Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

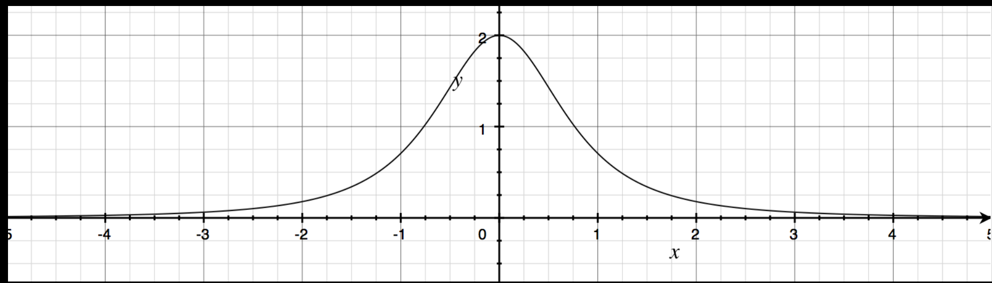
teorema di Gauss

circuitazione di Ampère

un paio di integrali...

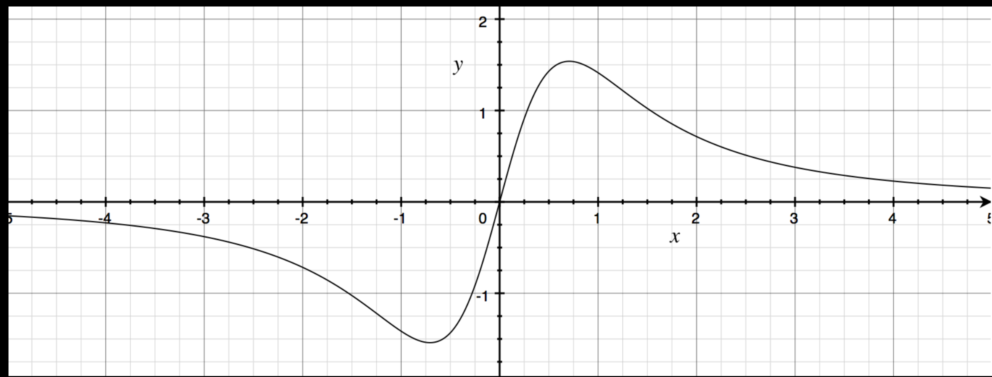
$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$



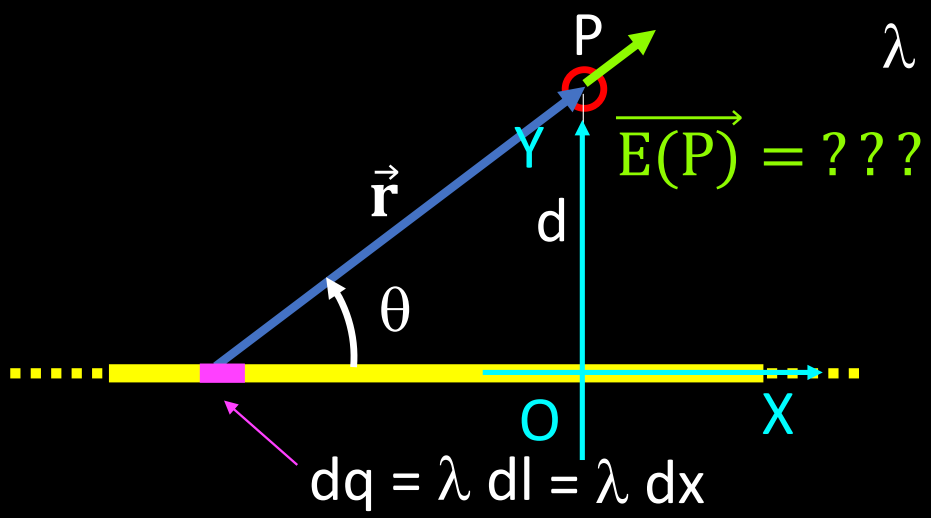
$$\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$



campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico

X



$\lambda = dq/dl$ densità di carica lineare (uniforme)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{x^2 + d^2}$$

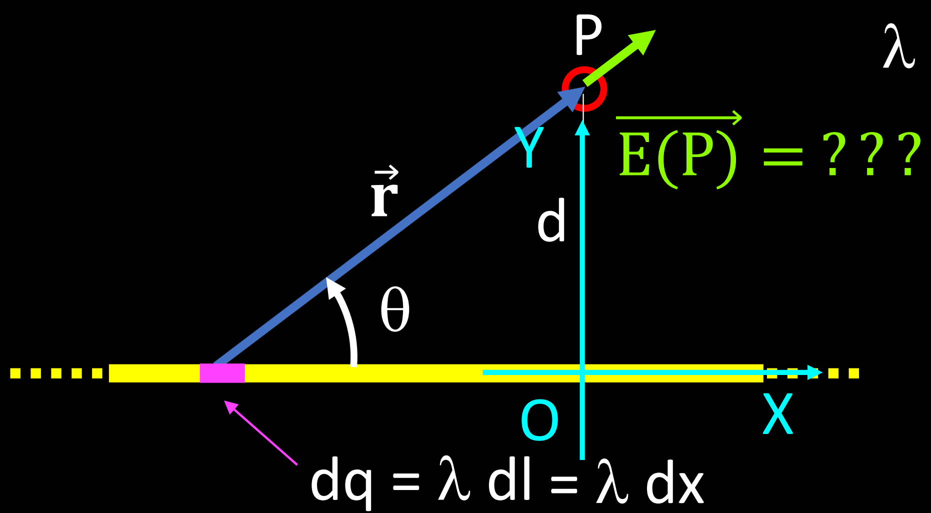
$$dE_X = dE\cos\theta = dE\,\frac{-x}{r} = -dE\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + c$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{-x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\ dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = \mathbf{0}$$

campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico

Y



λ = dq/dl   densità di carica lineare (uniforme)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{x^2+d^2}$$

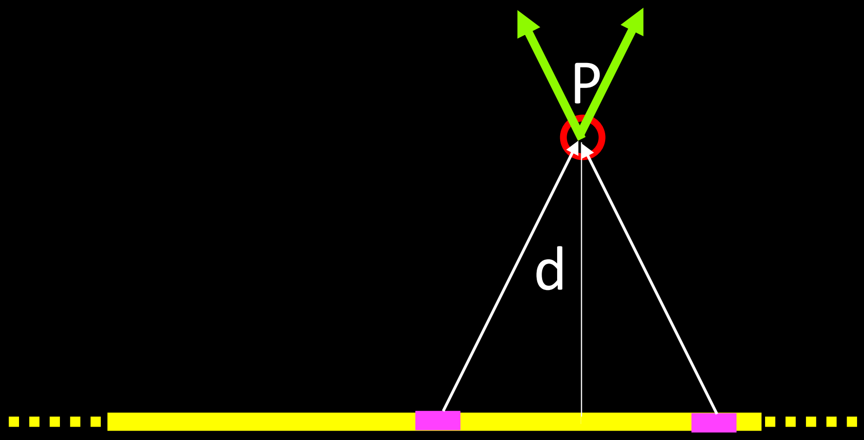
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

$$dE_Y = dE\sin\theta = dE\,\frac{d}{r} = dE\,\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$E_Y = \int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{\lambda\,d}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\,d}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{\lambda\,d}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2}\frac{x}{|x|}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\right] = \frac{\lambda\,d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{d^2} = \boldsymbol{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}}$$

campo elettrico da un filo indefinito uniformemente carico



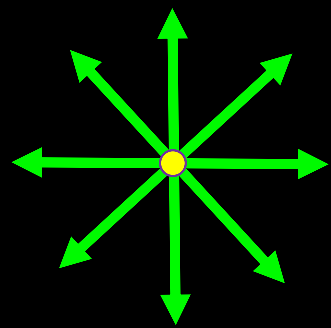
$$E_X = 0$$

$$E_Y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

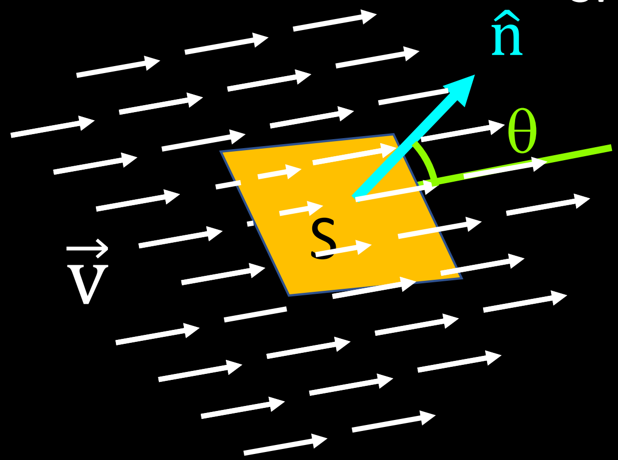
se il filo è infinitamente esteso esiste sempre un elemento simmetrico che annulla la componente orizzontale

→ il campo è perpendicolare al filo lungo x

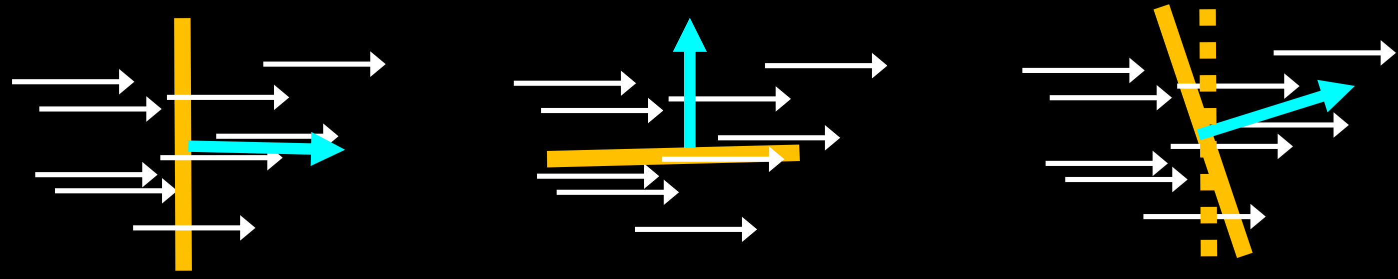
e con simmetria radiale nel piano trasverso



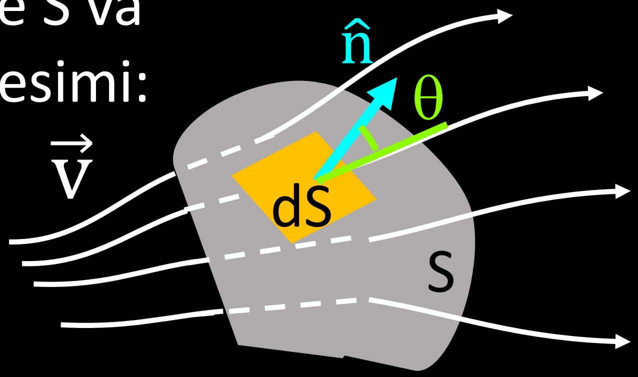
si definisce flusso del vettore $\vec{v}$ attraverso la superficie S:



$$\phi_S(\vec{v}) = v\,S\cos\theta = \vec{v}\,\hat{n}\,S$$

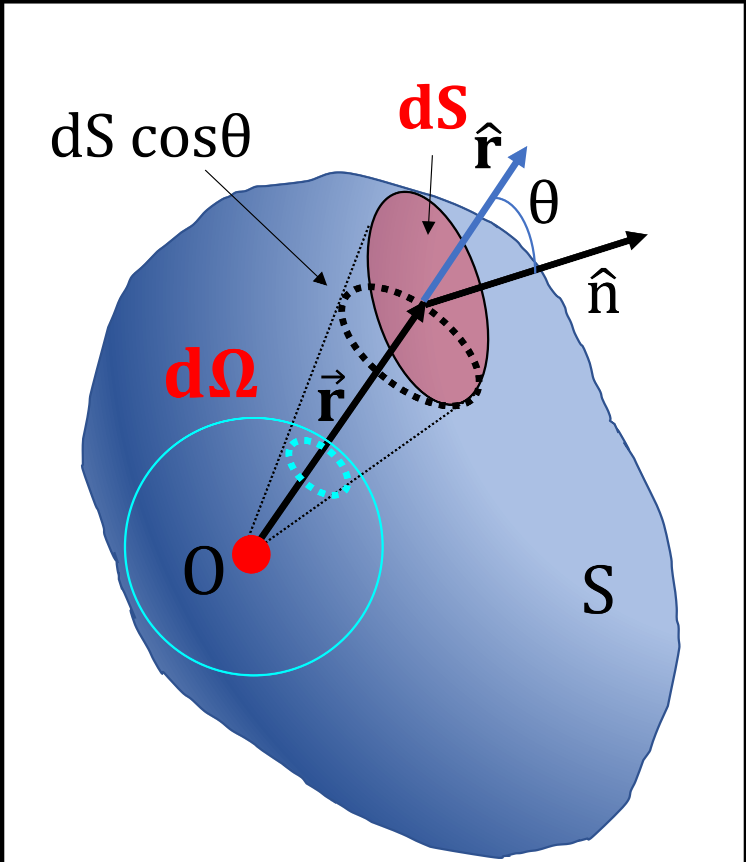


se $\vec{v}$ o $\hat{n}$ variano, la superficie S va suddivisa in elementi infinitesimi:



$$\phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v}\,\hat{n}\,dS$$

l'ANGOLO SOLIDO sotteso dalla superficie dS è pari al rapporto fra l'area proiettata e il quadrato della distanza r da O



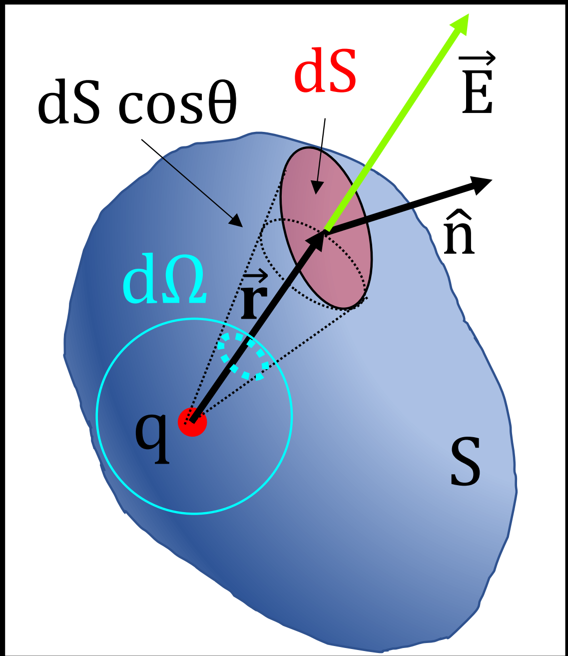
$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

l'angolo solido massimo corrisponde alla superficie di una sfera ($4\pi r^2$) divisa per il quadrato del raggio: 4π srad (steradianti)

teorema di Gauss

(I)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA che <u>racchiude</u> una carica puntiforme q è:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

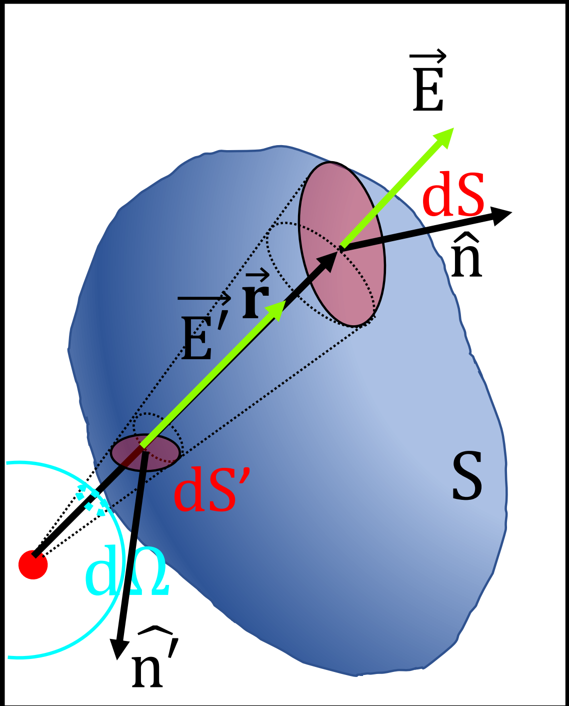
>>>

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\hat{r}}{r^2}\hat{n}\,dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\int_S \frac{\hat{r}}{r^2}\hat{n}\;dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

teorema di Gauss (II)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA dovuto a una carica puntiforme q <u>esterna</u> è nullo:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

>>>

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\,\hat{n}\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\hat{r}}{r^2}\,\hat{n}\,dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_S \frac{\hat{r}}{r^2}\hat{n}\;dS + \int_{S'} \frac{\widehat{r'}}{r'^2}\widehat{n'}\;dS'\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_S d\Omega + \int_S -d\Omega\right] = 0$$

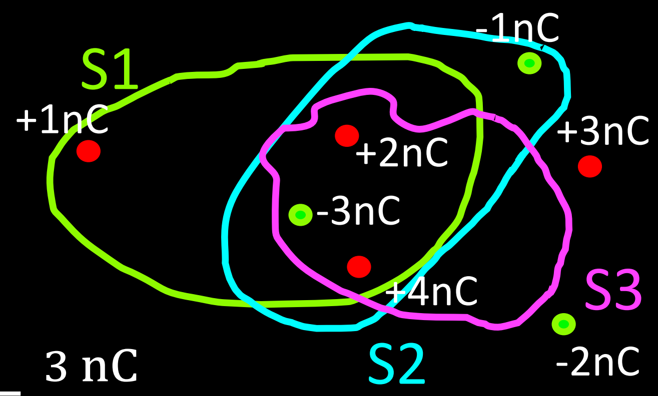
$\cos\theta > 0$ $\cos\theta < 0$

teorema di Gauss (III)

il flusso del campo elettrico attraverso una superficie **CHIUSA** dovuto a un insieme di cariche puntiformi è pari alla somma dei contributi (nulli) delle cariche esterne e di quelli ($\frac{q_i}{\varepsilon_0}$) dovuti alle cariche interne:

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_S \sum_{i=1,N} \vec{E}_i \hat{n}\,dS = \sum_{int} \int_S \vec{E}_i \hat{n}\,dS + \sum_{est} \int_S \vec{E}_i \hat{n}\,dS$$

$$= \sum_{int} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

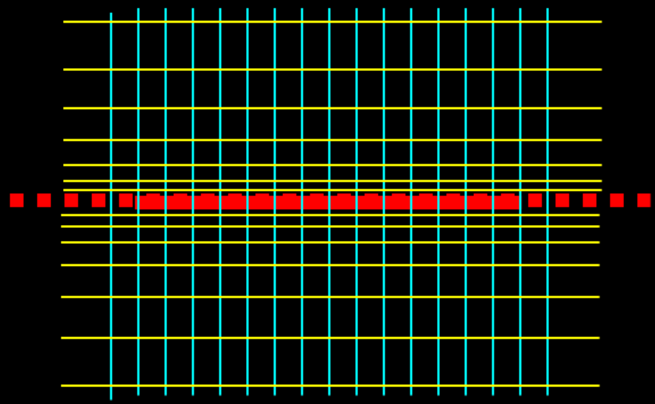


$$\phi(\vec{E})_{S1} = \frac{4\ nC}{\varepsilon_0} \qquad \phi(\vec{E})_{S2} = \frac{2\ nC}{\varepsilon_0} \qquad \phi(\vec{E})_{S3} = \frac{3\ nC}{\varepsilon_0}$$

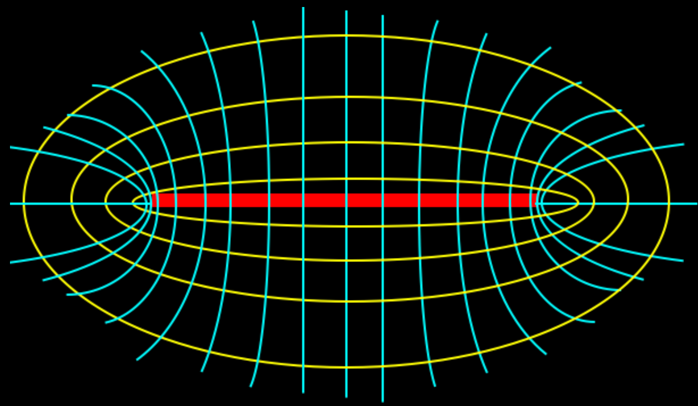
teorema di Gauss

il teorema di Gauss consente di calcolare rapidamente il flusso del campo elettrostatico ma da questo è possibile ricavare l'espressione di E solo in quei pochi casi in cui, per ragioni di simmetria, è nota a priori la direzione del campo:

- radiale, sferica
- assiale, cilindrica
- planare



filo rettilineo indefinito



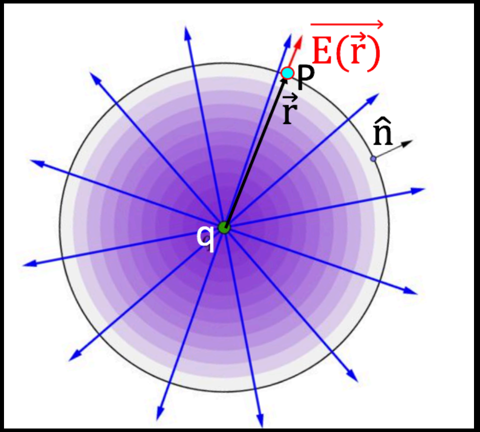
segmento rettilineo

Si tratta, allora, di costruire una superficie CHIUSA costituita solo da elementi paralleli o perpendicolari alle linee di campo

teorema di Gauss

esempio

determinare il valore campo elettrostatico generato da una <u>carica puntiforme</u>

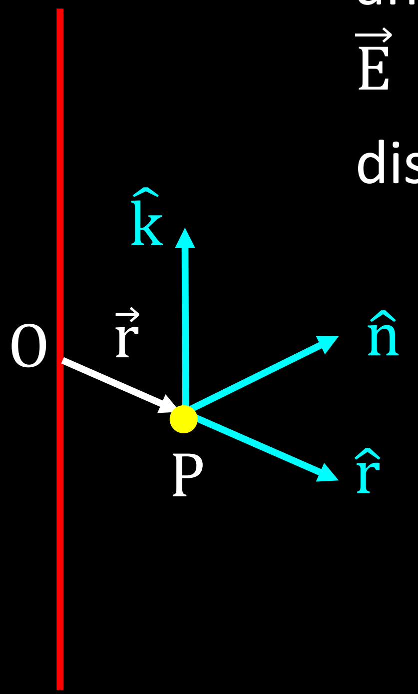


Si è in presenza di una simmetria sferica:
non esiste una causa per cui le linee di campo possano essere più concentrate ad un certo angolo.
Fissata una superficie sferica di raggio r (superficie di Gauss) il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti: $\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\,\hat{r}$

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_S E(r)\,\hat{r}\;\hat{n}\,dS = E(r)\int_S dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

determinare il valore campo elettrostatico generato, in un punto P, da un filo indefinito uniformemente carico (λ)



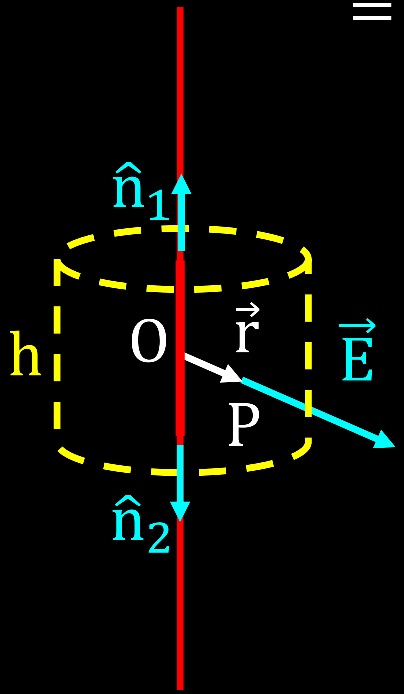
i contributi al campo lungo $\hat{k}$ da elementi equidistanti da O si annullano e non ce ne sono nella direzione $\hat{n}$:

$\vec{E}$ è orientato lungo $\hat{r}$ e ha la stessa intensità a parità di distanza r: $\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$

Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di raggio r con le basi distanti h

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_{base1} \vec{E}\,\hat{n}_1\, dS + \int_{base2} \vec{E}\,\hat{n}_2\, dS + \int_{lat} \vec{E}\,\hat{r}\, dS =$$

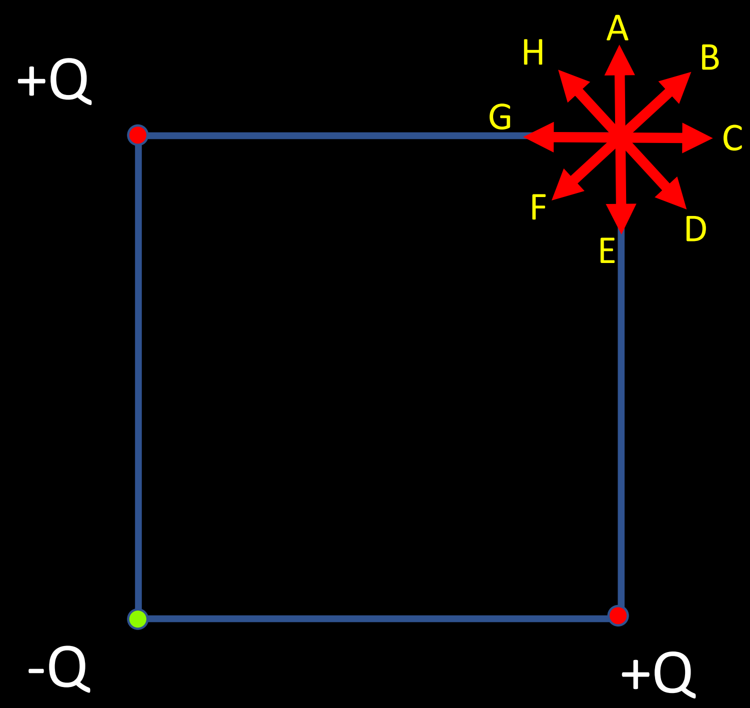
$$= 2\pi r\, h\, E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



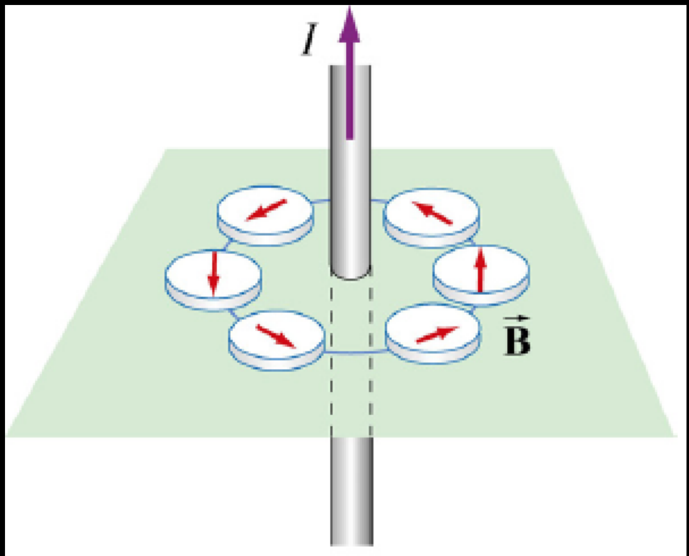
Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di raggio r con le basi distanti h: l'unico contributo al flusso del campo è attraverso la superficie laterale del cilindro dato che la normale delle basi è perpendicolare alla direzione del campo.

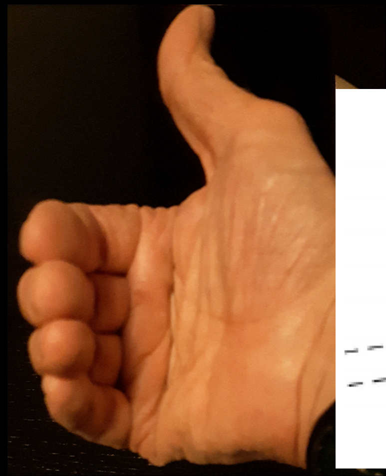
intermezzo

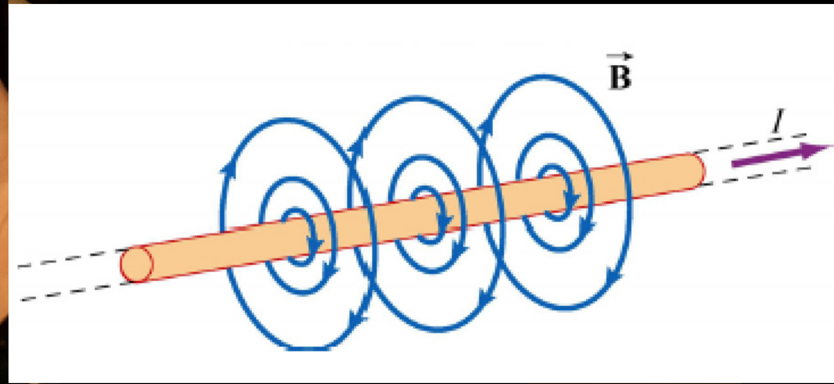
quale vettore rappresenta il campo elettrostatico nel vertice del quadrato non occupato da cariche?



campo magnetico da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente







campo magnetico da filo rettilineo indefinito percorso da corrente

Biot-Savart

$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, Id\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

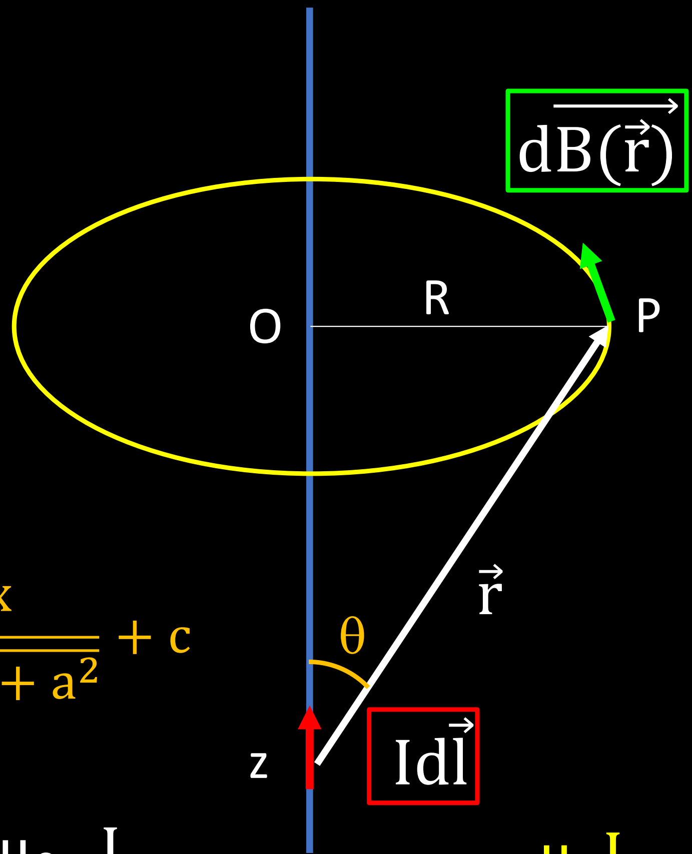
$$dB(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, Idl \frac{r}{r^3} \sin(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, Idl \frac{R}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \, Idz \frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$B(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, IR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

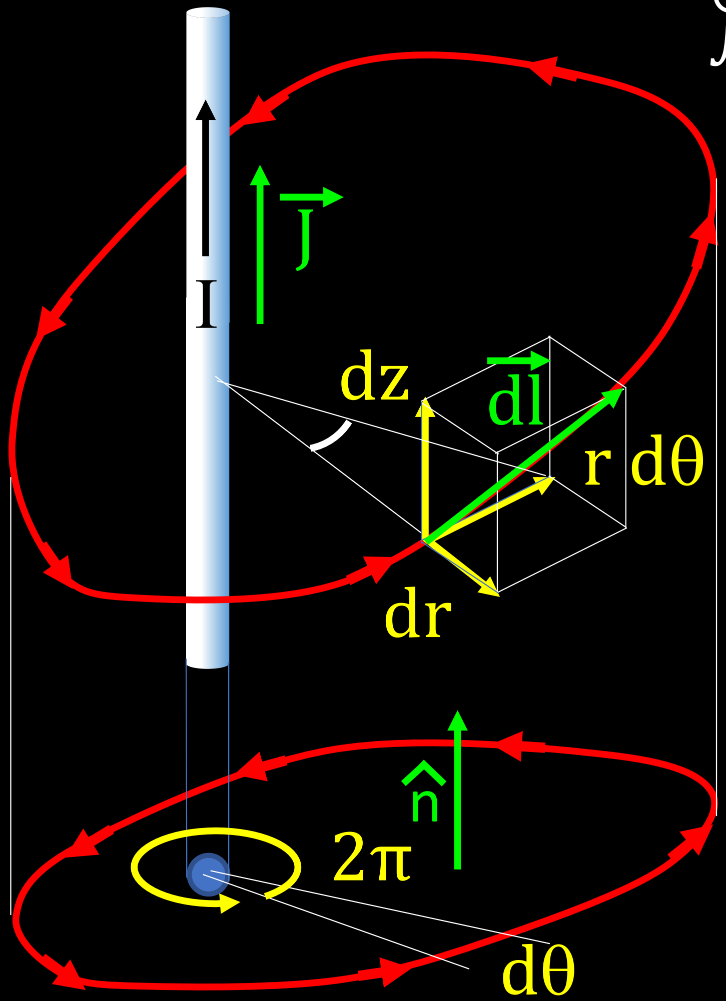
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \, IR \left[\frac{1}{R^2} \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{I}{R} \left[\frac{z}{|z|}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{I}{R} [1-(-1)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



circuitazione di Ampère

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

filo interno alla linea di circuitazione
(corrente concatenata a γ)



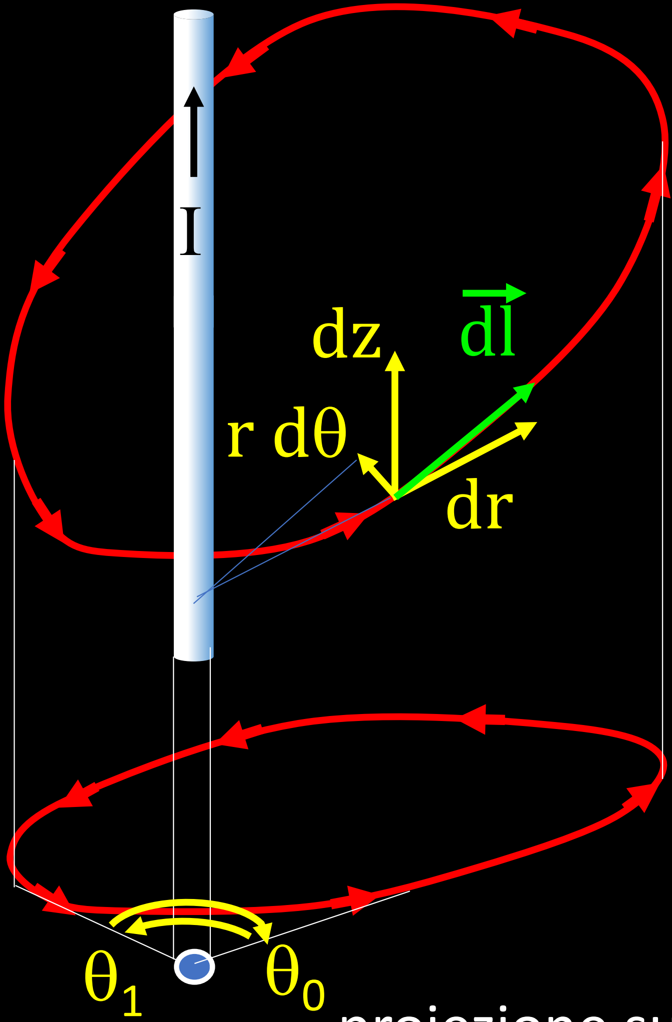
proiezione sul piano

$\vec{B}\cdot\vec{dl} = B\, r d\theta$ > 0 se n e J concordi
< 0 se n e J discordi

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi r} r d\theta = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta = \mu_o I$$

circuitazione di Ampère

filo esterno alla linea di circuitazione
(corrente non concatenata a γ)



proiezione sul piano

$$\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = B\, r d\theta$$

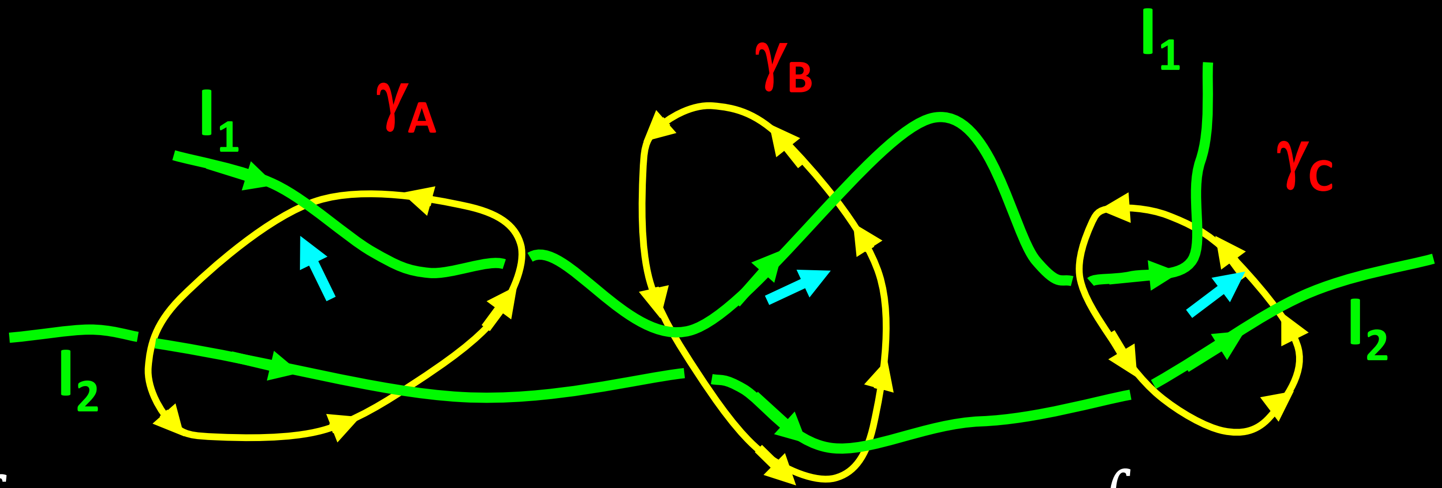
$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi r} r d\theta = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta =$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta = 0$$

circuitazione di Ampère

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_o I_{conc}$$ valida anche per correnti non rettilinee

I_{conc} = somma algebrica delle correnti concatenate a γ



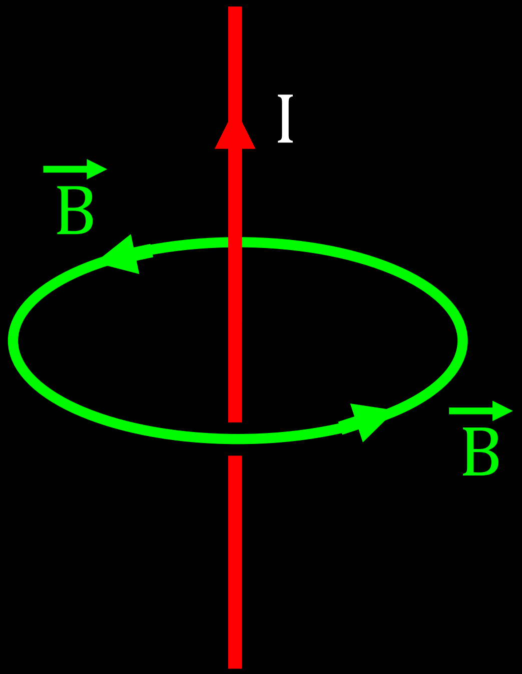
$$\oint_{\gamma_A} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_o(-I_1 + I_2)$$

$$\oint_{\gamma_B} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_o I_2$$

$$\oint_{\gamma_C} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_o(I_1 + I_2)$$

circuitazione di Ampère

esempio



$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2\pi R\, B = \mu_o I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

LUNEDÌ 8 ORE 10-11

esercitazione su:

teorema di Gauss

circuitazione di Ampère