Sapienza Università di Roma

# Fondamenti di fisica generale - IV lezione

## Soluzione degli esercizi della II prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

15 novembre 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

## Esercizio 1

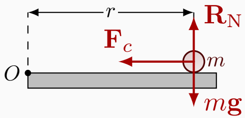
Un bambino di massa $22{,}5\,\mathrm{kg}$, seduto a $1{,}20\,\mathrm{m}$ dal centro di una giostra, si muove con una velocità di $1{,}10\,\mathrm{m/s}$. Determinare (*a*) l'accelerazione centripeta del bambino e (*b*) la forza orizzontale netta esercitata sul bambino.

## Esercizio 1

Un bambino di massa $22{,}5\,\mathrm{kg}$, seduto a $1{,}20\,\mathrm{m}$ dal centro di una giostra, si muove con una velocità di $1{,}10\,\mathrm{m/s}$. Determinare (*a*) l'accelerazione centripeta del bambino e (*b*) la forza orizzontale netta esercitata sul bambino.

L'accelerazione centripeta del bambino è:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}10\,\mathrm{m/s})^2}{1{,}20\,\mathrm{m}} = 1{,}008\,\mathrm{m/s^2} \simeq 1{,}01\,\mathrm{m/s^2}.$$




Per la seconda legge della dinamica, proiettata lungo il raggio della traiettoria circolare, la forza centripeta agente sul bambino vale:

$$F_c = ma_c = (22{,}5\,\mathrm{kg})(1{,}008\,\mathrm{m/s^2}) = 22{,}68\,\mathrm{N} \simeq 22{,}7\,\mathrm{N}.$$

## Esercizio 2

Una sfera di massa $m = 0{,}55\,\mathrm{kg}$ attaccata all'estremità di una sottile fune inestensibile e priva di massa ruota su una traiettoria circolare di raggio $R = 1{,}3\,\mathrm{m}$ poggiando su un piano orizzontale liscio. Si determini la massima velocità con la quale può ruotare la sfera sapendo che la corda si spezza quando la tensione supera il valore $T_{\mathrm{max}} = 75\,\mathrm{N}$.

## Esercizio 2

Una sfera di massa $m = 0{,}55\,\mathrm{kg}$ attaccata all'estremità di una sottile fune inestensibile e priva di massa ruota su una traiettoria circolare di raggio $R = 1{,}3\,\mathrm{m}$ poggiando su un piano orizzontale liscio. Si determini la massima velocità con la quale può ruotare la sfera sapendo che la corda si spezza quando la tensione supera il valore $T_{\max} = 75\,\mathrm{N}$.

La forza centripeta è fornita dalla forza (tensione) della fune che, per il secondo principio della dinamica è:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}.$$

Poichè la tensione non può superare il valore $T_{\max}$ allora si ha:

$$T_{\max} = m\frac{v_{\max}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = 13{,}31\,\mathrm{m/s} \simeq 13\,\mathrm{m/s}.$$

## Esercizio 3

Quanti giri al minuto deve fare una centrifuga se una particella a distanza $d = 7\,\text{cm}$ dall'asse di rotazione deve subire un'accelerazione centrifuga pari a 125000 volte l'accelerazione di gravità $g$?

## Esercizio 3

Quanti giri al minuto deve fare una centrifuga se una particella a distanza $d = 7\,\text{cm}$ dall'asse di rotazione deve subire un'accelerazione centrifuga pari a 125000 volte l'accelerazione di gravità $g$?

Poiché l'accelerazione centrifuga vale $a_c = \omega^2 r$ ne deriva che la velocità angolare della centrifuga è:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \sqrt{\frac{125 \times 10^3 g}{d}} = \sqrt{\frac{(125 \times 10^3)(9{,}8\,\text{m/s}^2)}{7 \times 10^{-2}\,\text{m}}} = 4{,}18{\times}10^3\ \text{rad/s}.$$

La frequenza di rotazione è:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}18 \times 10^3\ \text{rad/s}}{2 \cdot 3,14} \simeq 666\,\text{giri al secondo}$$

che corrispondono a circa $3{,}99 \times 10^4$ giri al minuto.

## Esercizio 4

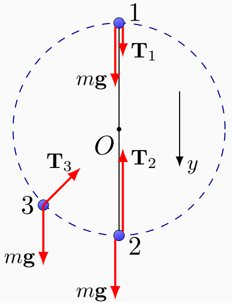
Una sfera di massa $m = 0{,}15\,\text{kg}$ attaccata all'estremità di una corda inestensibile di massa trascurabile e lunga $\ell = 1{,}10\,\text{m}$ viene fatta oscillare in un cerchio verticale. (*a*) Determinare la velocità minima che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che essa continui a muoversi in circolo. (*b*) Calcolare la tensione della corda alla base dell'arco, supponendo che la sfera si muova al doppio della velocità della parte (*a*).

## Esercizio 4

Una sfera di massa $m = 0{,}15\,\mathrm{kg}$ attaccata all'estremità di una corda inestensibile di massa trascurabile e lunga $\ell = 1{,}10\,\mathrm{m}$ viene fatta oscillare in un cerchio verticale. (*a*) Determinare la velocità minima che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che essa continui a muoversi in circolo. (*b*) Calcolare la tensione della corda alla base dell'arco, supponendo che la sfera si muova al doppio della velocità della parte (*a*).

La sfera si muove lungo una traiettoria circolare posta in un piano verticale, ma il moto non è uniforme a causa della forza peso. Il raggio è assunto costante, ma il modulo della velocità è diverso da punto a punto. L'accelerazione del moto ha sia una componente centripeta che una componente tangenziale.

Solamente nei punti superiore $1$ e inferiore $2$ della traiettoria le forze agenti sulla massa (peso $m\mathbf{g}$ e tensione della fune $\mathbf{T}$) sono tutte dirette radialmente: in tali punti l'accelerazione deve essere tutta centripeta. In tutti gli altri punti è presente sia accelerazione centripeta che tangenziale (ad esempio, nel punto $3$).

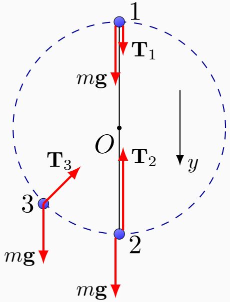



($a$) La seconda legge della dinamica quando la sfera si trova nel punto $1$ proiettata lungo la verticale orientata verso il basso si scrive

$$mg + T_1 = m\frac{v_1^2}{\ell}$$

Minore è la velocità $v_1$ con la quale la sfera passa per il punto $1$, minore è la tensione del filo in quel punto.

D'altra parte l'esercizio chiede la velocità *minima* che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che la palla continui a muoversi in circolo. Ma il moto è circolare solo se la corda è sotto tensione: se la tensione $T_1$ scompare (perché $v_1$ è troppo piccola) la corda può afflosciarsi e il moto della sfera non sarà più circolare.



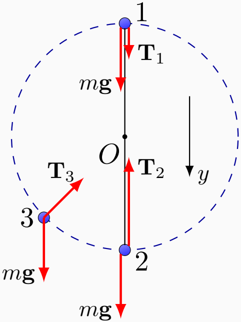

Pertanto, il valore minimo di $v_1$ si avrà quando $T_1 = 0$: per tale valore minimo della velocità è sufficiente la sola forza peso per fornire la necessaria forza centripeta. La seconda legge della dinamica diviene allora:

$$mg = m\frac{{v_1}^2_{\text{minima}}}{\ell} \quad \Rightarrow \quad {v_1}_{\text{minima}} = \sqrt{g\ell} = 3{,}28\,\text{m/s}.$$

Questa è la velocità minima della sfera sulla sommità della traiettoria che garantisce alla sfera di muoversi di moto circolare.

(*b*) Nel punto più basso della traiettoria, le forze sono dirette come mostrato nella figura a lato. La seconda legge della dinamica per la sfera quando si trova nel punto 2, proiettata lungo la verticale orientata verso il basso si scrive:

$$-T_2 + mg = -m\frac{v_2^2}{\ell}$$




Ma, se come richiesto dall'esercizio, se deve essere $v_2 = 2v_{1_{\text{minima}}}$ dalla precedente relazione si ricava

$$T_2 = mg + m\frac{(2v_{1_{\text{minima}}})^2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 7{,}35\,\text{N}.$$

## Esercizio 5

Qual è l'intensità dell'accelerazione di un granello di argilla posto sul bordo di un tornio da vasaio che gira a 45 giri al minuto se il diametro della ruota è di $35\,\mathrm{cm}$?

## Esercizio 5

Qual è l'intensità dell'accelerazione di un granello di argilla posto sul bordo di un tornio da vasaio che gira a 45 giri al minuto se il diametro della ruota è di $35\,\mathrm{cm}$?

Il periodo del moto del granello, ovvero il tempo che impiega a fare un giro, è:

$$T = \frac{60\,\mathrm{s}}{45\,\mathrm{giri}} = 1{,}333\,\text{secondi/giro}.$$

La velocità con cui il granello si muove è:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 0{,}8249\,\mathrm{m/s}$$

e, di conseguenza, l'accelerazione centripeta vale

$$a_c = \frac{v^2}{r} = 3{,}888\,\mathrm{m/s^2} \simeq 3{,}9\,\mathrm{m/s^2}.$$

## Esercizio 6

Un secchio di massa $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ viene fatto roteare in un cerchio verticale di raggio $r = 1{,}20\,\mathrm{m}$. Nel punto più basso del suo moto la tensione nella fune che sostiene il secchio è $25{,}0\,\mathrm{N}$. (*a*) Si determini la velocità del secchio nel punto più basso della sua traiettoria. (*b*) A quale velocità minima deve muoversi il secchio nella parte superiore della traiettoria circolare in modo che la corda non si allenti?

## Esercizio 6

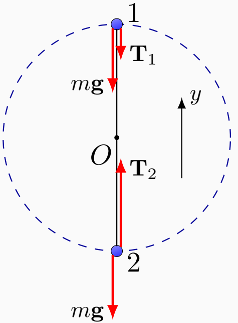
Un secchio di massa $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ viene fatto roteare in un cerchio verticale di raggio $r = 1{,}20\,\mathrm{m}$. Nel punto più basso del suo moto la tensione nella fune che sostiene il secchio è $25{,}0\,\mathrm{N}$. (*a*) Si determini la velocità del secchio nel punto più basso della sua traiettoria. (*b*) A quale velocità minima deve muoversi il secchio nella parte superiore della traiettoria circolare in modo che la corda non si allenti?

(*a*) Nel punto più basso della traiettoria, $2$, la seconda legge della dinamica proiettata lungo l'asse $y$ assume la forma:

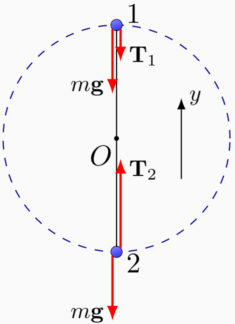
$$T_2 - mg = m\frac{v_2^2}{r}$$

ottenendo così

$$v_2 = \sqrt{\frac{r(T_2 - mg)}{m}} = 1{,}8\,\mathrm{m/s}.$$



($b$) Nel punto più alto della traiettoria, 1, la seconda legge della dinamica proiettata lungo l'asse $y$ assume la forma:




$$-T_1 - mg = -m\frac{v_1^2}{r}$$

cosicché si trova

$$v_1 = \sqrt{\frac{r(T_1 + mg)}{m}}$$

Se nel punto 1 la corda non si deve allentare, il valore minimo di $v_1$ per il quale accade ciò è quello per il quale $T_1 = 0$; si trova allora

$$v_1 = \sqrt{\frac{r(0 + mg)}{m}} = \sqrt{rg} = 3{,}43\,\mathrm{m/s}.$$

## Esercizio 7

Un corpo di massa $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ si muove di moto armonico con una frequenza $f = 2\,\mathrm{Hz}$ e un'ampiezza $A = 8\,\mathrm{mm}$. Si determini: (*a*) la massima velocità e accelerazione del corpo; (*b*) la massima forza cui il corpo è soggetto.

## Esercizio 7

Un corpo di massa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ si muove di moto armonico con una frequenza $f = 2\,\text{Hz}$ e un'ampiezza $A = 8\,\text{mm}$. Si determini: (*a*) la massima velocità e accelerazione del corpo; (*b*) la massima forza cui il corpo è soggetto.

La pulsazione del moto è $\omega = 2\pi f = 4\pi\ \mathrm{rad/s}$. Poiché per un generico moto armonico lungo l'asse $x$ si ha:

$$
\begin{aligned}
x(t) =& A\cos(\omega t + \varphi_0) \\
v(t) =& -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \\
a(t) =& -\omega^2 x(t)
\end{aligned}
$$

si ha:

$$v_{\max} = \omega A = 0{,}01\,\text{m/s} \qquad \text{e} \qquad a_{\max} = \omega^2 A = 1{,}25\,\text{m/s}^2.$$

Dalla seconda legge della dinamica si ricava

$$F_{\max} = m a_{\max} = 0{,}63\,\text{N}.$$

## Esercizio 8

Un corpo che si muove di moto armonico possiede una velocità massima $v_{\max} = 1{,}6$ m/s e un'accelerazione massima $a_{\max} = 8\pi$ m/s$^2$. Si determinino l'ampiezza $A$ e il periodo $T$ del moto.

## Esercizio 8

Un corpo che si muove di moto armonico possiede una velocità massima $v_{\max} = 1{,}6\,\mathrm{m/s}$ e un'accelerazione massima $a_{\max} = 8\pi\,\mathrm{m/s^2}$. Si determinino l'ampiezza $A$ e il periodo $T$ del moto.

Poiché per un generico moto armonico lungo l'asse $x$ si ha:

$$
\begin{aligned}
x(t) =& A\cos(\omega t + \varphi_0) \\
v(t) =& -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \\
a(t) =& -\omega^2 x(t)
\end{aligned}
$$

è possibile esprimere $a_{\max}$ e $v_{\max}$ in funzione di $A$ e $T$:

$$
\begin{aligned}
a_{\max} =& 8\pi\,\mathrm{m/s^2} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \\
v_{\max} =& 1{,}6\,\mathrm{m/s} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi il seguente sistema di due equazioni nelle incognite $A$ e $T$:

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi^2}{T^2} A = 8\pi \\ 1.6 = \dfrac{2\pi}{T} A. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$A = 1{,}02\,\mathrm{m} \qquad \text{e} \qquad T = 0{,}4\,\mathrm{s}$$