Fondamenti di fisica generale - II lezione

Soluzione degli esercizi
della I prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

25 ottobre 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

I parte

Esercizio 1

Uno spostamento di $20\,\mathrm{m}$ viene eseguito nel piano xy. Si determinino le componenti dello spostamento lungo l'asse x e y se la direzione dello spostamento forma con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo di: (*a*) $70°$; (*b*) $120°$; (*c*) $250°$.

Esercizio 1

Uno spostamento di $20\,\mathrm{m}$ viene eseguito nel piano xy. Si determinino le componenti dello spostamento lungo l'asse x e y se la direzione dello spostamento forma con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo di: (*a*) $70°$; (*b*) $120°$; (*c*) $250°$.

$$x = r\cos\theta \qquad x = r\sin\theta \qquad r = 20\,\mathrm{m}$$

(*a*) $x = (20\,\mathrm{m})(\cos 70°) = 6{,}8\,\mathrm{m}$

$y = (20\,\mathrm{m})(\sin 70°) = 18{,}8\,\mathrm{m}$

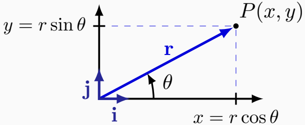
(*b*) $x = (20\,\mathrm{m})(\cos 120°) = -10{,}0\,\mathrm{m}$

$y = (20\,\mathrm{m})(\sin 120°) = 17{,}3\,\mathrm{m}$

(*c*) $x = (20\,\mathrm{m})(\cos 250°) = -6{,}8\,\mathrm{m}$

$y = (20\,\mathrm{m})(\sin 250°) = -18{,}8\,\mathrm{m}$

Componenti di un vettore



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esercizio 2

Si determini l'intensità e la direzione della somma dei due seguenti spostamenti complanari: 20 m a $0°$ e 10 m a $120°$, dove gli angoli sono calcolati rispetto alla direzione positiva dell'asse delle x.

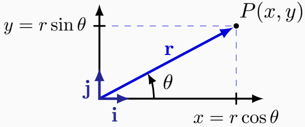
Esercizio 2

Si determini l'intensità e la direzione della somma dei due seguenti spostamenti complanari: $20\,\mathrm{m}$ a $0°$ e $10\,\mathrm{m}$ a $120°$, dove gli angoli sono calcolati rispetto alla direzione positiva dell'asse delle x.

Scomponendo ciascuno spostamento nelle sue componenti lungo l'asse x e y, il vettore somma ha componenti:

$$x = (20\,\mathrm{m})(\cos 0°) + (10\,\mathrm{m})(\cos 120°) = 15{,}0\,\mathrm{m}$$

$$y = (20\,\mathrm{m})(\sin 0°) + (10\,\mathrm{m})(\sin 120°) = 8{,}7\,\mathrm{m}$$



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 17{,}3\,\mathrm{m} \qquad \tan\theta = \frac{8{,}7\,\mathrm{m}}{15{,}0\,\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30°.$$

Esercizio 3

Una stanza ha il pavimento lungo 5 m e largo 6 m con il soffitto che si trova a 3 m dal pavimento. Si scriva l'espressione del vettore $\mathbf{D}$ che va da uno spigolo a quello diagonalmente opposto e se ne determini la sua lunghezza.

Esercizio 3

Una stanza ha il pavimento lungo $5\,\mathrm{m}$ e largo $6\,\mathrm{m}$ con il soffitto che si trova a $3\,\mathrm{m}$ dal pavimento. Si scriva l'espressione del vettore $\mathbf{D}$ che va da uno spigolo a quello diagonalmente opposto e se ne determini la sua lunghezza.

Ponendo l'origine di un sistema di riferimento xyz in uno spigolo, lo spigolo diagonalmente opposto avrà coordinate:

$$x = 5\,\mathrm{m} \qquad y = 5\,\mathrm{m} \qquad z = 3\,\mathrm{m}.$$

Di conseguenza, si ha:

$$\mathbf{D} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

e

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 8{,}4\,\mathrm{m}.$$

Esercizio 4

Si determini il prodotto scalare tra i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ degli assi x, y e z.

Esercizio 4

Si determini il prodotto scalare tra i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ degli assi x, y e z.

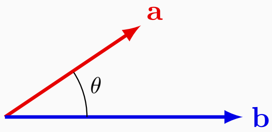
Poiché i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ hanno modulo unitario e sono mutuamente perpendicolari, si ha:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Esercizio 5

La posizione di una particella che si muove nello spazio è data da:

$$\mathbf{r}(t) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s})t + (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})t^2\right]\mathbf{i} + \left[(7{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^3\right]\mathbf{j}$$

dove r è espresso in metri e il tempo t in secondi, essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi x e y, rispettivamente. Si determini: (*a*) la posizione della particella nell'istante $t = 0$ nel quale ha inizio il moto; (*b*) lo spostamento della particella nell'intervallo compreso tra $t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$; (*c*) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo; (*d*) la velocità e l'accelerazione della particella all'istante $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$.

Esercizio 5

La posizione di una particella che si muove nello spazio è data da:

$$\mathbf{r}(t) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s})t + (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})t^2\right]\mathbf{i} + \left[(7{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^3\right]\mathbf{j}$$

dove r è espresso in metri e il tempo t in secondi, essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi x e y, rispettivamente. Si determini: (*a*) la posizione della particella nell'istante $t = 0$ nel quale ha inizio il moto; (*b*) lo spostamento della particella nell'intervallo compreso tra $t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$; (*c*) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo; (*d*) la velocità e l'accelerazione della particella all'istante $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$.

(*a*) Per $t = 0$ il vettore posizione della particella è dato da:

$$\mathbf{r}(0) = (7{,}0\,\mathrm{m})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad y = 7{,}0\,\mathrm{m} \quad z = 0.$$

(*b*) Nell'istante $t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ il vettore posizione della particella è:

$$\mathbf{r}(t_1) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s})(2{,}0\,\mathrm{s}) + (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(2{,}0\,\mathrm{s})^2\right]\mathbf{i} + \\ + \left[(7{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m/s^3})(2{,}0\,\mathrm{s})^3\right]\mathbf{j}$$

e quindi

$$\mathbf{r}(t_1) = (34\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (17\,\mathrm{m})\mathbf{j}$$

Il vettore posizione della particella nell'istante $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$ è:

$$\mathbf{r}(t_2) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s})(3{,}0\,\mathrm{s}) + (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(3{,}0\,\mathrm{s})^2\right]\mathbf{i} + \\ + \left[(7{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m/s^3})(3{,}0\,\mathrm{s})^3\right]\mathbf{j}$$

e quindi

$$\mathbf{r}(t_2) = (69\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (74\,\mathrm{m})\mathbf{j}$$

In conclusione, il vettore spostamento della particella nell'intervallo compreso tra $t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 3{,}0\,\mathrm{s}$ è

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = [(69\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (74\,\mathrm{m})\mathbf{j}] - [(34\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (17\,\mathrm{m})\mathbf{j}]$$

e quindi

$$\Delta\mathbf{r} = (35\,\mathrm{m})\mathbf{i} - 57\,\mathrm{m})\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 35\,\mathrm{m} \quad \Delta y = -57\,\mathrm{m}.$$

(c) Poiché la posizione della particella istante per istante è data da

$$\mathbf{r}(t) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s})t + (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})t^2\right]\mathbf{i} + \left[(7{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^3\right]\mathbf{j}$$

allora la velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s}) + (12\,\mathrm{m/s^2})t\right]\mathbf{i} + \left[(0\,\mathrm{m}) - (9{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^2\right]\mathbf{j}.$$

Poiché la velocità della particella istante per istante è

$$\mathbf{v}(t) = \left[(5{,}0\,\mathrm{m/s}) + (12\,\mathrm{m/s^2})t\right]\mathbf{i} - \left[(9{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^2\right]\mathbf{j}$$

allora l'accelerazione della particella è

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (12\,\mathrm{m/s^2})\mathbf{i} - (18\,\mathrm{m/s^3})t\mathbf{j}.$$

(*d*) Sostituendo $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$ nelle espressioni di $\mathbf{v}(t)$ e di $\mathbf{a}(t)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= [(5{,}0\,\mathrm{m/s}) + (36\,\mathrm{m/s})]\,\mathbf{i} - [(81{,}0\,\mathrm{m/s})]\,\mathbf{j} \\ &= (41\,\mathrm{m/s})\mathbf{i} - (81{,}0\,\mathrm{m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}(t) = (12\,\mathrm{m/s^2})\mathbf{i} - (54\,\mathrm{m/s^2})\mathbf{j}.$$

II parte

Esercizio 6

Un aeroplano parte da fermo e si muove lungo la pista con accelerazione costante prima di decollare. L'aereo si sposta di $600\,\mathrm{m}$ in $12\,\mathrm{s}$. Si determini: (a) l'accelerazione; (b) la velocità dopo $12\,\mathrm{s}$; (c) lo spazio percorso nell'ultimo secondo di moto.

Esercizio 6

Un aeroplano parte da fermo e si muove lungo la pista con accelerazione costante prima di decollare. L'aereo si sposta di $600\,\mathrm{m}$ in $12\,\mathrm{s}$. Si determini: (*a*) l'accelerazione; (*b*) la velocità dopo $12\,\mathrm{s}$; (*c*) lo spazio percorso nell'ultimo secondo di moto.

(*a*) Poiché si tratta di un moto uniformemente accelerato si ha:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad 600\,\mathrm{m} = \frac{1}{2} a (12\,\mathrm{s})^2 \quad \Rightarrow \quad a = 8{,}33\,\mathrm{m/s^2}.$$

(*b*) Nel moto uniformemente accelerato $v(t) = v_0 + at$; quindi indicando con v_{12} la velocità dell'aereo dopo $12\,\mathrm{s}$ si ha:

$$v_{12} = 0 + (8{,}33\,\mathrm{m/s^2})(12\,\mathrm{s}) = 100\,\mathrm{m/s}.$$

(*c*) L'ultimo secondo di moto è quello che intercorre tra gli istanti $t_1 = 11\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 12\,\mathrm{s}$; di conseguenza lo spazio percorso nell'ultimo secondo di moto è

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

dove $x(t_2) = 600\,\mathrm{m}$, mentre è

$$x(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = \frac{1}{2}(8{,}33\,\mathrm{m/s^2})(11\,\mathrm{s})^2 = 504\,\mathrm{m}.$$

In conclusione, si trova

$$\Delta x = (600\,\mathrm{m}) - (504\,\mathrm{m}) = 96\,\mathrm{m}.$$

Esercizio 7

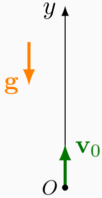
Un oggetto è lanciato verticalmente verso l'alto e ritorna nella posizione di partenza dopo $4\,\mathrm{s}$. (*a*) Con quale velocità iniziale è stato lanciato? (*b*) Quanto tempo impiega per salire all'altezza massima? (*c*) Qual è l'altezza massima a cui giunge? (*d*) Con quale velocità ritorna nella posizione iniziale?

Esercizio 7

Un oggetto è lanciato verticalmente verso l'alto e ritorna nella posizione di partenza dopo $4\,\mathrm{s}$. (*a*) Con quale velocità iniziale è stato lanciato? (*b*) Quanto tempo impiega per salire all'altezza massima? (*c*) Qual è l'altezza massima a cui giunge? (*d*) Con quale velocità ritorna nella posizione iniziale?

(*a*) Il moto è uniformemente accelerato lungo l'asse y; con riferimento alla figura a lato si può scrivere:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



con $y_0 = 0$ e $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.
Per $t = 4\,\mathrm{s}$ l'oggetto si troverà in $y = 0$, quindi si ha:

$$0 = v_0(4\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(-9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s})^2$$

Da cui si ricava

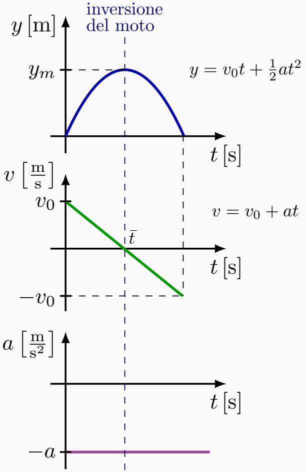
$$v_0 = 19{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

(b) Nell'istante $\bar{t}$ nel quale giunge alla massima altezza, y_m, la velocità è istantaneamente nulla.
Poiché è $v(t) = v_0 + at$ allora si ricava

$$v(\bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 + a\bar{t}$$

$$\bar{t} = -\frac{v_0}{a} = 2\,\text{s}.$$

L'oggetto impiega lo stesso tempo sia per salire alla quota massima sia per scendere dalla quota massima a quella di partenza. Perché?



(c) $y_m = y(\bar{t})$; quindi si ha:

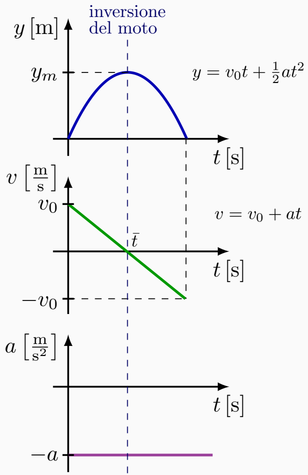
$$y_m = v_0\bar{t} + \frac{1}{2}a\bar{t}^2 = 19{,}6\,\text{m}.$$

(d) La velocità v_r con la quale ritorna nella posizione iniziale è quella dopo un tempo $t = 4\,\mathrm{s}$; si ha perciò:

$$v_r = 19{,}6\,\mathrm{m/s} + (-9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s})$$

$$v_r = -19{,}6\,\mathrm{m/s} = -v_0.$$

L'oggetto torna nella posizione di partenza con una velocità che ha l'intensità di quella di iniziale ma verso opposto.

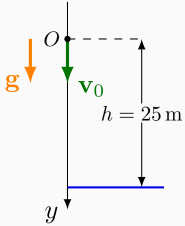


Esercizio 8

Un sasso è lanciato verticalmente verso il basso con una velocità iniziale di $8{,}0\,\mathrm{m/s}$ da un'altezza rispetto al suolo di $25{,}0\,\mathrm{m}$. Si determini: (*a*) il tempo impiegato a raggiungere il suolo; (*b*) la velocità con la quale viene raggiunto il suolo.

Esercizio 8

Un sasso è lanciato verticalmente verso il basso con una velocità iniziale di $8{,}0\,\mathrm{m/s}$ da un'altezza rispetto al suolo di $25{,}0\,\mathrm{m}$. Si determini: (*a*) il tempo impiegato a raggiungere il suolo; (*b*) la velocità con la quale viene raggiunto il suolo.



(*a*) Il moto è uniformemente accelerato lungo l'asse y; con riferimento alla figura si può scrivere:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

con $y_0 = 0$, $v_0 = 8{,}0\,\mathrm{m/s}$ e $a = g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

Se $\bar{t}$ è il tempo impiegato per raggiungere il suolo, deve essere $y(\bar{t}) = h$:

$$25{,}0\,\mathrm{m} = (8{,}0\,\mathrm{m/s})\bar{t} + \frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(\bar{t})^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = 1{,}58\,\mathrm{s}$$

(*b*) La velocità del sasso varia secondo la legge

$$v(t) = v_0 + at.$$

Poiché $\bar{t} = 1{,}58\,\mathrm{s}$ è il tempo impiegato a raggiungere il suolo, la velocità con cui il sasso toccherà il suolo è data da $v(\bar{t})$:

$$v(\bar{t}) = 8{,}0\,\mathrm{m/s} + (9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(1{,}58\,\mathrm{s})$$

da cui si ricava $v(\bar{t}) = 23{,}5\,\mathrm{m/s}$ che risulta positiva essendo diretta verso il basso.