Complementi di Fisica - IX Lezione

Soluzione degli esercizi 1, 4, 8, 9 e 10 della IV prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

5 aprile 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Esercizio 1

Qual è il minimo lavoro che una forza esterna deve fare per portare una carica $q = 3{,}00\,\mu$C dall'infinito fino a una distanza $d = 0{,}5$ m da una carica $Q = 20{,}0\,\mu$C?

Esercizio 1

Qual è il minimo lavoro che una forza esterna deve fare per portare una carica $q = 3{,}00\,\mu$C dall'infinito fino a una distanza $d = 0{,}5$ m da una carica $Q = 20{,}0\,\mu$C?

- Il lavoro minimo $L_{\min}$ è quello fatto da una forza esterna che, istante per istante, ha lo stesso modulo, ma verso opposto, della forza di Coulomb che tende a respingere le due cariche l'una dall'altra.
- Di conseguenza, il lavoro minimo della forza esterna sarà uguale e contrario a quello compiuto dalla forza di Coulomb quando la carica q viene portata dall'infinito fino alla distanza d da Q.
- Il lavoro della forza di Coulomb L_C è uguale variazione cambiata di segno dell'energia potenziale della carica q.

$$L_C = -\Delta U = U_{\text{iniz}} - U_{\text{fin}} = q[V(\infty) - V(d)] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$L_C \simeq -(3 \times 10^{-6}\,\mathsf{C})\frac{(9 \times 10^9\,\mathsf{N \cdot m^2/C^2})(2 \times 10^{-5}\,\mathsf{C})}{0{,}5\,\mathsf{m}} \simeq -1{,}08\,\mathsf{J}$$

In conclusione, è stato determinato il lavoro minimo.

$$L_{\min} = -L_C = 1{,}08\,\mathsf{J}.$$

Esercizio 4

Si determini il potenziale di una distribuzione piana di carica positiva infinitamente estesa con densità di carica σ. Si verifichi la congruità del risultato con l'andamento del campo elettrico creato dalla distribuzione di carica.

Esercizio 4

Si determini il potenziale di una distribuzione piana di carica positiva infinitamente estesa con densità di carica σ. Si verifichi la congruità del risultato con l'andamento del campo elettrico creato dalla distribuzione di carica.

Il potenziale in un generico punto b si determina a partire dalla conoscenza del campo elettrico $\mathbf{E}$ secondo la relazione

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \quad \Rightarrow \quad V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a$$

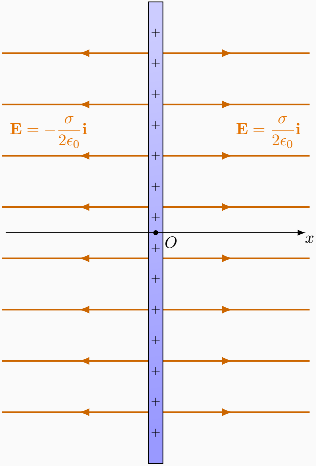
dove, di solito, è possibile porre uguale a zero il potenziale nel punto a arbitrariamente scelto.

Per una distribuzione di carica piana, uniforme e infinitamente estesa con densità di carica σ, il campo elettrico è uniforme, perpendicolare al piano della distribuzione (direzione x nella figura) e ha modulo

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Si può quindi esprimere il campo elettrico come:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{i}, & x > 0; \\ \mathbf{E} = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{i}, & x < 0. \end{cases}$$



(a) potenziale in un generico punto b di ascissa positiva $(x > 0)$

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(x) = -\int_{x_a}^x E dx + V_a = -E(x - x_a) + V_a$$

che, scegliendo il punto a nell'origine dell'asse x si semplifica in

$$V(x) = -Ex + V_a$$

(b) potenziale in un generico punto b di ascissa negativa $(x < 0)$

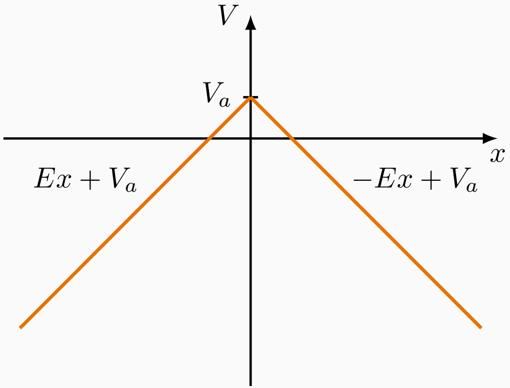
$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(x) = \int_{x_a}^x E dx + V_a = E(x - x_a) + V_a$$

che, scegliendo il punto a nell'origine dell'asse x si semplifica in

$$V(x) = Ex + V_a$$

In conclusione, il potenziale è stato determinato.

$$
\begin{cases}
V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\
V(x) = Ex + V_a, & x < 0.
\end{cases}
$$

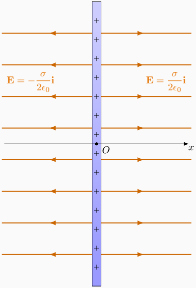


$$\begin{cases} V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\ V(x) = Ex + V_a, & x < 0. \end{cases}$$

Dato il potenziale V le componenti del campo elettrico sono date da:

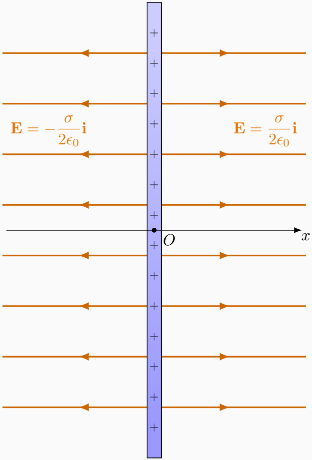
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Poiché il potenziale trovato dipende solo da x, il campo elettrico ha solo la componente lungo l'asse x.



$$\begin{cases} V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\ V(x) = Ex + V_a, & x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & x > 0; \\ E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -E = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & x < 0; \end{cases}$$



Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4\,$m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4$ m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Le quattro cariche distano tutte la stessa distanza $r = 2\sqrt{2}$ m dal centro C del quadrato. Indicando con 1, 2, 3 e 4 le cariche ai quattro angoli del quadrato, poiché il potenziale al centro del quadrato è la somma algebrica dei potenziali dovuti alle quattro cariche, si scriverà:

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4\,$m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Le quattro cariche distano tutte la stessa distanza $r = 2\sqrt{2}$ m dal centro C del quadrato. Indicando con 1, 2, 3 e 4 le cariche ai quattro angoli del quadrato, poiché il potenziale al centro del quadrato è la somma algebrica dei potenziali dovuti alle quattro cariche, si scriverà:

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

(a) Se tutte le cariche sono positive, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}(4)(2\,\mu\mathrm{C}) = 25{,}4\,\mathrm{kV}.$$

(b) Se tre cariche sono positive e una negativa, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}(2)(2\,\mu\mathrm{C}) = 12{,}7\,\mathrm{kV}.$$

(b) Se tre cariche sono positive e una negativa, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}(2)(2\,\mu\mathrm{C}) = 12{,}7\,\mathrm{kV}.$$

(c) Se due cariche sono positive e due negative, allora si ottiene

$$V(C) = 0.$$

Esercizio 9

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono separate da una distanza d. Si determini il rapporto q_1/q_2 sapendo che il potenziale è nullo in un punto a distanza $d' = d/3$ da q_1.

Esercizio 9

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono separate da una distanza d. Si determini il rapporto q_1/q_2 sapendo che il potenziale è nullo in un punto a distanza $d' = d/3$ da q_1.

Nel punto P a distanza $d' = d/3$ da q_1, e quindi a distanza $d'' = 2/3d$ da q_2, si sommano i potenziali creati dalle due cariche; di conseguenza, si può scrivere:

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d'} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d''} = 0.$$

Sostituendo i valori di d' e di d'' si ottiene:

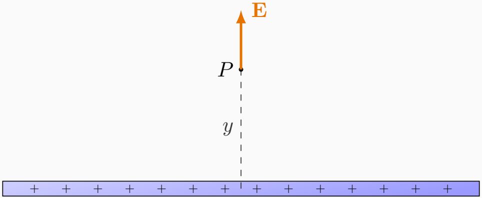
$$q + \frac{q'}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q'} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 10

Si determini il potenziale generato da un sottile filo rettilineo infinitamente lungo carico positivamente con densità lineica di carica uniforme λ a partire dal campo elettrico da esso creato.

Esercizio 10

Si determini il potenziale generato da un sottile filo rettilineo infinitamente lungo carico positivamente con densità lineica di carica uniforme λ a partire dal campo elettrico da esso creato.



Il campo elettrico di un filo infinitamente lungo è in ogni punto a distanza y dal filo, perpendicolare al filo e di modulo $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$, quindi

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\mathbf{j}$$

Il potenziale in un generico punto b si determina a partire dalla conoscenza del campo elettrico $\mathbf{E}$ secondo la relazione

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a$$

dove, di solito, è possibile porre uguale a zero il potenziale nel punto a arbitrariamente scelto.
Ponendo lo spostamento infinitesimo nella forma $\mathbf{ds} = dy\mathbf{j}$, si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = (\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\mathbf{j}) \cdot (dy\mathbf{j}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} dy$$

allora

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{y_a}^{y} \frac{dy}{y} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{y_a}{y}$$

avendo posto uguale a zero il potenziale nel punto a a distanza y_a dal filo (in questo caso non si può porre $V(\infty) = 0$!).