FISICA MATEMATICA (Ingegneria Civile)
IV APPELLO (12.07.2018) A.A.2017/18

COGNOME E NOME ..... N.Ro MATR. .....
LUOGO E DATA DI NASCITA .....

Sia $\mathcal{R}$ un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro C massa $\mathcal{M}$ e raggio r, che presenta una cavità circolare di raggio $r/2$ e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano A il centro della cavità e ξ l'asse solidale, dato da $(C, vers\ \overrightarrow{AC})$.

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo $\mathcal{R}$ è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia (x, y) tale piano, con y verticale e orientato verso l'alto.

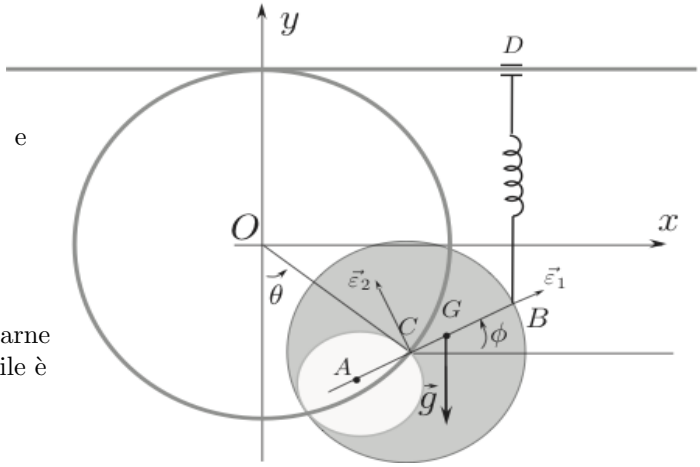
Il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano (x, y), avente centro nell'origine O del sistema di riferimento e raggio $R =: \beta r$ con $\beta > 1$.

Sia θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{OC}$ forma rispetto al versore $-\vec{e}_2$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, sia B il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative) $(r, 0, 0)$, e sia ϕ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{CB}$ forma rispetto al versore $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata al punto B e avente centro in un punto D del sistema di riferimento che scorre sull'asse $y = R$ in modo da essere costantemente sulla verticale per B (e cioè tale che $x_B \equiv x_D$).

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie θ e ϕ, si introduca la costante positiva ρ tale che $\mathcal{M}g =: \rho\, k\, R$, e si risolvano i seguenti punti usando le costanti $r,\ \rho,\ \beta$.



0) Dimostrare che sussistono le relazioni $\xi_G = r/6$, e $J_{G,\vec{e}_3} = \frac{37}{72}\,\mathcal{M}r^2$.

1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.

2) Determinare, con i particolari valori $\rho = 8$ e $\beta = 2$, le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità, mostrando che l'unica posizione stabile è $\mathcal{C}_1 = (\theta_1 = 0,\ \phi_1 = \pi/2)$.

3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).

4) Ricavare esplicitamente (in funzione delle $k,\ r,\ \rho,\ \beta$) le espressioni globali $(\vec{F}^v,\ \vec{M}^v_G)$ della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno $\left(\theta_0 = 0,\ \phi_0 = \pi/2,\ \dot{\theta}_0 = \sqrt{g/R},\ \dot{\phi}_0 = \sqrt{6\,g/R}\right)$, e specificare il valore assunto dalla costante c tale che $\vec{M}^v_G = c\,\mathcal{M}g\,r\,\vec{e}_3$.

5) Ancora con i valori $\rho = 8$ e $\beta = 2$, scrivere le equazioni di moto linearizzate nell'intorno della posizione $\mathcal{C}_1$, e l'equazione delle frequenze proprie $\nu_1,\ \nu_2$. Infine esprimere (formalmente) la soluzione di tali equazioni in funzione di arbitrari dati iniziali: $\left(\theta_0,\ \phi_0,\ \dot{\theta}_0,\ \dot{\phi}_0\right)$.

Riservato alla Commissione di Esame

SCRITTO _____

ORALE _____