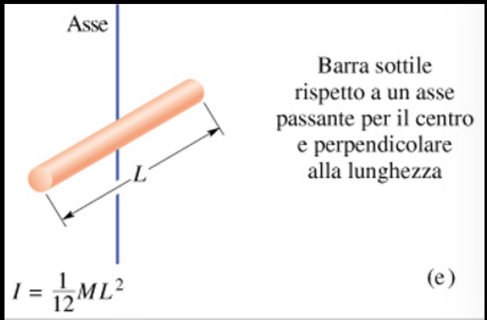
$$I = \int_V r^2 dm = \int_0^L x^2\, \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2\, dx = \frac{m}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{L^3}{3} - \frac{0}{3}\right] = m\frac{L^2}{3}$$

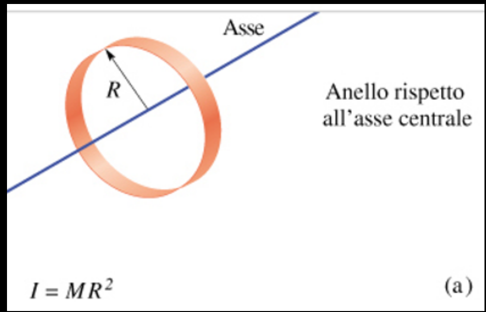
rotazione di una sbarra omogenea intorno a un asse per il centro di massa

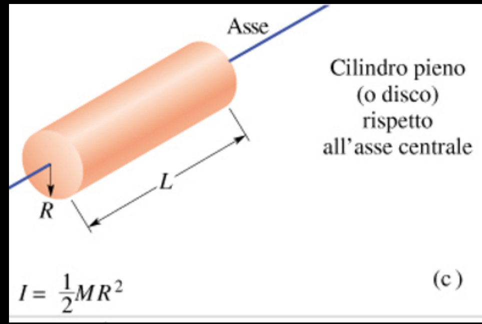


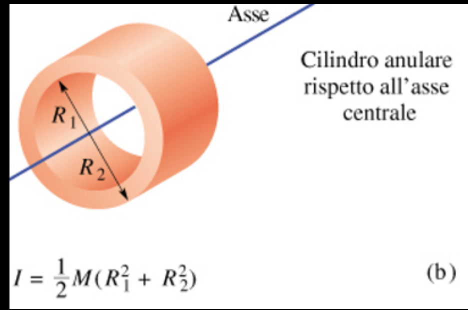
$$I = \int_V r^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2\, \lambda dx = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}\right] = m\frac{L^2}{12}$$

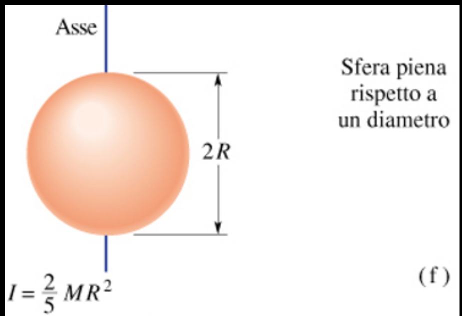
MOMENTO D'INERZIA

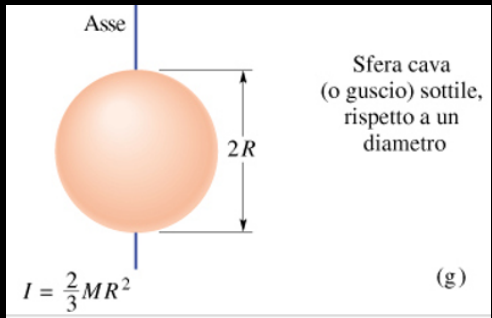


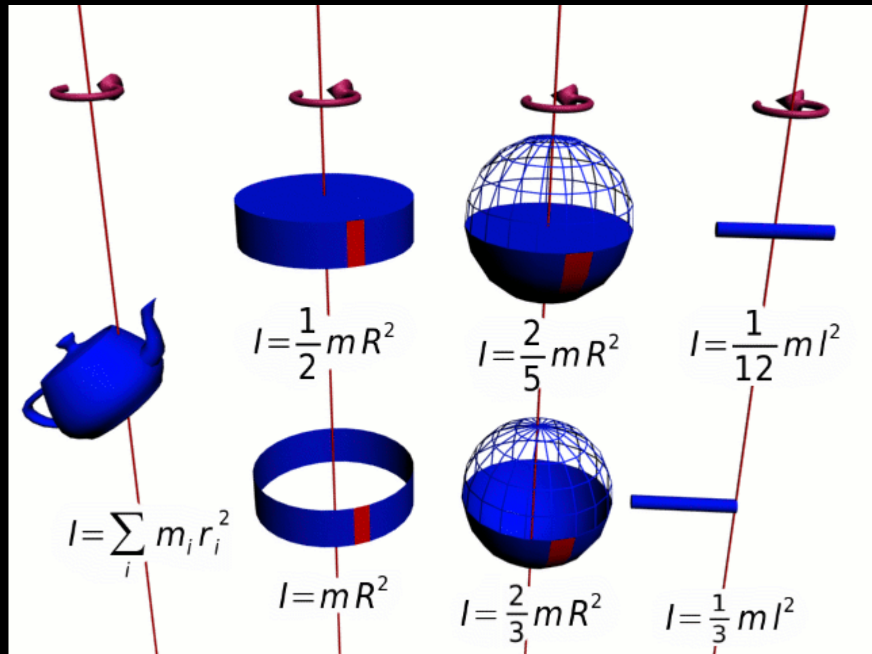








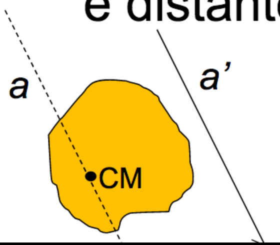




r: distanza dall'asse di rotazione

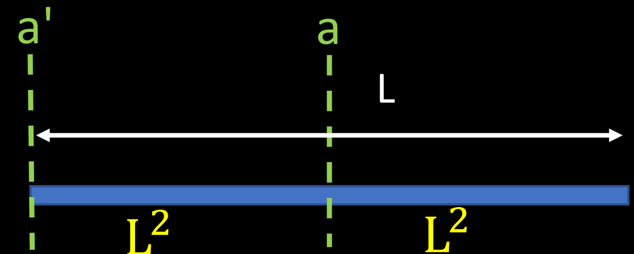
ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO

- Detto *I* il momento d’inerzia di un corpo di massa *m*, rispetto ad un asse *a* passante per il CM, il momento d’inerzia rispetto ad un asse *a’* parallelo al primo e distante *d* da questo e`



$$I' = I + md^2$$

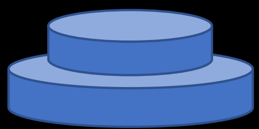
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER



$$I' = m\frac{L^2}{3} \qquad I = m\frac{L^2}{12}$$

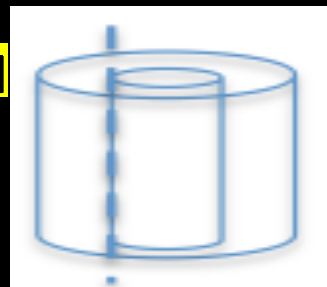
$$I' = m\frac{L^2}{12} + m\left[\frac{L}{2}\right]^2 = mL^2\frac{1+3}{12} = m\frac{L^2}{3}$$

1) Una puleggia è costituita da due dischi omogenei coassiali solidamente uniti fra loro. Il disco maggiore ha raggio R = 4 cm; il minore ha raggio r = 3 cm; entrambi i dischi hanno massa 40 g. Determinare il momento d’inerzia della puleggia calcolato rispetto all’asse baricentrale e rispetto ad un asse passante a 3 cm dal centro. [I_{CM} = 500 gcm^2; I_a = 1220 gcm^2]



2) Determinare il momento d’inerzia di un cilindro cavo (raggio interno R_1; raggio esterno R_2, massa M) rispetto a un asse parallelo a quello baricentrale distante R_1 da esso

[$I = ½ M(3R_1^2+ R_2^2)$]



MECCANICA DEL CORPO RIGIDO

Il moto complessivo del corpo è determinato dall'azione delle forze esterne, caratterizzate da:
una risultante $\vec{F}$ e da un momento risultante $\vec{M}$.

La risultante delle forze $\vec{F}$ accelera il centro di massa $\vec{F} = m_{TOT}\ \overrightarrow{a_{CM}}$ mTOT <-> inerzia alla traslazione

Si potrebbe dimostrare che la risultante dei momenti $\vec{M}$ (prendendo come polo un punto fisso o il CM) produce, intorno a tale punto, una rotazione con accelerazione angolare $\vec{\alpha}$

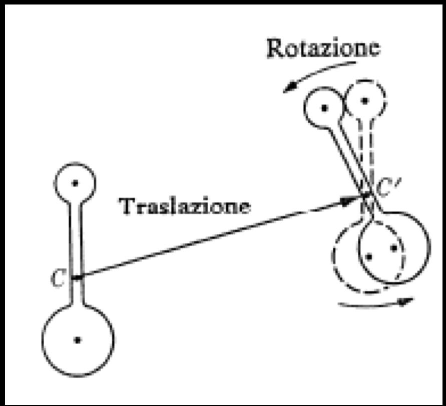
$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

I <-> inerzia alla rotazione

L'equilibrio statico richiede che non ci siano né traslazioni, né rotazioni.
Pertanto, come già noto, devono risultare contemporaneamente $\vec{F} = 0$ e $\vec{M} = 0$

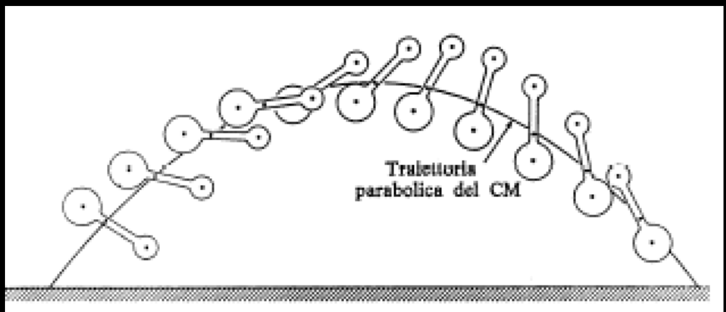
STATICA

ENERGIA CINETICA NELLA ROTOTRASLAZIONE



Teorema di Konig: l'energia cinetica di un corpo rigido è dato dalla somma dell'energia cinetica che il corpo avrebbe se tutta la massa fosse concentrate nel CM più l'energia cinetica che il corpo avrebbe se ruotasse intorno al CM

$$E_c = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



MOTO DEL CORPO RIGIDO

CASI DI STUDIO

- TRASLAZIONE: vedi moto del punto materiale

- **ROTAZIONE**: ASSE FISSO (PULEGGIA; PENDOLO FISICO)

- **ROTOTRASLAZIONE:** ROTOLAMENTO SU PIANO (ORIZZONTALE, INCLINATO)

RICEVIMENTO ASINCRONO:
scrivere a
adalberto.sciubba@uniroma1.it

Venerdì 15 gennaio 2021

14:00-16:00
(14:30-16:00)
meet.google.com/khp-neqs-kgd

Fondamenti di fisica generale

Venerdì 15 gennaio 2021

14:00-16:00
(14:30-16:00)
meet.google.com/khp-neqs-kgd