

Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

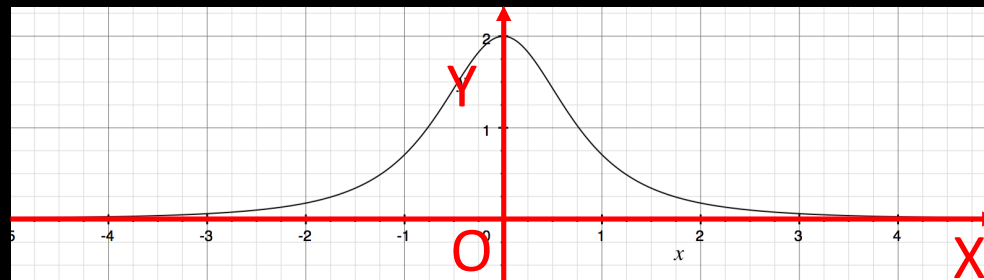
sorgenti, campi e loro interazioni

teorema di Gauss

un paio di integrali...

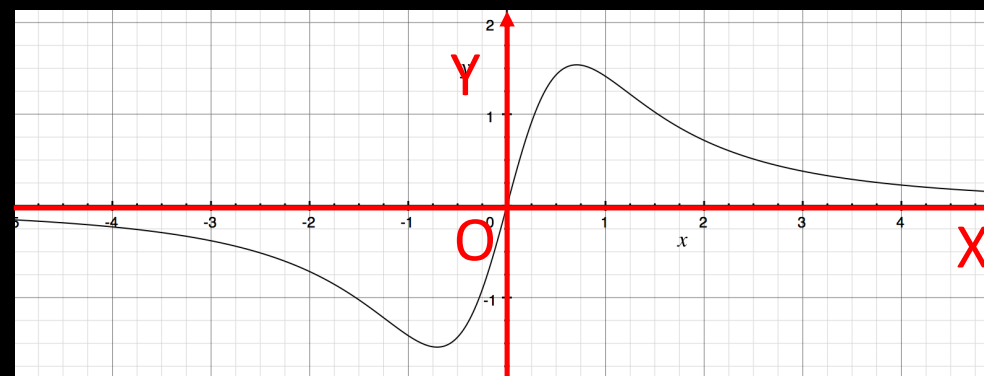
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$



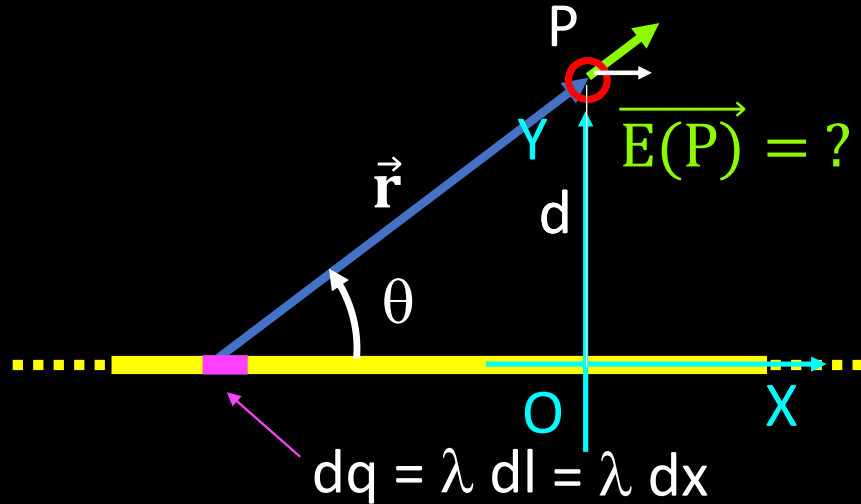
$$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$



campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico

X



$\lambda = dq/dl$ densità di carica lineare (uniforme)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2}$$

$$dE_x = dE \cos\theta = dE \frac{-x}{r} = dE \frac{-x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

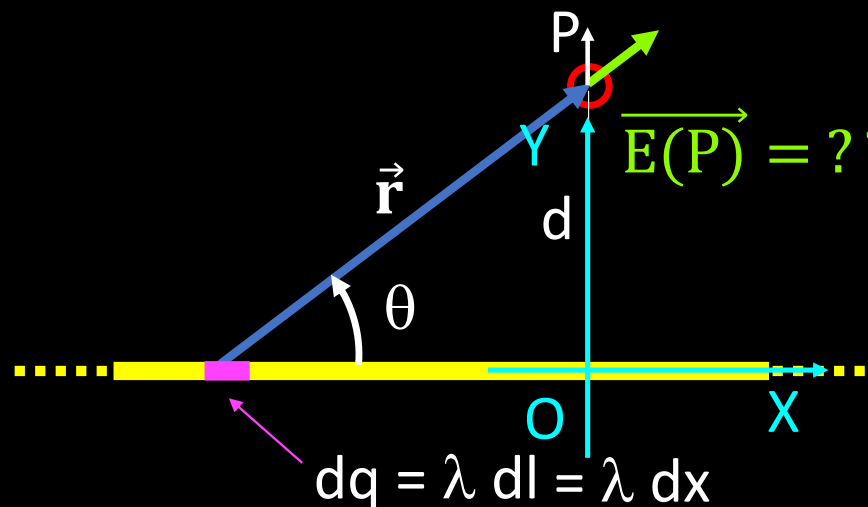
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{-x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + c$$

campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico

Y



$\lambda = dq/dl$ densità di carica lineare (uniforme)

$\vec{E}(P) = ???$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2}$$

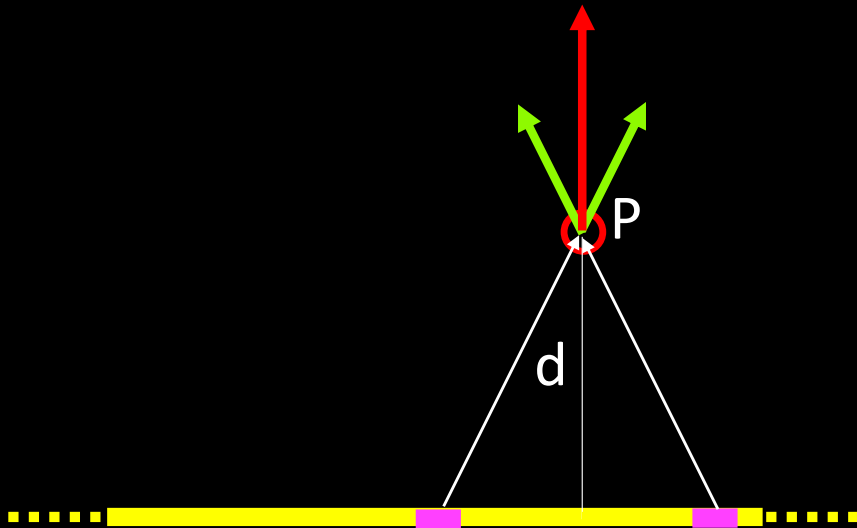
$$dE_Y = dE \sin\theta = dE \frac{d}{r} = dE \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$E_Y = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

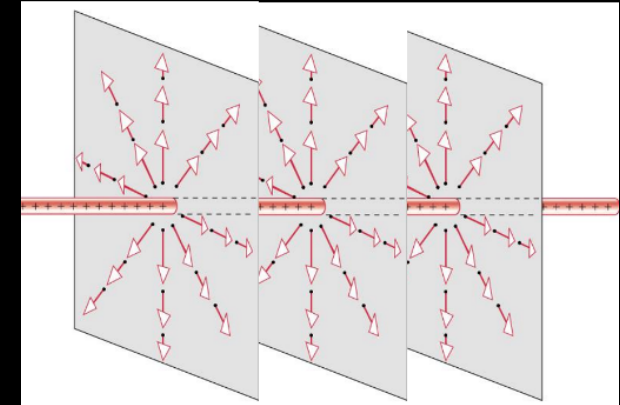
$$= \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} [1 - (-1)] = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{d^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + c \quad \frac{x}{|x|} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico



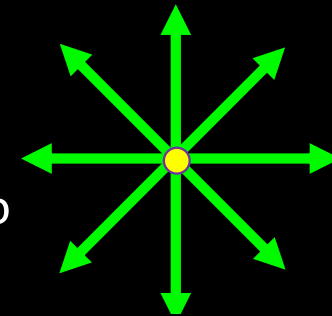
$$E_x = 0$$
$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$



se il filo è infinitamente esteso esiste sempre un elemento **simmetrico** che annulla la componente orizzontale

→ il campo è perpendicolare al filo lungo x

e con simmetria **radiale** nel piano trasverso

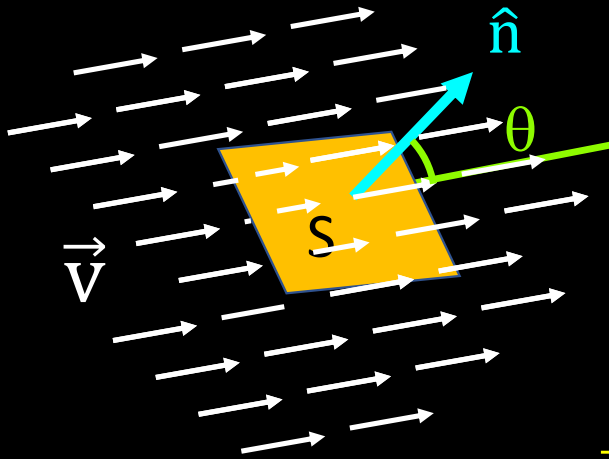


flusso di un vettore

matematica

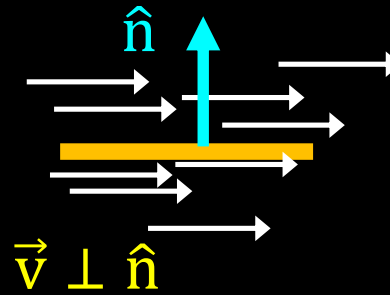
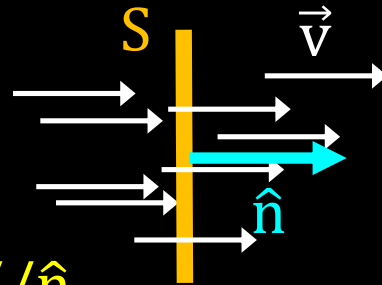
si definisce **flusso del vettore** $\vec{v}$ **attraverso** la superficie S :

$$\phi_S(\vec{v}) = v S \cos\theta = \vec{v} \cdot \hat{n} S$$

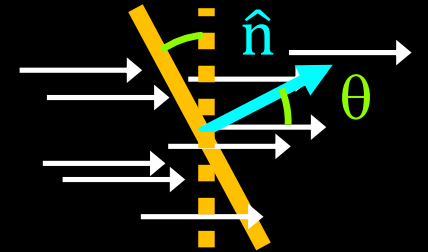


$$\vec{v} // \hat{n}$$

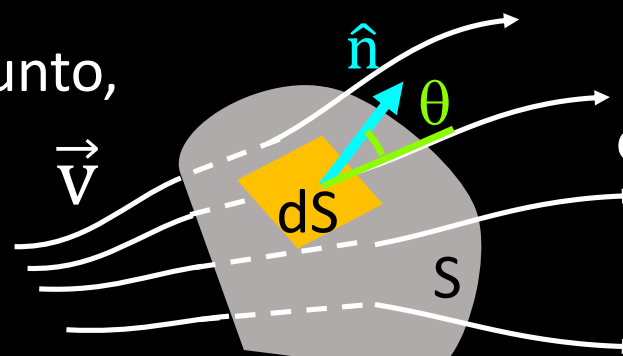
$$\phi_S(\vec{v}) = v S \cos 0^\circ = v S$$



$$\phi_S(\vec{v}) = v S \cos 90^\circ = 0$$

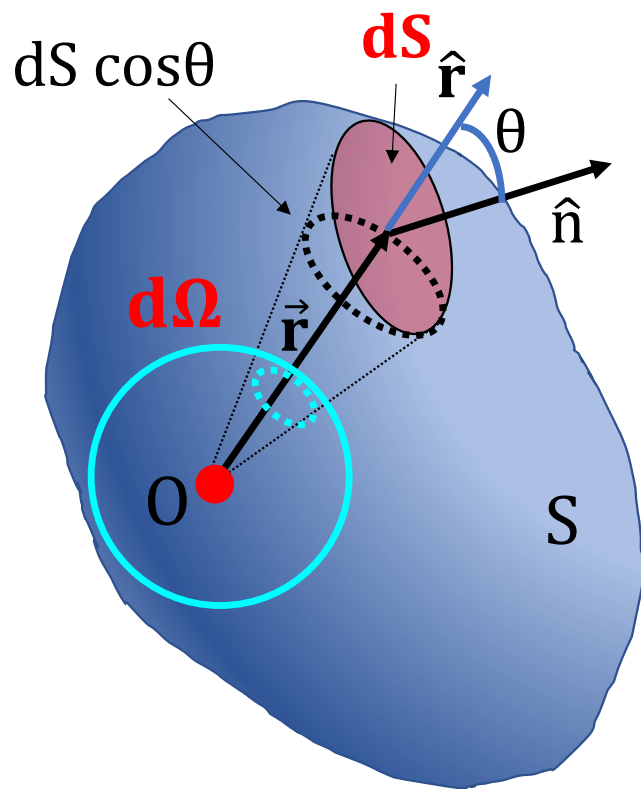


se $\vec{v}$ o $\hat{n}$ variano da punto a punto,
la superficie S va suddivisa in
elementi infinitesimi dS :



$$d\phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

$$\phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

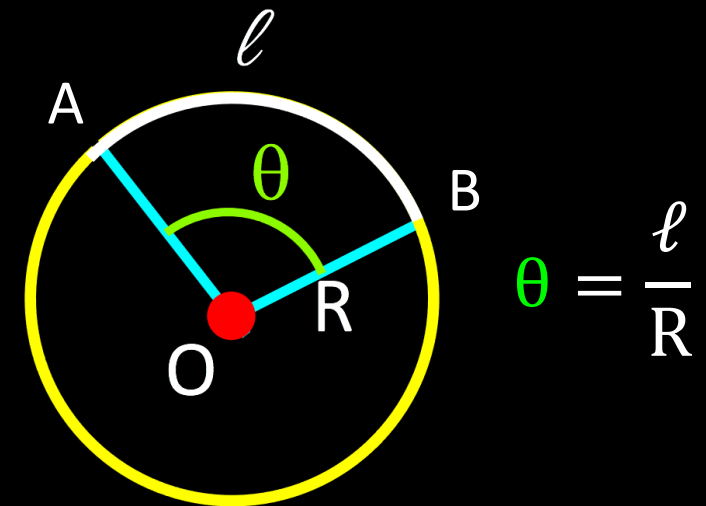


matematica

l'**ANGOLO SOLIDO** sotteso dalla superficie dS è pari al rapporto fra l'area proiettata e il quadrato della distanza r da O

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \Delta\Omega = \int_S \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

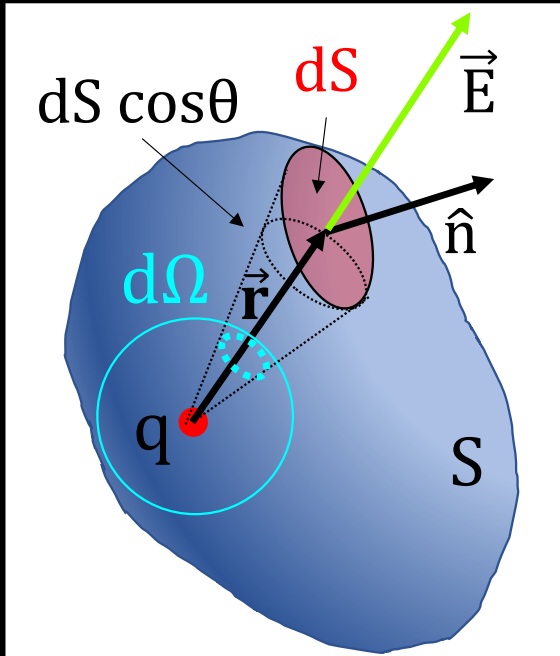
l'angolo solido massimo corrisponde alla superficie di una sfera ($4\pi r^2$) divisa per il quadrato del raggio: 4π srad (steradiani)



2D: nel piano l'angolo massimo corrisponde alla lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) divisa per il raggio: 2π rad (radianti)

teorema di Gauss

(I)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA che racchiude una carica puntiforme q è:

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

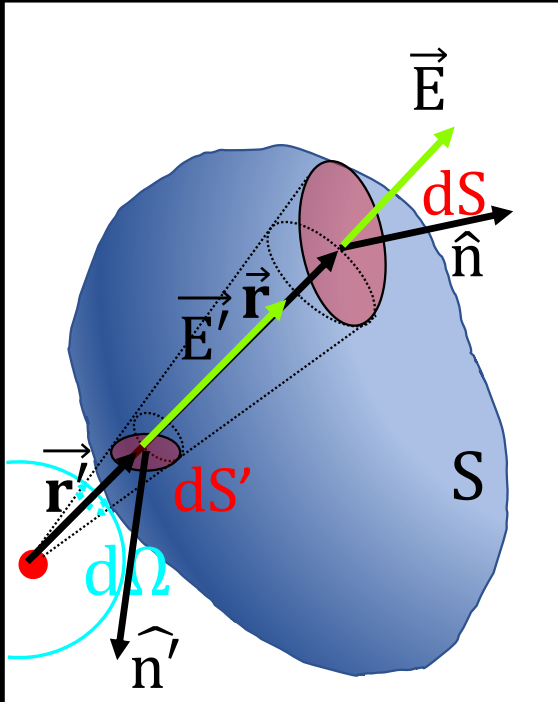
$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \phi_S(\vec{E}) &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} \, dS = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

teorema di Gauss

(II)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA dovuto a una carica puntiforme q esterna è **nullo**:

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS \hat{n} \hat{r}}{r^2}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS \hat{n} \hat{r}}{r^2}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E} \hat{n} dS = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \hat{r}}{r^2} \hat{n} dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\hat{r}}{r^2} \hat{n} dS + \int_{S'} \frac{\hat{r}'}{r'^2} \hat{n}' dS' \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S d\Omega + \int_{S'} -d\Omega \right] = 0$$

$$\cos\theta > 0 \quad \cos\theta < 0$$

teorema di Gauss

(III)

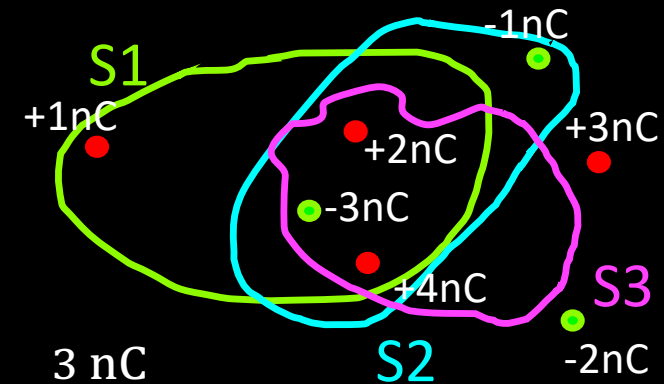
il flusso del campo elettrico attraverso una superficie **CHIUSA** dovuto a un insieme di cariche puntiformi è pari alla somma dei contributi (**nulli**) delle cariche esterne e di quelli ($\frac{q_i}{\epsilon_0}$) dovuti alle cariche interne:

$$\begin{aligned}\phi_S(\vec{E}) &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S \sum_{i=1,N} \vec{E}_i \cdot \hat{n} \, dS = \sum_{\text{int}} \int_S \vec{E}_i \cdot \hat{n} \, dS + \sum_{\text{est}} \int_S \vec{E}_i \cdot \hat{n} \, dS \\ &= \sum_{\text{int}} \frac{q_i}{\epsilon_0} + 0 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\phi(\vec{E})_{S1} = \frac{4 \, \text{nC}}{\epsilon_0}$$

$$\phi(\vec{E})_{S2} = \frac{2 \, \text{nC}}{\epsilon_0}$$

$$\phi(\vec{E})_{S3} = \frac{3 \, \text{nC}}{\epsilon_0}$$

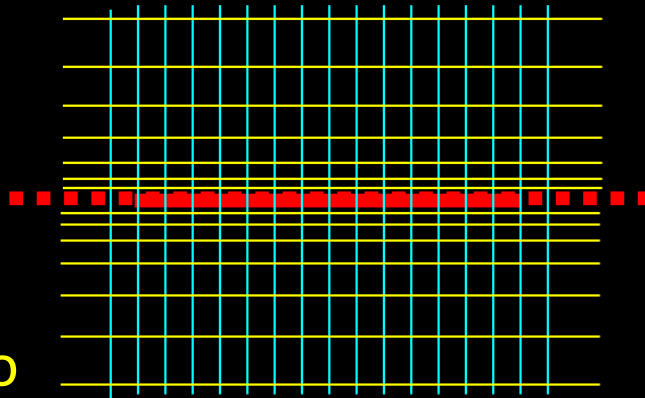


teorema di Gauss

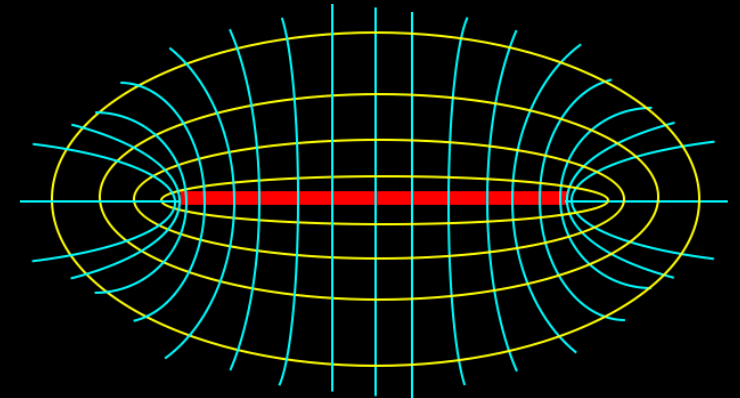
il teorema di Gauss consente di calcolare rapidamente il flusso del campo elettrostatico ma da questo è possibile ricavare l'espressione di E solo in quei pochi casi in cui, per ragioni di simmetria, è nota a priori la direzione del campo:

- radiale, sferica
- assiale, cilindrica
- planare

campo elettrico
potenziale elettrico



filo rettilineo indefinito



segmento rettilineo

Si tratta, allora, di costruire una superficie CHIUSA costituita solo da elementi paralleli o perpendicolari alle linee di campo

$$\vec{v} // \hat{n} \quad \phi_S(\vec{E}) = E S \cos 0^\circ = E S \quad \vec{v} \perp \hat{n} \quad \phi_S(\vec{E}) = E S \cos 90^\circ = 0$$

teorema di Gauss

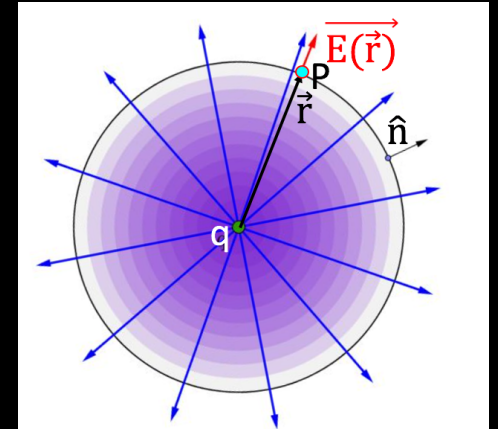
determinare il valore campo elettrostatico
generato da una carica puntiforme

esempio

Si è in presenza di una **simmetria sferica**:

non esiste una causa per cui le linee di campo possano essere più concentrate ad un certo angolo.

Fissata una **superficie sferica** di raggio r (superficie di Gauss) il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$



$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{n} \, dS = E(r) \int_S dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0}$$

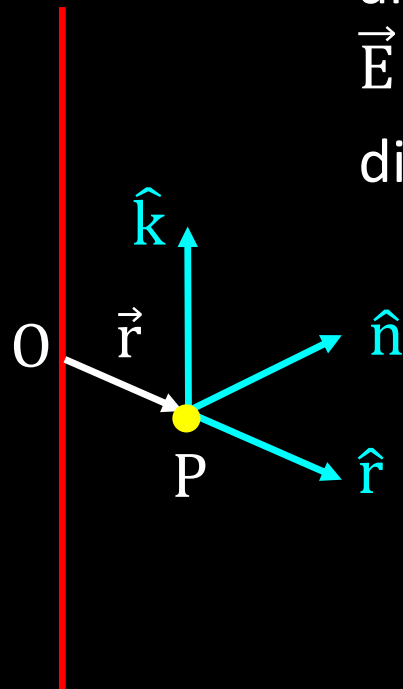
teorema di Gauss

esempio

determinare il valore campo elettrostatico generato, in un punto P, da un filo indefinito uniformemente carico (λ)

i contributi al campo lungo $\hat{k}$ da elementi **equidistanti da O** si annullano e **non ce ne sono nella direzione $\hat{n}$** :

$\vec{E}$ è orientato lungo $\hat{r}$ e ha la stessa intensità a parità di distanza r: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

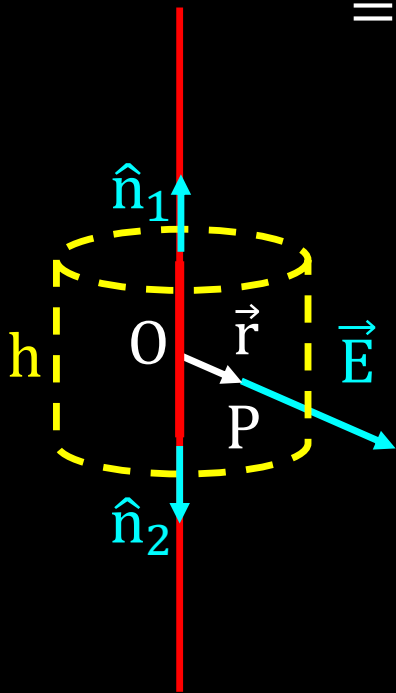


Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una **superficie di Gauss cilindrica** di raggio r con le basi distanti h

teorema di Gauss

esempio

$$\begin{aligned}\phi_S(\vec{E}) &= \int_{\text{base1}} \vec{E} \hat{n}_1 dS + \int_{\text{base2}} \vec{E} \hat{n}_2 dS + \int_{\text{lat}} \vec{E} \hat{r} dS = \\ &= 0 + 0 + E(r) 2\pi r h = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\end{aligned}$$



Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di **raggio r con le basi distanti h** : l'unico contributo al flusso del campo è attraverso la superficie laterale del cilindro dato che la normale delle basi è perpendicolare alla direzione del campo.

Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

LUNEDÌ 7 ORE 10-11

esercitazione su:

calcoli di campi elettrici e magnetici

teorema di Gauss

