adalberto.sciubba@uniroma1.it

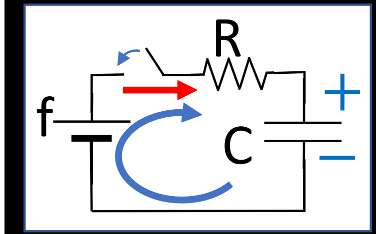
circuiti elettrici

correnti lentamente variabili (R e C)
considerazioni energetiche

CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

CARICA DEL CONDENSATORE

(inizialmente scarico)



$$\Delta V_C(0^+) = \Delta V_C(0^-) = \frac{Q(0^-)}{C} = \frac{Q_0}{C} = 0$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

$t > 0$ $\quad V_0 + f - R\,I(t) - \frac{Q(t)}{C} = V_0 \quad \rightarrow f = R\,I(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad \rightarrow f = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$

$$\rightarrow f\,C = RC\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) \quad \rightarrow f\,C - Q(t) = RC\frac{dQ(t)}{dt} \quad \rightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dQ(t)}{f\,C - Q(t)}$$

$$\rightarrow \int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^{Q(t)} \frac{dQ(t)}{f\,C - Q(t)} = \int_0^{Q(t)} \frac{-\,d[f\,C - Q(t)]}{f\,C - Q(t)} = -\int_0^{Q(t)} d\ln[f\,C - Q(t)]$$

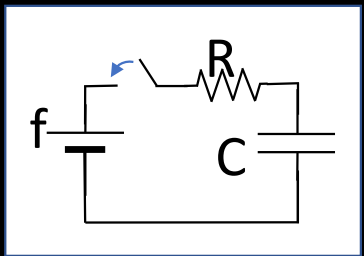
$$\rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln\left(\frac{f\,C - Q(t)}{f\,C - 0}\right) \rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{f\,C - Q(t)}{f\,C}\right) \rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{f\,C - Q(t)}{f\,C}$$

$$\rightarrow f\,C\,e^{-\frac{t}{RC}} = f\,C - Q(t)$$

$$\boxed{Q(t) = f\,C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$$

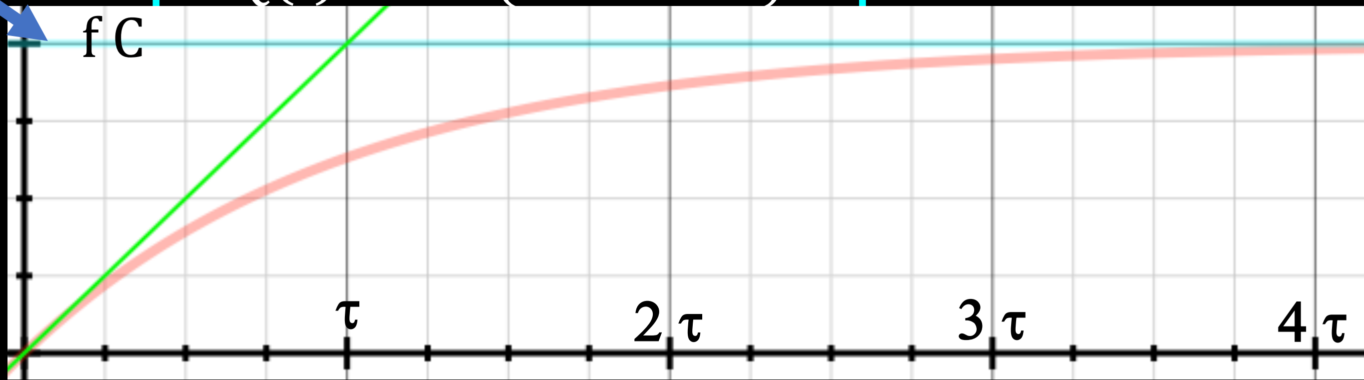
CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

CARICA DEL CONDENSATORE
(inizialmente scarico)



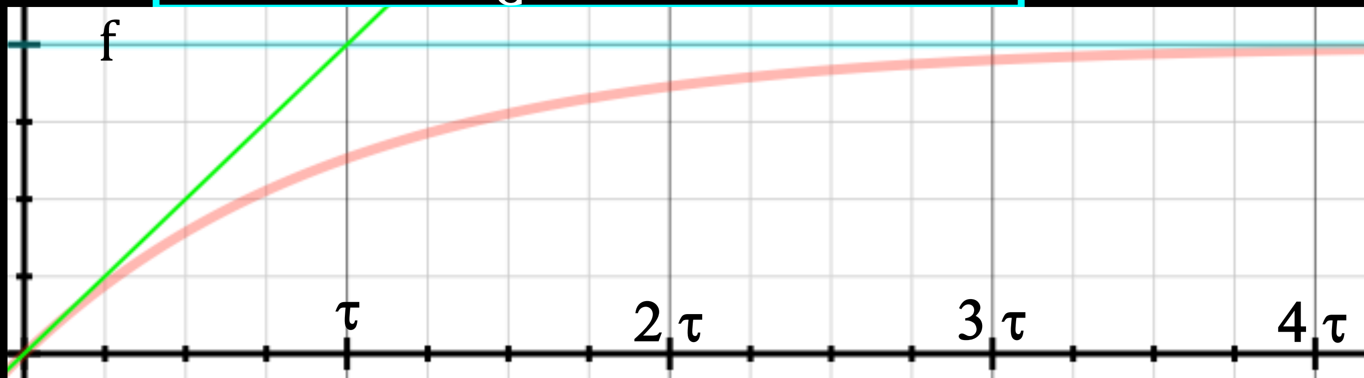
valore asintotico

$$Q(t) = f\,C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



tangente nell'origine

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = f\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



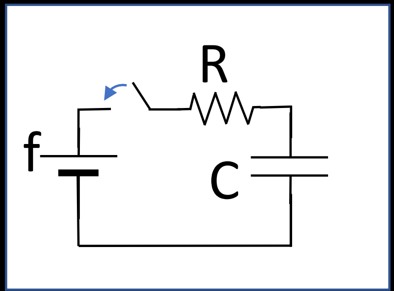
$RC = \tau$

costante di tempo del circuito

CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

CARICA DEL CONDENSATORE (inizialmente scarico)

$$Q(t) = f\,C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



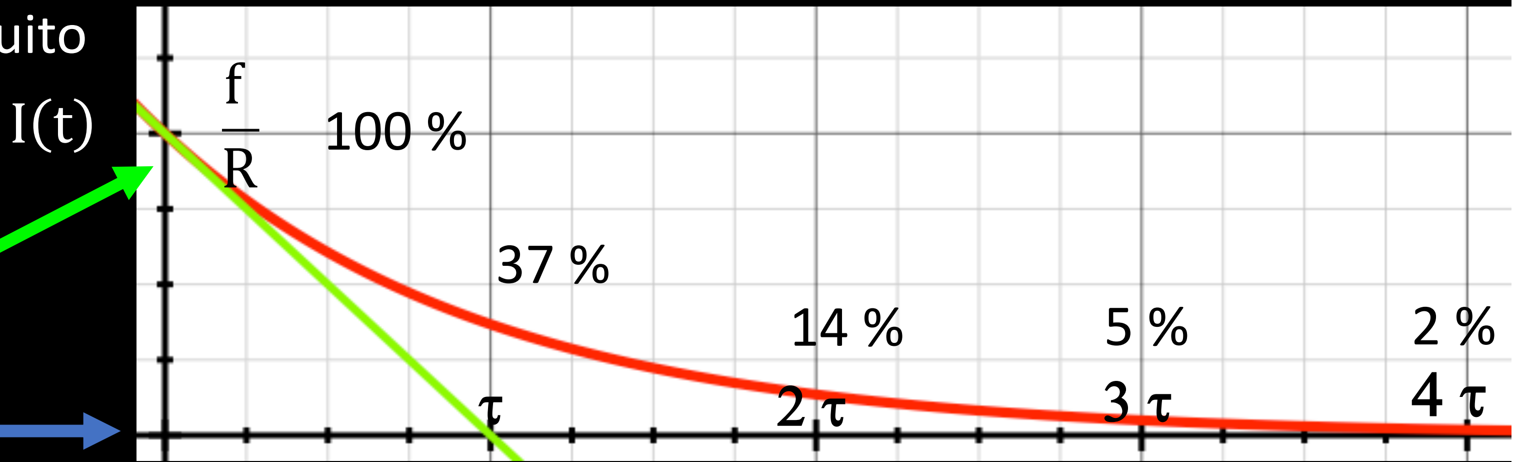
$$\boxed{I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{f\,C}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{f}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

RC = τ

costante di tempo del circuito

tangente nell'origine

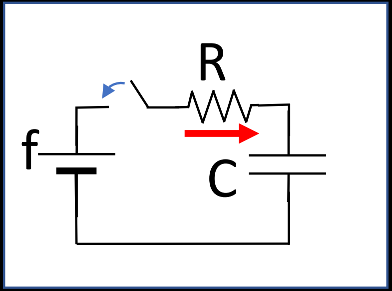
valore asintotico



CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

CARICA DEL CONDENSATORE

(inizialmente scarico)



$$Q(t) = f\,C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\boxed{I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{f\,C}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{f}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

più direttamente

$$I(t) = \frac{f - \frac{Q(t)}{C}}{R} = \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC} \rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = 0 - \frac{I(t)}{RC} \rightarrow \frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

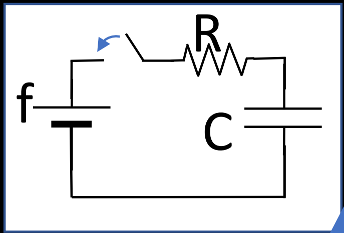
$$\int_{I_0}^{I(t)} d\ln I(t) = \int_0^t -\frac{dt}{RC} \rightarrow \ln\frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{RC} \rightarrow \frac{I(t)}{I_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow I(t) = I_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(0^+) = \frac{f - \frac{Q(0^+)}{C}}{R} = \frac{f}{R} - \frac{0}{RC} = \frac{f}{R}$$

$$\boxed{\rightarrow I(t) = \frac{f}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI: POTENZA

CARICA DEL CONDENSATORE (inizialmente scarico)



$$\Delta V_C(t) = f\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

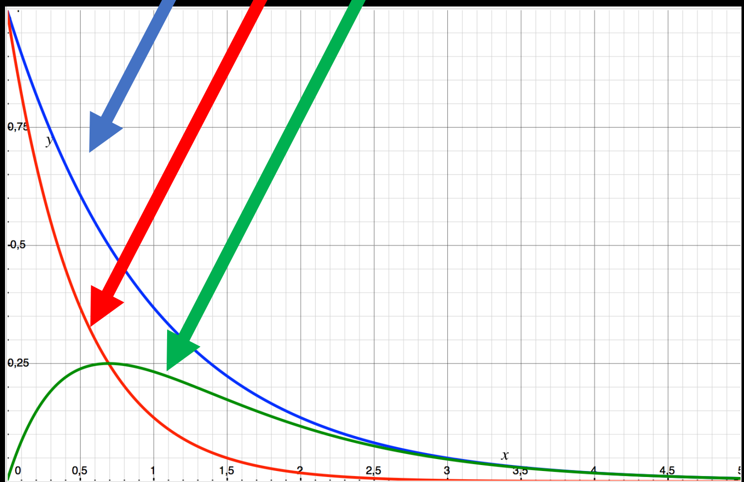
$$I(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$P_G = f\,I(t) = f\,\frac{f}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{f^2}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$P_R = R\,I^2(t) = R\,\frac{f^2}{R^2}\,e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{f^2}{R}\,e^{-\frac{2t}{RC}}$$

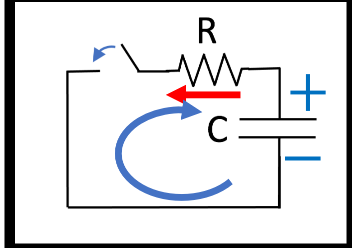
$$P_C = \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\,C\,\Delta V_C(t)^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}\,C\,2\,\Delta V_C(t)\,\frac{d\,\Delta V_C(t)}{dt} > 0$$

$$= C\,f\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,\frac{f}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{f^2}{R}\,(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}})$$



CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

SCARICA DEL CONDENSATORE
(asintoticamente scarico)



$$\Delta V_C(0^+) = \Delta V_C(0^-) = \Delta V_0 = \frac{Q_0}{C} \neq 0$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

$t > 0$ $\quad V_0 + R\,I(t) - \frac{Q(t)}{C} = V_0 \quad \rightarrow R\,I(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \rightarrow -R\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{C}$

$$\rightarrow \frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC} \quad \rightarrow -\frac{dt}{RC} = \frac{dQ(t)}{Q(t)} \quad \rightarrow \int_0^t -\frac{dt}{RC} = \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ(t)}{Q(t)} = \int_{Q_0}^{Q(t)} d\ln Q(t)$$

$$\rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) \quad \rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q(t)}{Q_0}$$

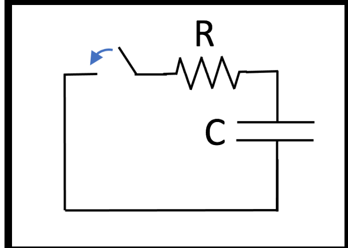
$$\boxed{Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\boxed{\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C}\, e^{-\frac{t}{RC}} = \Delta V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\boxed{I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\Delta V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

SCARICA DEL CONDENSATORE
(asintoticamente scarico)

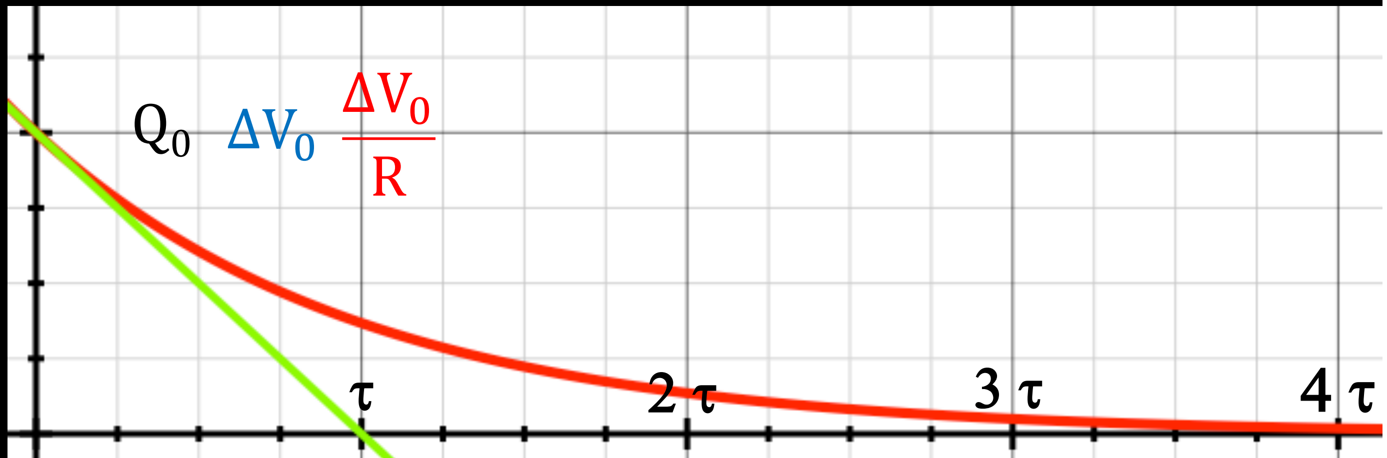


$$Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Delta V_C(t) = \Delta V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = \frac{\Delta V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$I(t)$ $\Delta V_C(t)$ $Q(t)$



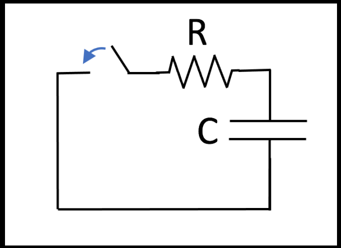
RC = τ

costante di tempo del circuito

CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI: POTENZA

SCARICA DEL CONDENSATORE

(asintoticamente scarico)



$$\Delta V_C(t) = \Delta V_0 \, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = \frac{\Delta V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$P_R = R\, I^2(t) = R \, \frac{\Delta V_0{}^2}{R^2} \, e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{\Delta V_0{}^2}{R} \, e^{-\frac{2t}{RC}}$$

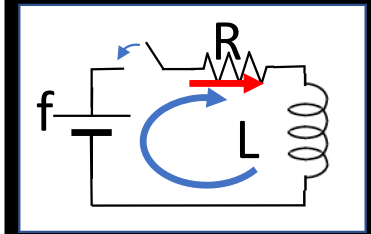
$$P_C = \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\, C \, \Delta V_C(t)^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}\, C \; 2 \, \Delta V_C(t) \, \frac{d\,\Delta V_C(t)}{dt} < 0$$

$$= C \;\; \Delta V_0 \, e^{-\frac{t}{RC}} \left[-\frac{\Delta V_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right] = -\frac{\Delta V_0{}^2}{R} \, e^{-\frac{2t}{RC}}$$

CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE

CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

$$f_{IND}(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}$$



$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = 0$$

$t > 0$ $\quad V_0 + f - R\,I(t) + f_{IND} = V_0 \quad \rightarrow f - R\,I(t) = L\frac{dI(t)}{dt} \quad \rightarrow \frac{f}{R} - I(t) = \frac{L}{R}\frac{dI(t)}{dt}$

$$\rightarrow \frac{R\,dt}{L} = \frac{dI(t)}{\frac{f}{R} - I(t)} = \frac{-d\left[\frac{f}{R} - I(t)\right]}{\frac{f}{R} - I(t)} \quad \rightarrow -\frac{dt}{L/R} = d\ln\left[\frac{f}{R} - I(t)\right]$$

$$\rightarrow \int_0^t -\frac{dt}{L/R} = \int_0^{I(t)} d\ln\left[\frac{f}{R} - I(t)\right] \quad \rightarrow -\frac{t}{L/R} = \ln\frac{\frac{f}{R} - I(t)}{\frac{f}{R}} \quad \rightarrow e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{\frac{f}{R} - I(t)}{\frac{f}{R}}$$

$$\rightarrow \frac{f}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{f}{R} - I(t) \qquad \boxed{\rightarrow I(t) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)}$$

Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

ESONERO

correzione in corso...

ancora un poco di pazienza, se ve ne è rimasta...

LUNEDÌ 26 APRILE ORE 10:05-11

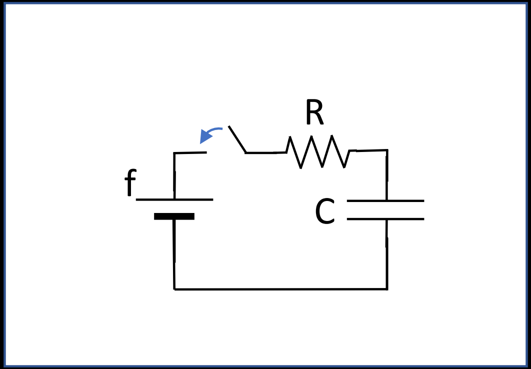
ESERCIZI su

circuiti RC in condizioni non stazionarie

considerazioni energetiche

CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0 + \int_0^t I(t')dt'}{C}$$



$$t < 0 \quad I(t) = 0 \quad \Delta V_C(t) = \frac{Q_0}{C}$$

prima della commutazione dell'interruttore il circuito è in condizioni stazionarie

$$t > 0 \quad V_0 + f - R\,I(t) - \frac{Q(t)}{C} = V_0$$

$$t = 0^+ \quad V_0 + f - R\,I(0^+) - \frac{Q(0^+)}{C} = V_0$$

$$\Delta V_C(0^+) = \frac{Q(0^+)}{C} = \frac{Q_0 + I(t)\cancel{dt}}{C} = \frac{Q_0}{C}$$

subito dopo la commutazione, la corrente non ha tempo sufficiente per variare significativamente la carica

la carica di un condensatore non cambia istantaneamente

CAPACITA'

CONDIZIONI STAZIONARIE (c.c.)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int_0^t I(t')dt' + Q_0}{C}$$

IN CONDIZIONI STAZIONARIE LE GRANDEZZE ELETTRICHE NON VARIANO NEL TEMPO quindi:

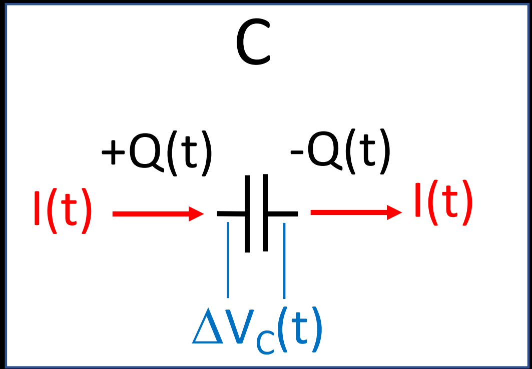
$I(t)$ deve essere costante → $I(t) = I_0$

$\Delta V(t)$ deve essere costante → $\int_0^t I(t')dt' = \int_0^t I_0 dt' = I_0\, t$ → $I_0 = 0$

$$\Delta V(t) = \frac{Q_0}{C}$$

IN CONDIZIONI STAZIONARIE NELLE CAPACITÀ NON SCORRE CORRENTE

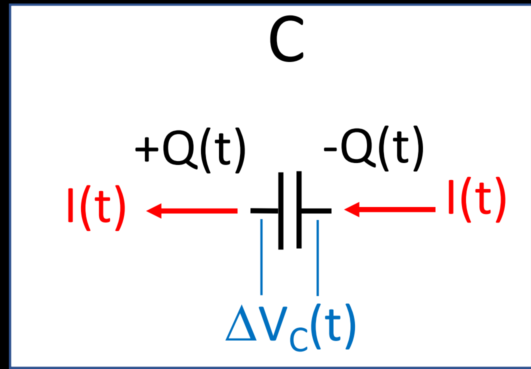
CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE
CORRENTI LENTAMENTE VARIABILI



la corrente aumenta la carica positiva del condensatore (CARICA)

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

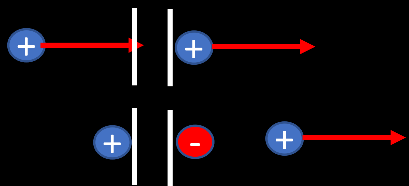
$$Q(t+dt) = Q(t) + I(t)\,dt$$



la corrente diminuisce la carica positiva del condensatore (SCARICA)

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{-dQ(t)}{dt}$$

$$Q(t+dt) = Q(t) - I(t)\,dt$$



fra le armature non c'è corrente di conduzione ma corrente di spostamento dovuta alla variazione di **E**