Soluzioni

1) Simmetria + Gauss

$r < a$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\int \rho \, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\int_0^r \alpha r^2 4\pi r^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E(r) = \frac{\alpha r^3}{5\varepsilon_0}$$

$$E\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\alpha a^3}{5 \cdot 8 \cdot \varepsilon_0} \simeq 1{,}13 \cdot 10^{-1} \frac{V}{m}$$

$a < r < b \rightarrow E(r) = 0$, Conduttore;

$\Rightarrow$ Per Gauss su una sfera di raggio $r \Rightarrow Q_{TOT} = 0$

q_a sarà uguale e opposta alla carica contenuta nella sfera isolante.

$$q_a = -\int \rho \, d\tau = -\int_0^a \alpha r^2 4\pi r^2 dr = -\frac{4\pi a^5}{5}\alpha$$

dunque $q_a = -4{,}02\ pC$.

per $r > b$ sempre per Gauss

$$E(r) = \frac{\cancel{\int_{isolante} \rho\, d\tau + q_a} + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\downarrow$

Campo di carica puntiforme

$$\Rightarrow \quad V(r) = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_s = V(b) = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\Rightarrow \quad q_b = V_s\, 4\pi\varepsilon_0 b = 33{,}4\ pC$$

(2) Per ragioni di simmetria:

$$\vec{B} = B(x)\,\hat{y}.$$

Applichiamo il teorema di Ampere su rettangoli che circondano le lastre sul piano xy con due lati ortogonali alle lastre e due lati paralleli ad esse.

2.1 Lati paralleli alla lastra al di fuori della regione con corrente lì dove il campo deve essere nullo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} = 0$$

$$I_{conc} = iL + JLd$$

$$\Rightarrow \quad J = -\frac{i}{d} = -250 \frac{A}{m^2}$$

2.2 Lati paralleli alla lastra di cui uno ad $x<0$ ($\vec{B}=0$) e l'altro in x interno alla lastra $\Rightarrow$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + B(x)L = \mu_0 I_{conc} =$$

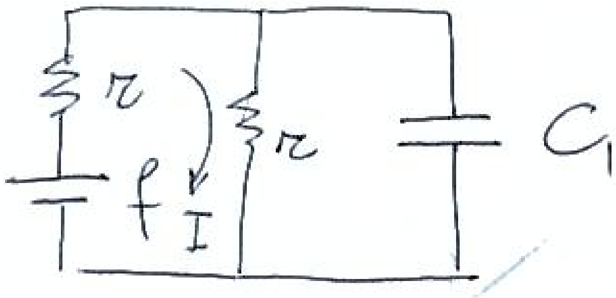
$$= \mu_0 (iL + JLx)$$

$$\Rightarrow B(x) = \mu_0 \left(i - i\frac{x}{d}\right) = \mu_0 i \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

③ $t \le 0$

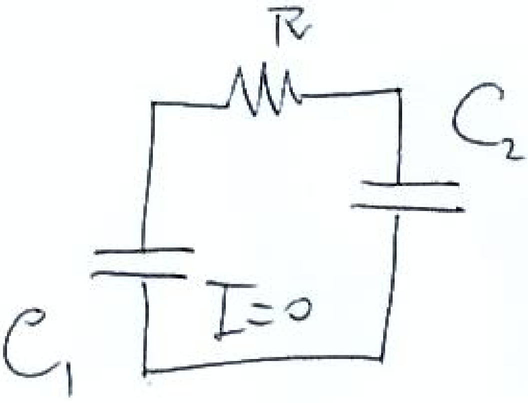
$$I = \frac{f}{2r}$$

$$\Delta V_{C_1} = I r$$



$$Q_1^0 = C_1 \Delta V_{C_1} = C_1 \frac{f}{2}$$

$t \to +\infty$



Conservazione della carica

$$\begin{cases} Q_1^\infty + Q_2^\infty = Q_1^0 \\ \text{ma:} \\ \dfrac{Q_1^\infty}{C_1} = \dfrac{Q_2^\infty}{C_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1^\infty = Q_1^0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad Q_2^\infty = Q_1^0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\boxed{U_c = \frac{Q^2}{2C}} \Rightarrow U_{diss} = U_{in} - U_{fin} =$$

$$= U_{C_1}^0 - \left(U_{C_1}^\infty + U_{C_2}^\infty\right) =$$

$$= \frac{(Q_1^0)^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right)$$

(4) $R = 4\rho \frac{\ell}{S} = 16\, m\Omega$

$\Phi(\vec{B_0}) = \vec{B_0} \cdot \hat{n}\ell^2 = \ell^2 B_0 \cos(\omega t)$

$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\ell^2 B_0 \omega}{R} \sin(\omega t)$

$W(t) = R i^2(t) = \frac{\ell^4 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t) \doteq$

$\doteq \frac{\ell^3 B_0^2 \omega^2 S}{4\rho} \sin^2(\omega t)$

$U_{giro} = \int_0^T W(t) dt = \frac{\pi \ell^3 B_0^2 \omega S}{4\rho} = \frac{\pi}{10} J$

(5) $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} \sim 30\, cm \gg \ell = 1\, cm$

$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B_x \cdot \ell^2 =$

$= -\frac{dE_y}{dt} \cdot \frac{\ell^2}{c} = -\frac{\ell^2}{c}\frac{d}{dt}\left[2E_0 \cos(\omega t)\right]$

$f_i = \frac{\ell^2}{c} 2E_0 \sin(\omega t)$; $f_i^{MAX} = \frac{10^{-4}}{3 \cdot 10^8} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi \cdot 10^9\, V$

$f_i^{MAX} \simeq 4 \cdot 10^{-5} V = 40 \mu V$ □