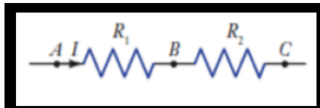
# Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

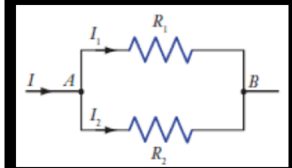
## circuiti elettrici

circuiti in condizioni quasi stazionarie

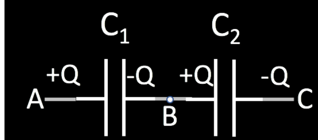
- cenni circuito oscillante dissipativo
- esercizio: pacemaker
- valori efficaci
- basi del regime sinusolidale



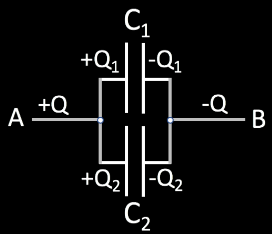

$$R_S = R_1 + R_2$$



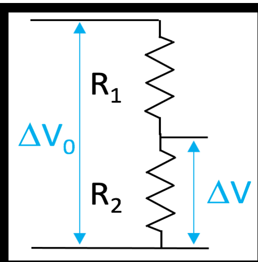

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R_p = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$$




$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_S = \frac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2}$$



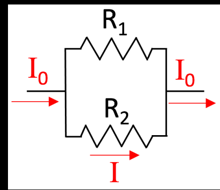

$$C_P = C_1 + C_2$$




$$\Delta V = \Delta V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2$$

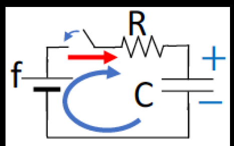
$$U = \frac{1}{2}\,L\,I^2$$




$$I = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$P_G = f\;I$$

$$P_R = R\,I^2$$

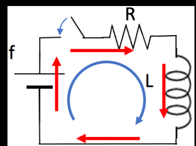



se $\Delta V_C(0) = Q(0)/C = 0$

$Q(t) = f\,C\,(1 - e^{-t/\tau})$

$I(t) = f/R\ e^{-t/\tau}$

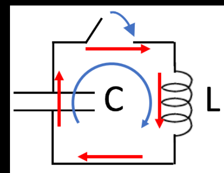
$\Delta V_C(t) = f\,(1 - e^{-t/\tau})$

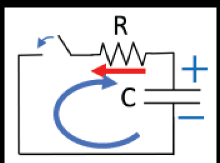



se $I(0) = 0$

$I(t) = I(\infty)\ (1-e^{-t/\tau}) = f/R\ (1-e^{-t/\tau})$

$\Delta V_L(t) = L\ dI/dt = L\ I(\infty)/\tau\ e^{-t/\tau} = f\ e^{-t/\tau}$



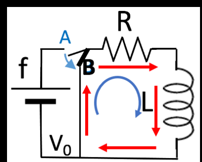




se $\Delta V_C(\infty) = Q(\infty)/C = 0$

$Q(t) = Q_0\ e^{-t/\tau}$

$I(t) = \Delta V_C(0)/R\ e^{-t/\tau}$

$\Delta V_C(t) = \Delta V_C(0)\ e^{-t/\tau}$




se $I(0) = I_0$ e $I_L(\infty) = 0$

$I(t) = I_0\ e^{-t/\tau}$

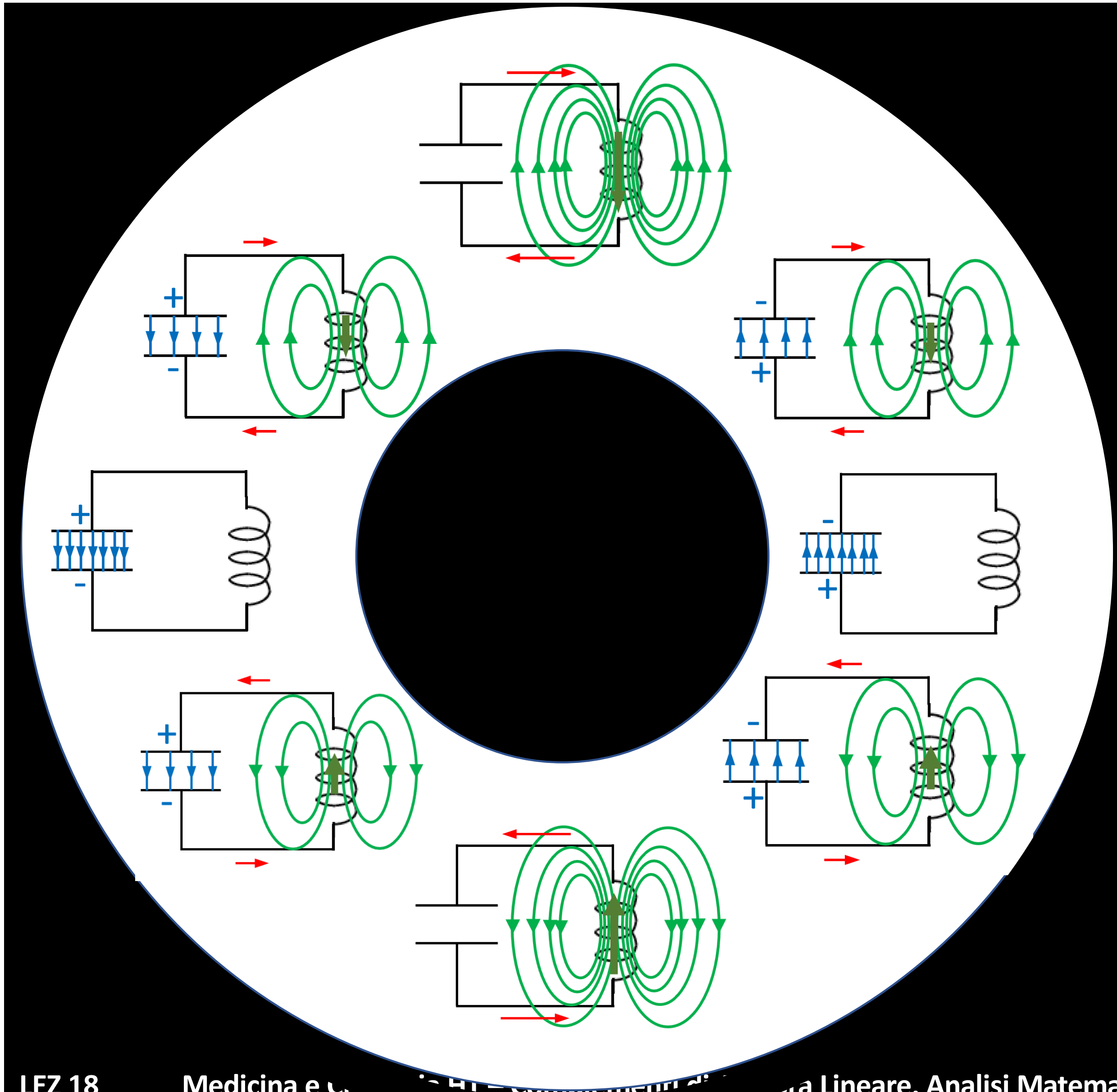
$\Delta V_L(t) = L\ dI/dt = L\ I_0/\tau\ e^{-t/\tau} = R\ I_0\ e^{-t/\tau}$

se $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0$

$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$

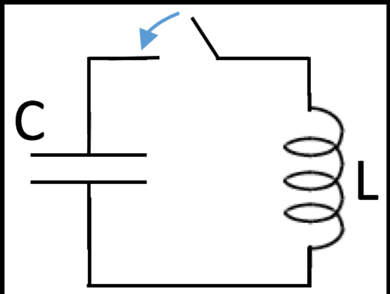
$I(t) = Q_0\omega \sin(\omega t)$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

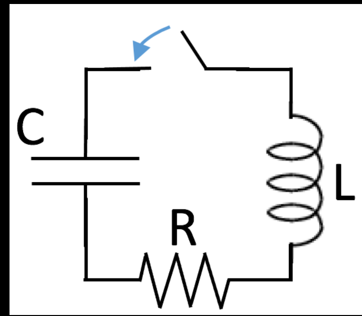


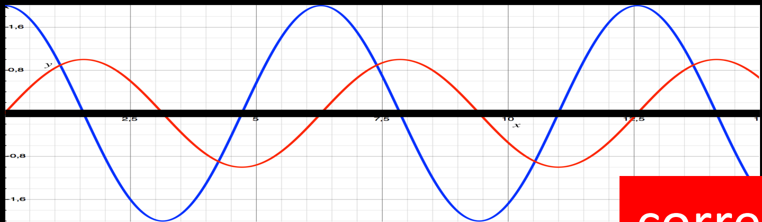
$U_0 = U_C(t) + U_L(t)$

$U_0 = U_C(t) + U_L(t) + \int_0^t RI(t)^2 dt$

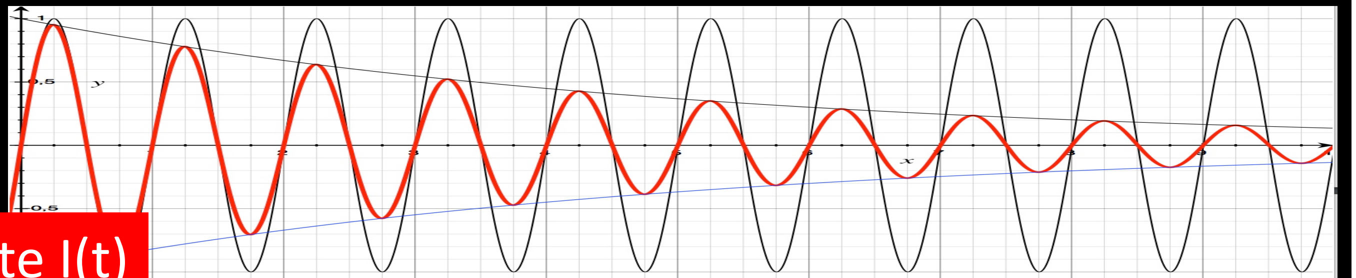


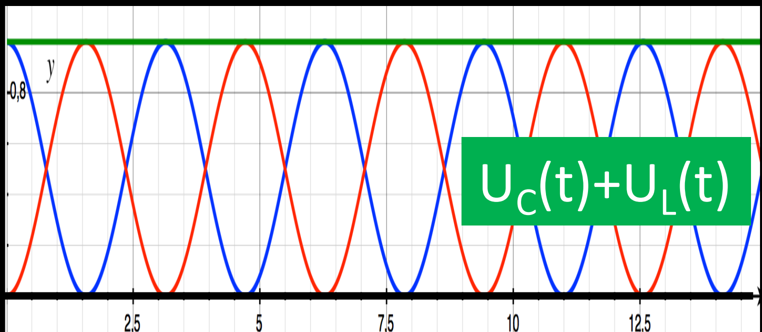

cosa succede se c'è una resistenza?



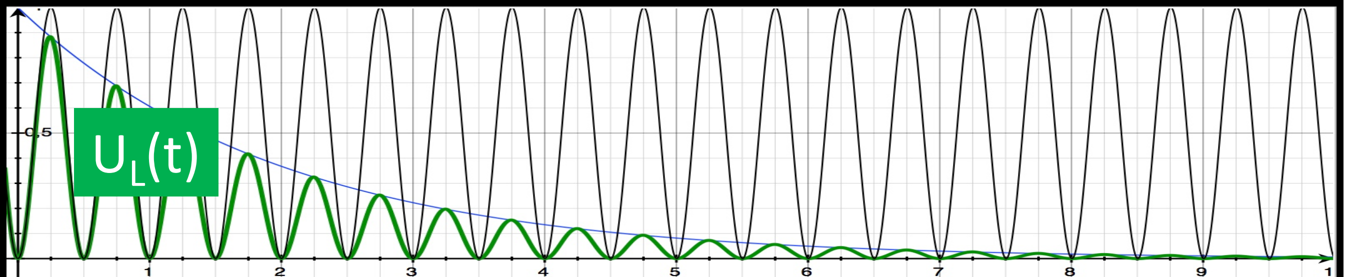



corrente I(t)



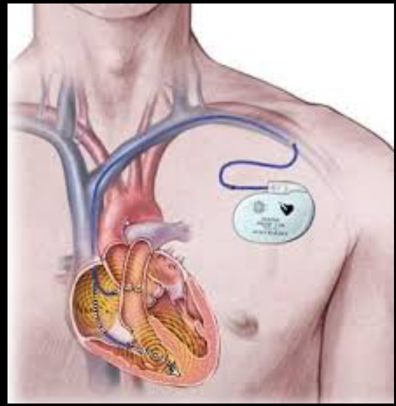



$U_C(t)+U_L(t)$

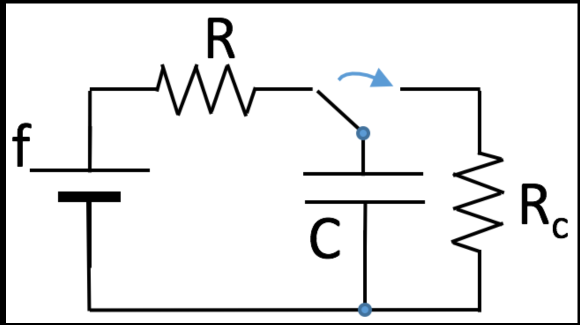


$U_L(t)$

## PACEMAKER (stimolatore cardiaco)



Gli elementi essenziali della sezione analogica del circuito di un pacemaker sono riportati nello schema in figura.
Un sistema di controllo agisce sul deviatore in base alla necessità di stimolare con una scarica di 25 μJ il muscolo cardiaco che presenta una resistenza Rc = 500 Ω.




**Determinare nell'ordine:**

- la costante di tempo del circuito di scarica supponendo che la corrente di scarica scenda in 3 ms al 5% del suo valore iniziale

$$I(t) = \frac{\Delta V_C(0)}{R_c}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow I(t^*) = I_0\, e^{-\frac{t^*}{\tau}} = 5\%\ I_0 = \frac{1}{20}\, I_0$$

$$I_0\, e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{1}{20} I_0 \rightarrow e^{\frac{t^*}{\tau}} = 20 \rightarrow \frac{t^*}{\tau} = \ln(20)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{t^*}{\ln(20)} = \frac{3\text{ ms}}{2{,}996} = 1\text{ ms}$$

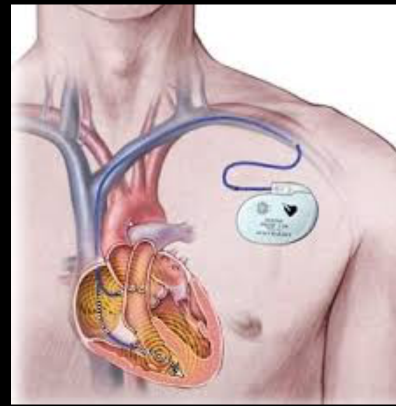
se $\Delta V_C(\infty) = Q(\infty)/C = 0$

$Q(t) = Q_0\, e^{-t/\tau}$

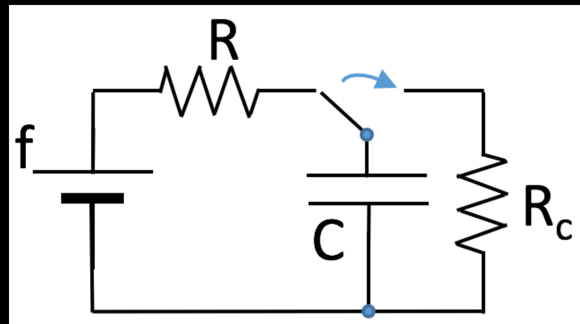
$I(t) = \Delta V_C(0)/R\, e^{-t/\tau}$

$\Delta V_C(t) = \Delta V_C(0)\, e^{-t/\tau}$

## PACEMAKER (stimolatore cardiaco)



Gli elementi essenziali della sezione analogica del circuito di un pacemaker sono riportati nello schema in figura.
Un sistema di controllo agisce sul deviatore in base alla necessità di stimolare con una scarica di 25 μJ il muscolo cardiaco che presenta una resistenza Rc = 500 Ω.




Determinare nell'ordine:

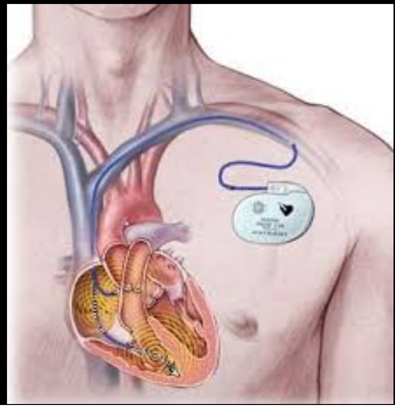
- il valore della capacità $$C = \frac{\tau}{R_C} = \frac{1\ \mathrm{ms}}{500\ \Omega} = 2\ \mu\mathrm{F}$$
- l'energia accumulata nel condensatore $$U = 25\ \mu\mathrm{J}$$
- la differenza di potenziale alla quale deve essere caricato il condensatore

$$\tau = RC = 1\ \mathrm{ms}$$

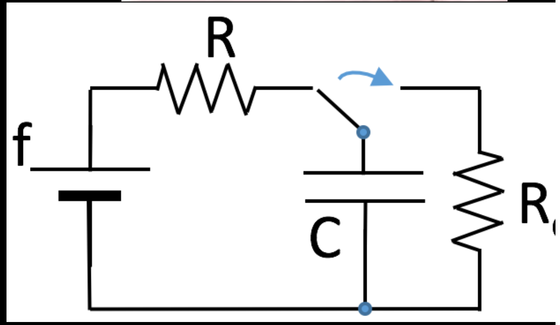
$$U = \frac{1}{2} C\, \Delta V_C^2(0) = \frac{1}{2} C\, f^2 = 25\ \mu\mathrm{J} \quad \rightarrow f = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2\ 25\ \mu\mathrm{J}}{2\ \mu\mathrm{F}}} = 5\ \mathrm{V}$$

$$U = \frac{1}{2} C\, \Delta V_C^2$$

## PACEMAKER (stimolatore cardiaco)



Un sistema di controllo agisce sul deviatore in base alla necessità di stimolare con una scarica di 25 μJ il muscolo cardiaco che presenta una resistenza Rc = 500 Ω.




Determinare nell'ordine:

- la corrente massima di scarica $\frac{\Delta V_C(0)}{R_C} = \frac{f}{R_C} = \frac{5\ \mathrm{V}}{500\ \Omega} = 10\ \mathrm{mA}$

- per consentire il funzionamento a 60 bpm (battiti per minuto) la resistenza R non può essere troppo grande. Quanto deve valere al massimo R se fra un battito e l'altro devono trascorrere almeno 10 costanti di tempo?

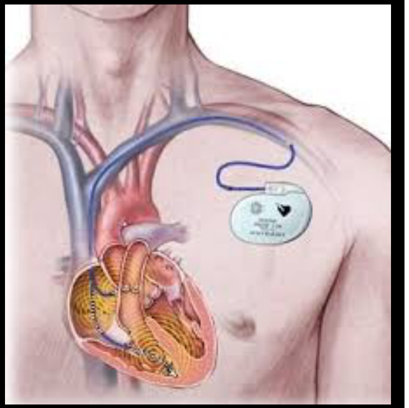
$1\ \mathrm{s} = 10\ \tau \rightarrow 0{,}1\ \mathrm{s} = R_{MAX}C \quad \rightarrow R_{MAX} = 0{,}1\ \mathrm{s}/2\ \mu\mathrm{F} = 5\ 10^4\ \Omega = 50\ \mathrm{k}\Omega$

$C = 2\ \mu\mathrm{F}$

$f = 5\ \mathrm{V}$

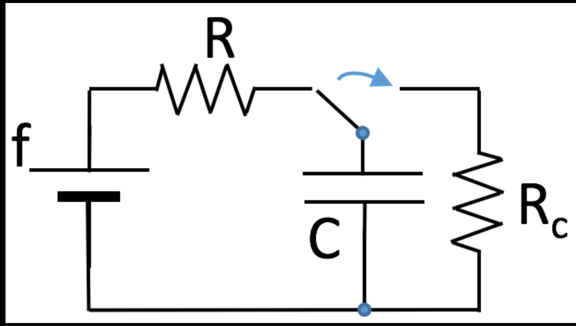
$I(t) = \Delta V_C(0)/R\ e^{-t/\tau}$

# PACEMAKER (stimolatore cardiaco)



Un sistema di controllo agisce sul deviatore in base alla necessità di stimolare con una scarica di 25 μJ il muscolo cardiaco che presenta una resistenza Rc = 500 Ω.

Determinare nell'ordine:




- l'energia erogata dalla batteria per ogni stimolo

  durante la fase di carica metà dell'energia viene dissipata nella resistenza e metà viene accumulata nella capacità: l'energia erogata dalla batteria è il doppio di 25 μJ → 50 μJ

- la carica che la batteria deve essere in grado di erogare in 7 anni di uso a 60 bpm

  7y x 365d/y x 24h/d x 3600s/h = 2,2 $10^8$ s → 2,2 $10^8$ cariche

  → 2,2 $10^8$ 50 μJ/5 V = 2,2 kC

  $f = U/q$

  2,2 kC/(3600 s/h) = 2,2/3,6 C/s h= 0,61 Ah = 610 mAh

# VALORI EFFICACI DI GRANDEZZE ALTERNATE ARMONICHE

Una grandezza f(t) si definisce **periodica** di periodo T se, per ogni valore di t, si ha $f(t+T) = f(t)$.

Una grandezza f(t) periodica si definisce **alternata** se $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)\,dt = 0$.

Nel caso di grandezze alternate **armoniche** si ha, ad esempio,

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t+\varphi) \quad o \quad f(t) = f_0 \cos(\omega t-\varphi) \quad o \ldots$$

dove $f_0$ è l'ampiezza dell'oscillazione che viene modulata dalla funzione armonica

ECG: una grandezza quasi periodica

# VALORI EFFICACI DI GRANDEZZE ALTERNATE ARMONICHE

ESEMPIO: una resistenza R dissipa, istante per istante, la potenza $RI(t)^2$.

$$P_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T RI^2(t)\,dt = R\left[\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt\right] = RI_{eff}^2$$

$$\boxed{I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt}}$$

$I_{eff}$ rappresenta la corrente continua che produce gli stessi effetti dissipativi medi della I(t) periodica.

P.es. se $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ si ha:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_0 \sin(\omega t)]^2\,dt} = I_0\sqrt{\frac{1}{\omega T}\int_0^{\omega T} \sin^2(x)\,dx} = I_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Analogamente, se $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ oppure $f(t) = f_0 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$

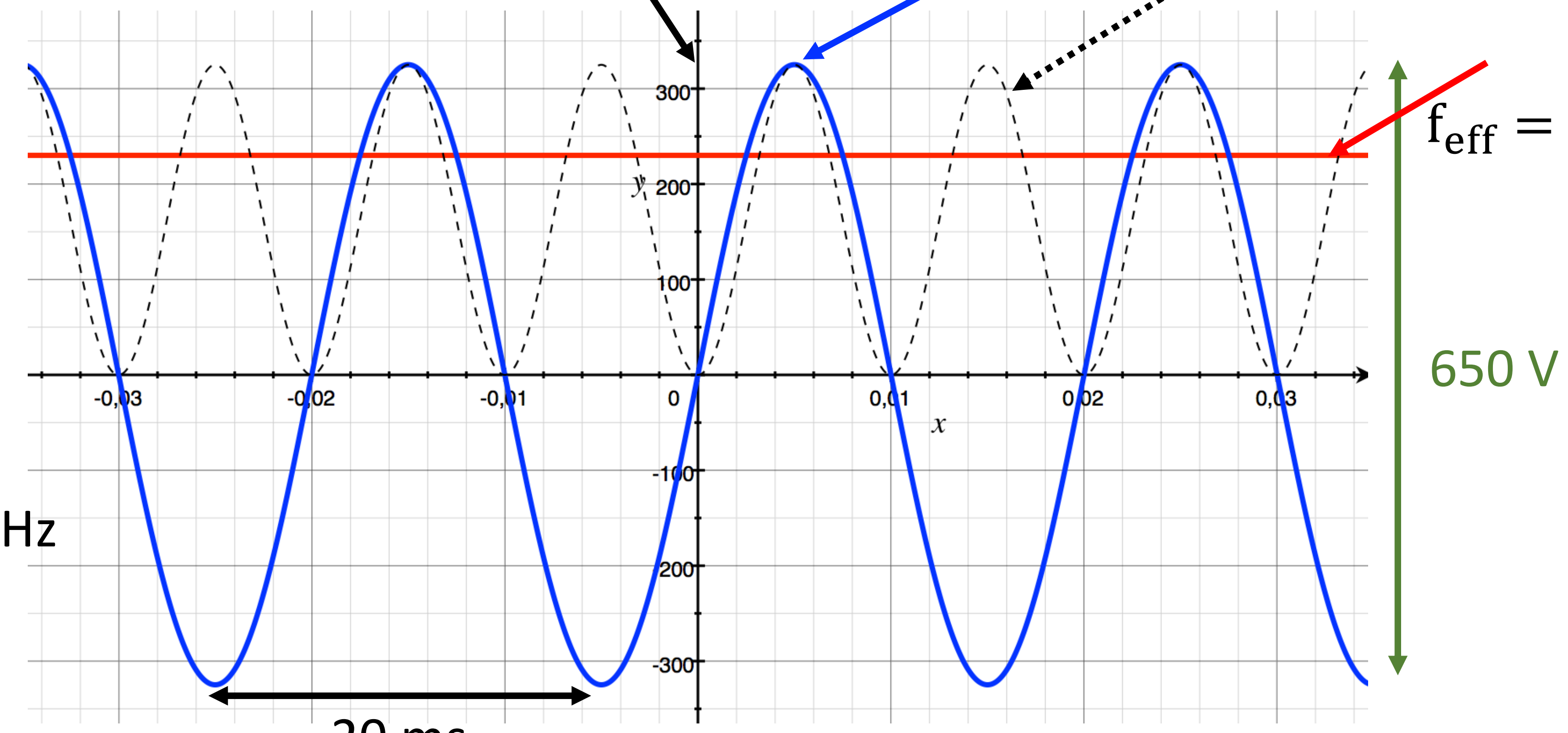
# VALORI EFFICACI DI GRANDEZZE ALTERNATE ARMONICHE

Per esempio la linea di alimentazione a 230 V (efficaci) corrisponde a un'ampiezza $f_0$ = 230 V x $\sqrt{2}$ = 325 V

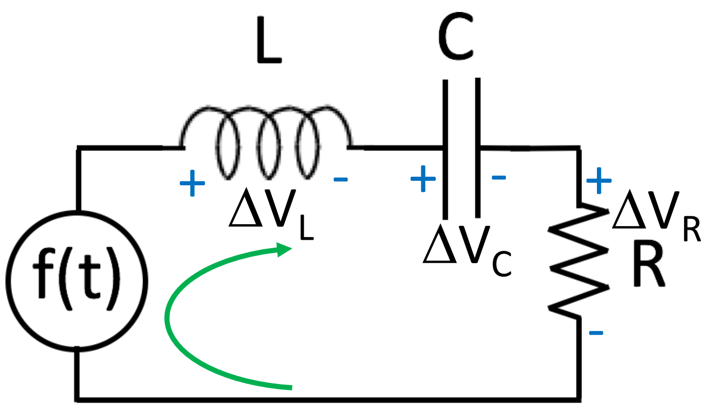
$$f(t) = f_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f_0 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$



# CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA c.a.




$$f(t) - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t Idt - RI = 0$$

$$f(t) = \Delta V_L(t) + \Delta V_C(t) + \Delta V_R(t)$$

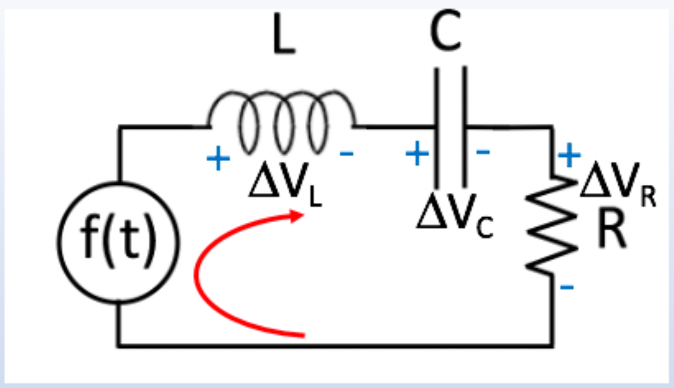
$\mathbf{f(t) = f_0 \sin(\omega t)}$ dopo un transitorio iniziale, a regìme si ha $\mathbf{I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)}$

$$\Delta \mathbf{V_L(t)} = L\frac{dI}{dt} = I_0\, \omega L \cos(\omega t + \varphi) = \mathbf{I_0\, \omega L} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\Delta \mathbf{V_C(t)} = \frac{1}{C}\int_0^t Idt = -\, I_0\, \frac{1}{\omega C}\cos(\omega t + \varphi) = \mathbf{I_0\, \frac{1}{\omega C}} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$$

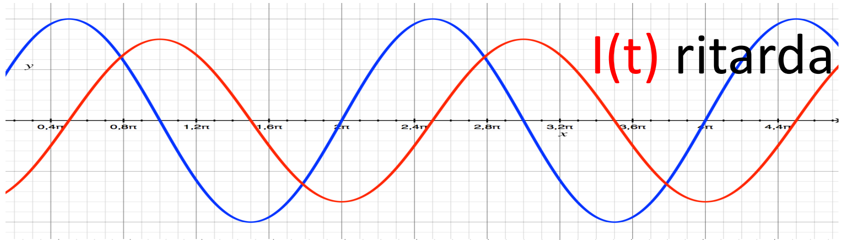
$$\Delta \mathbf{V_R(t)} = RI = I_0\, R \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{I_0\, R} \sin(\omega t + \varphi + \mathbf{0})$$

# CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA  c.a.



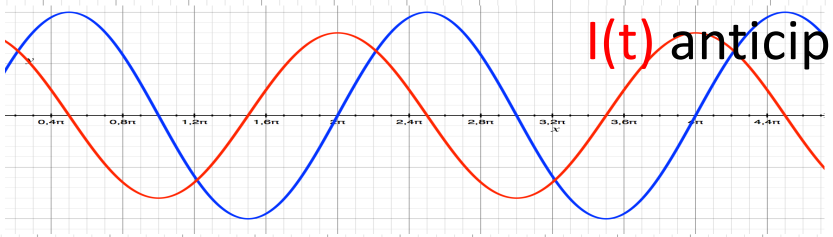

$$\mathbf{I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\Delta V_L(t) = I_0\, \omega L \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



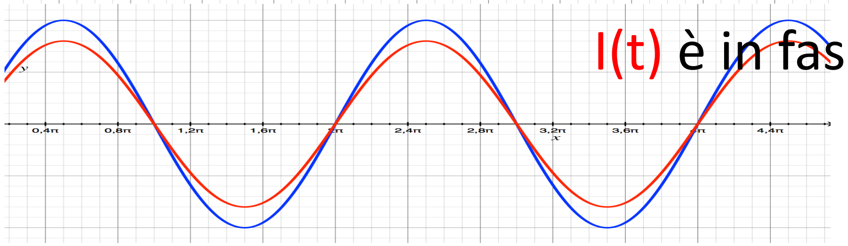
I(t) ritarda rispetto a $\Delta V_L(t)$

$$\Delta V_C(t) = I_0 \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$



I(t) anticipa rispetto a $\Delta V_C(t)$

$$\Delta V_R(t) = I_0\ R\ \sin(\omega t + \varphi + 0)$$



I(t) è in fase con $\Delta V_R(t)$

impedenza ($\omega$)     fase

adalberto.sciubba@uniroma1.it

**ESONERO**

**sabato 15/5 16:30-18:30**

**LUNEDÌ 10 MAGGIO ORE 10 - 11**

**esercizi su**

**correnti lentamente variabili**