Complementi di Fisica - II Lezione

Forza tra cariche elettriche: legge di Coulomb
Campo elettrico generato da cariche puntiformi

Andrea Bettucci

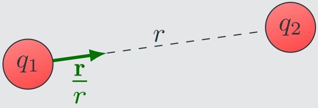
8 marzo 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Legge di Coulomb nel vuoto

La forza che si esercita tra due cariche puntiformi è diretta lungo la congiungente le due cariche. La forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\mathbf{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$K \simeq 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2C^{-2}} \qquad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad \epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$$

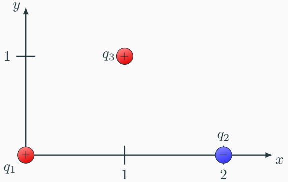
$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Principio di sovrapposizione delle forze

Se si hanno più cariche puntiformi, la forza su una di esse è uguale al risultante (ovvero alla somma vettoriale) delle forze che ciascuna delle altre cariche eserciterebbe qualora agisse da sola.

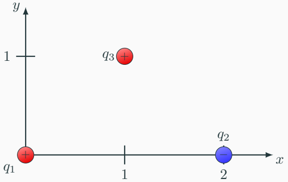
Esercizio

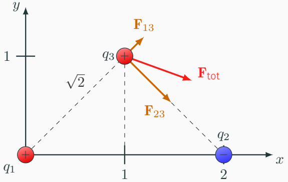
Rispetto a un sistema di riferimento O, x, y, le coordinate di tre cariche puntiformi q_1, q_2 e q_3 sono $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$, rispettivamente. Si determini modulo e direzione della forza sulla carica q_3. ($q_1 = 2\,$nC; $q_2 = -10\,$nC; $q_3 = 10\,$nC)



Esercizio

Rispetto a un sistema di riferimento O, x, y, le coordinate di tre cariche puntiformi q_1, q_2 e q_3 sono $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$, rispettivamente. Si determini modulo e direzione della forza sulla carica q_3. ($q_1 = 2\,$nC; $q_2 = -10\,$nC; $q_3 = 10\,$nC)





$$\mathbf{F}_{13} = K \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \qquad \mathbf{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}$$

$$F_{13} = 9 \times 10^{-8}\,\text{N} \qquad F_{23} = 4{,}5 \times 10^{-7}\,\text{N}$$

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$$

Quali sono il modulo e la direzione di $\mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$?

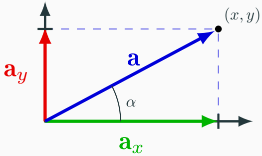
Quali sono il modulo e la direzione di $\mathbf{F}_{\text{tot}}$?

Decomposizione di un vettore

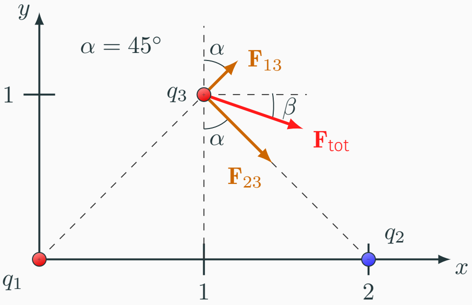
Un vettore applicato $\mathbf{a}$ è determinato dalla conoscenza delle sue componenti rispetto a un sistema di riferimento.

$$a_x = a \cos \alpha \qquad a_y = a \sin \alpha$$

Le componenti di un vettore rispetto a un asse orientato hanno segno



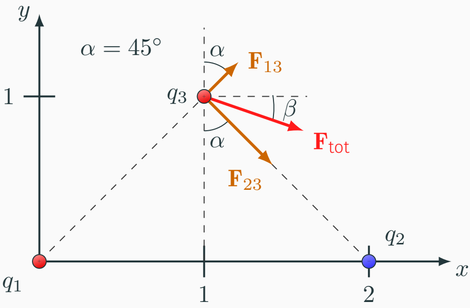
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan \alpha = \frac{a_y}{a_x}$$



I moduli delle componenti di $\mathbf{F}_{13}$ e $\mathbf{F}_{23}$ lungo gli assi x ed y sono:

$$F_{13x} = F_{13} \sin\alpha \simeq 6{,}4 \times 10^{-8}\ \text{N}$$
$$F_{13y} = F_{13} \cos\alpha \simeq 6{,}4 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

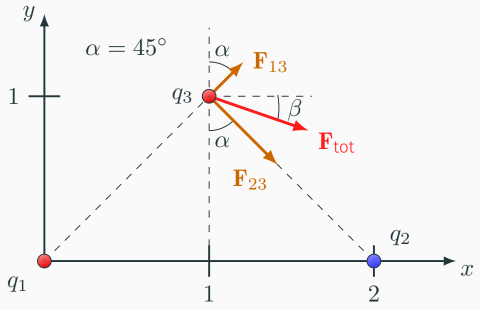
$$F_{23x} = F_{23} \sin\alpha \simeq 3{,}2 \times 10^{-7}\ \text{N}$$
$$F_{23y} = F_{23} \cos\alpha \simeq 3{,}2 \times 10^{-7}\ \text{N}$$



Le componenti di $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}\,x} = (F_{13x} + F_{23x})\mathbf{i} \simeq (+3{,}8 \times 10^{-7}\,\text{N})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{tot}\,x} =\simeq 3{,}8 \times 10^{-7}\,\text{N}$$

$$\mathbf{F}_{\text{tot}\,y} = (F_{13y} - F_{23y})\mathbf{j} \simeq (-2{,}6 \times 10^{-7}\,\text{N})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{tot}\,y} =\simeq 2{,}6 \times 10^{-7}\,\text{N}$$



Le componenti di $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}\,x} = (F_{13x} + F_{23x})\mathbf{i} \simeq (+3{,}8 \times 10^{-7}\,\text{N})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{tot}\,x} =\simeq 3{,}8 \times 10^{-7}\,\text{N}$$

$$\mathbf{F}_{\text{tot}\,y} = (F_{13y} - F_{23y})\mathbf{j} \simeq (-2{,}6 \times 10^{-7}\,\text{N})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{tot}\,y} =\simeq 2{,}6 \times 10^{-7}\,\text{N}$$

In conclusione, modulo e direzione di $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ sono determinati

$$F_{\text{tot}} = \sqrt{F_{\text{tot}\,x}^2 + F_{\text{tot}\,y}^2} = 4{,}6 \times 10^{-7}\,\text{N} \qquad \tan\beta = \frac{F_{\text{tot}\,y}}{F_{\text{tot}\,x}} \simeq 0,68 \rightarrow \beta \simeq 34°$$

Campo elettrico
creato da cariche puntiformi

- La forza di Coulomb è una forza che agisce a distanza.
- Ogni carica Q produce un campo elettrico che pervade l'intero spazio: se una carica q viene posta in un punto P dello spazio, risente di una forza su di essa esercitata dal campo elettrico esistente in quel punto creato da Q.

- La forza di Coulomb è una forza che agisce a distanza.
- Ogni carica Q produce un campo elettrico che pervade l'intero spazio: se una carica q viene posta in un punto P dello spazio, risente di una forza su di essa esercitata dal campo elettrico esistente in quel punto creato da Q.

Il campo elettrico

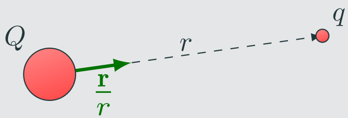
Il campo elettrico $\mathbf{E}$ creato da una o più cariche in un punto dello spazio è uguale alla forza $\mathbf{F}$ agente su una piccola carica di prova positiva q posta in quel punto divisa per q:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

La carica q deve essere così piccola ($q \to 0$) da non esercitare alcuna forza sulle cariche che generano il campo, cosicché $\mathbf{E}$ in un punto dello spazio descrive solo l'effetto in quel punto delle cariche che creano il campo.

Campo elettrico creato da una singola carica puntiforme Q

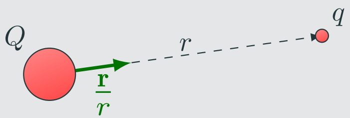
Data una carica puntiforme Q, posta una carica q $(q \to 0)$ a distanza r da Q si ha:



$$\mathbf{F} = K\frac{Qq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = K\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Campo elettrico creato da una singola carica puntiforme Q

Data una carica puntiforme Q, posta una carica q ($q \to 0$) a distanza r da Q si ha:



$$\mathbf{F} = K\frac{Qq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = K\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

- Il campo elettrico è proporzionale alla carica Q che lo genera.
- Il vettore campo elettrico è diretto radialmente: ha il verso di $\mathbf{r}$ per $Q > 0$ e verso opposto a quello di $\mathbf{r}$ per $Q < 0$.
- L'intensità del campo elettrico decresce in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza:

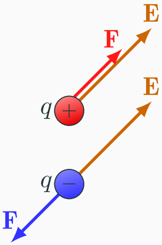
$$E = K\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

- Noto il campo elettrico $\mathbf{E}$ in un punto dello spazio, la forza agente su una generica carica q posta in quel punto è:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

L'espressione è valida anche se q non è piccola purché la sua presenza non modifichi la posizione delle cariche che generano il campo elettrico.

- Se $q > 0$ la forza $\mathbf{F}$ e il campo $\mathbf{E}$ sono concordi.
- Se $q < 0$ la forza $\mathbf{F}$ e il campo $\mathbf{E}$ sono discordi.

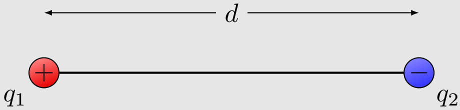


Anche per i campi elettrici vale il principio di sovrapposizione

Se si hanno più cariche puntiformi, il campo elettrico totale in un punto P dello spazio è pari al risultante (ovvero alla somma vettoriale) dei campi elettrici generati in P da ciascuna carica qualora agisse da sola.

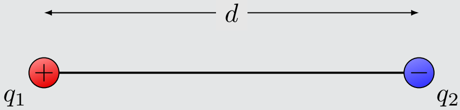
Esercizio

Si determini modulo, direzione e verso del campo elettrico generato nel punto mediano del segmento che unisce due cariche $q_1 = 5{,}8\,\mu$C e $q_2 = -8\,\mu$C poste nel vuoto distanti tra loro $d = 6{,}0\,$cm.



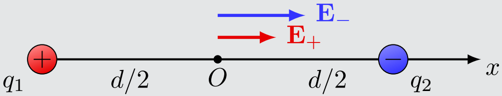
Esercizio

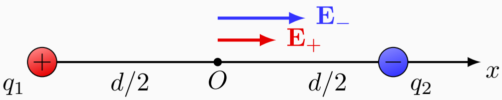
Si determini modulo, direzione e verso del campo elettrico generato nel punto mediano del segmento che unisce due cariche $q_1 = 5{,}8\,\mu\text{C}$ e $q_2 = -8\,\mu\text{C}$ poste nel vuoto distanti tra loro $d = 6{,}0\,\text{cm}$.



Soluzione

Il campo elettrico totale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ sarà diretto verso la carica negativa.





Poiché il modulo del campo elettrico creato da una carica puntiforme q è

$$E = K\frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

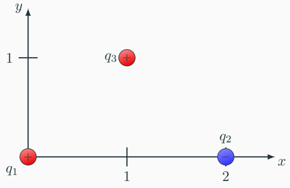
allora il modulo del campo elettrico creato da q_1 e $q : 2$ nel punto mediano O è:

$$E = E_+ + E_- = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{|q_1| + |q_2|}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} =$$

$$= 9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}\,\frac{(5{,}8 \times 10^{-6}\ \mathrm{C} + 8{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = 13{,}8 \times 10^7\ \mathrm{N/C}.$$

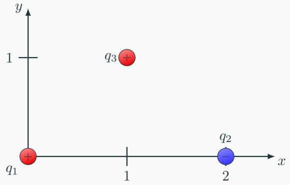
Esercizio

Rispetto a un sistema di riferimento O, x, y, le coordinate di tre cariche puntiformi q_1, q_2 e q_3 sono $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$, rispettivamente. Si determini modulo e direzione della forza sulla carica q_3 **utilizzando il campo elettrico**. ($q_1 = 2\,\text{nC}$; $q_2 = -10\,\text{nC}$; $q_3 = 10\,\text{nC}$)



Esercizio

Rispetto a un sistema di riferimento O, x, y, le coordinate di tre cariche puntiformi q_1, q_2 e q_3 sono $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$, rispettivamente. Si determini modulo e direzione della forza sulla carica q_3 **utilizzando il campo elettrico**. ($q_1 = 2\,$nC; $q_2 = -10\,$nC; $q_3 = 10\,$nC)



Soluzione

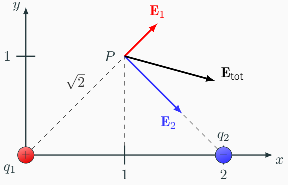
1. Determinare il campi elettrici $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ creati separatamente da q_1 e da q_2 nel punto dove si trova la carica q_3.
2. $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.
   Vale il principio di sovrapposizione dei campi elettrici!
3. $\mathbf{F} = q_3 \mathbf{E}_{\text{tot}}$.

Campo elettrico creato da una carica Q in un punto P dello spazio individuato dal vettore $\mathbf{r}$ che va da Q a P:

$$\mathbf{E} = K\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$$\mathbf{E}_1(P) = K\frac{q_1}{r_{13}^2}\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \qquad \mathbf{E}_2(P) = K\frac{q_2}{r_{23}^2}\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}$$

$$E_1(P) = 9\,\mathrm{N/C} \qquad E_2(P) = 45\,\mathrm{N/C}$$



$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

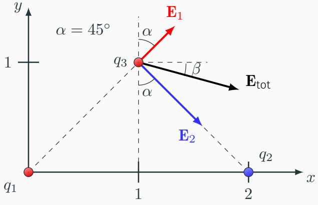
La determinazione di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ richiede la conoscenza delle componenti di $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ lungo gli assi x ed y.

$$E_{1x} = E_1 \sin\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$

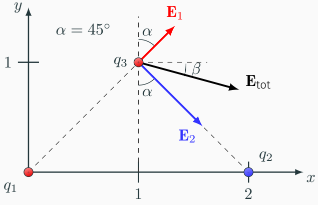
$$E_{1y} = E_1 \cos\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{2x} = E_2 \sin\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{2y} = E_2 \cos\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$



$$E_{1x} = E_1 \sin\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{1y} = E_1 \cos\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$



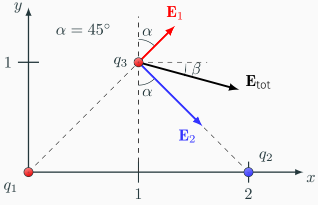
$$E_{2x} = E_2 \sin\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{2y} = E_2 \cos\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$

Le componenti di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,x} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{i} \simeq (+38{,}2\,\mathrm{N/C})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,x} \simeq 38{,}2\,\mathrm{N/C}$$
$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,y} = (E_{1y} - E_{2y})\mathbf{j} \simeq (-25{,}4\,\mathrm{N/C})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,y} \simeq 25{,}4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{1x} = E_1 \sin\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{1y} = E_1 \cos\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{2x} = E_2 \sin\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{2y} = E_2 \cos\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$



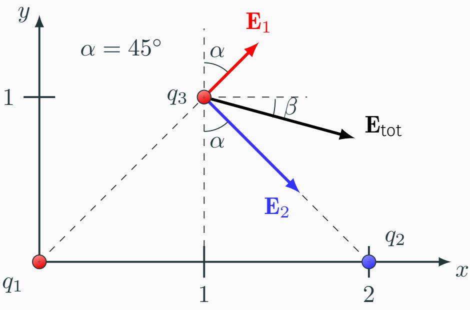
Le componenti di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,x} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{i} \simeq (+38{,}2\,\mathrm{N/C})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,x} \simeq 38{,}2\,\mathrm{N/C}$$
$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,y} = (E_{1y} - E_{2y})\mathbf{j} \simeq (-25{,}4\,\mathrm{N/C})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,y} \simeq 25{,}4\,\mathrm{N/C}$$

In conclusione, modulo e direzione di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ e $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ sono determinati

$$E_{\text{tot}} = \sqrt{E^2_{\text{tot}\,x} + E^2_{\text{tot}\,y}} = 45{,}8\,\mathrm{N/C} \qquad \tan\beta = \frac{E_{\text{tot}\,y}}{E_{\text{tot}\,x}} \simeq 0,68 \to \beta \simeq 34°$$

$F_{\text{tot}} = q_3 E_{\text{tot}} = 4{,}6 \times 10^{-7}$ N diretta come $\mathbf{E}_{\text{tot}}$.



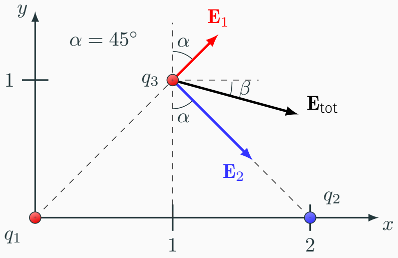
I moduli delle componenti di $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ lungo gli assi x ed y sono:

$$E_{1x} = E_1 \sin\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{1y} = E_1 \cos\alpha \simeq 6{,}4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{2x} = E_2 \sin\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$

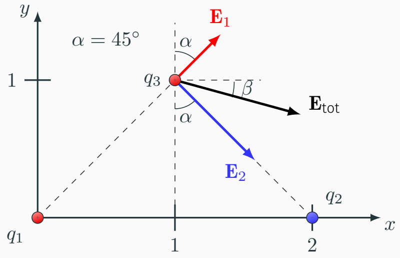
$$E_{2y} = E_2 \cos\alpha \simeq 31{,}8\,\mathrm{N/C}$$



Le componenti di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,x} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{i} \simeq (+38{,}2\,\text{N/C})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,x} \simeq 38{,}2\,\text{N/C}$$

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,y} = (E_{1y} - E_{2y})\mathbf{j} \simeq (-25{,}4\,\text{N/C})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,y} \simeq 25{,}4\,\text{N/C}$$



Le componenti di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ sono:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,x} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{i} \simeq (+38{,}2\,\text{N/C})\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,x} \simeq 38{,}2\,\text{N/C}$$

$$\mathbf{E}_{\text{tot}\,y} = (E_{1y} - E_{2y})\mathbf{j} \simeq (-25{,}4\,\text{N/C})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}\,y} \simeq 25{,}4\,\text{N/C}$$

In conclusione, modulo e direzione di $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ e $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ sono determinati

$$E_{\text{tot}} = \sqrt{E_{\text{tot}\,x}^2 + E_{\text{tot}\,y}^2} = 45{,}8\,\text{N/C} \qquad \tan\beta = \frac{E_{\text{tot}\,y}}{E_{\text{tot}\,x}} \simeq 0,68 \to \beta \simeq 34°$$

$F_{\text{tot}} = q_3 E_{\text{tot}} = 4{,}6 \times 10^{-7}$ N diretta come $\mathbf{E}_{\text{tot}}$.