Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

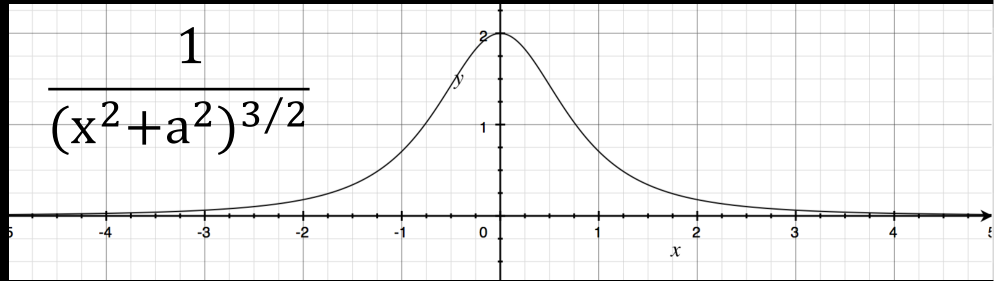
esercitazione su:

campo elettrico
teorema di Gauss

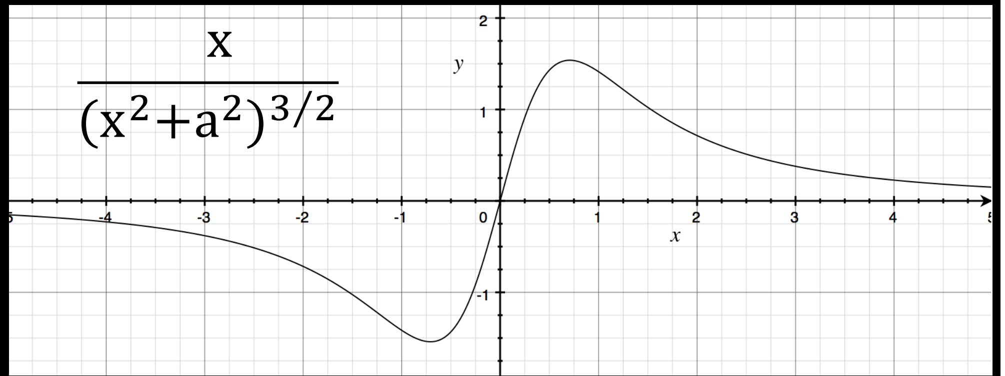
campo magnetico

un paio di integrali...

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

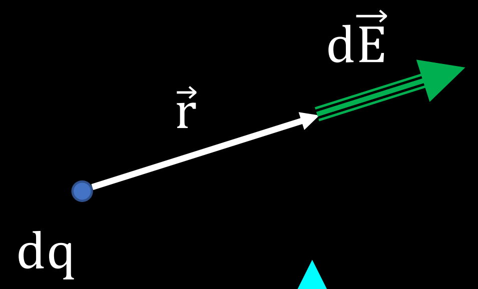


$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

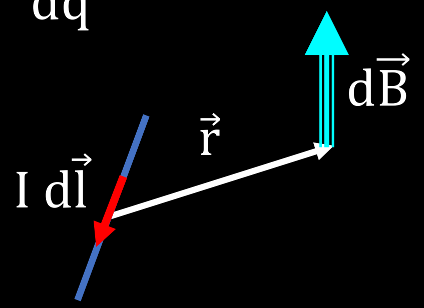


$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x} + c$$

$$\overrightarrow{dE(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{\hat{r}}{r^2}$$



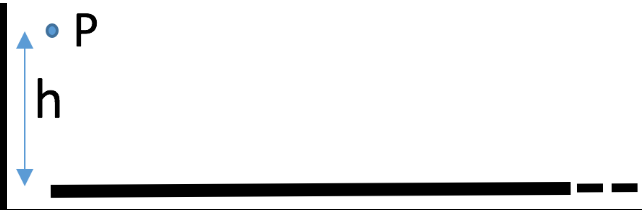
$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, Id\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$



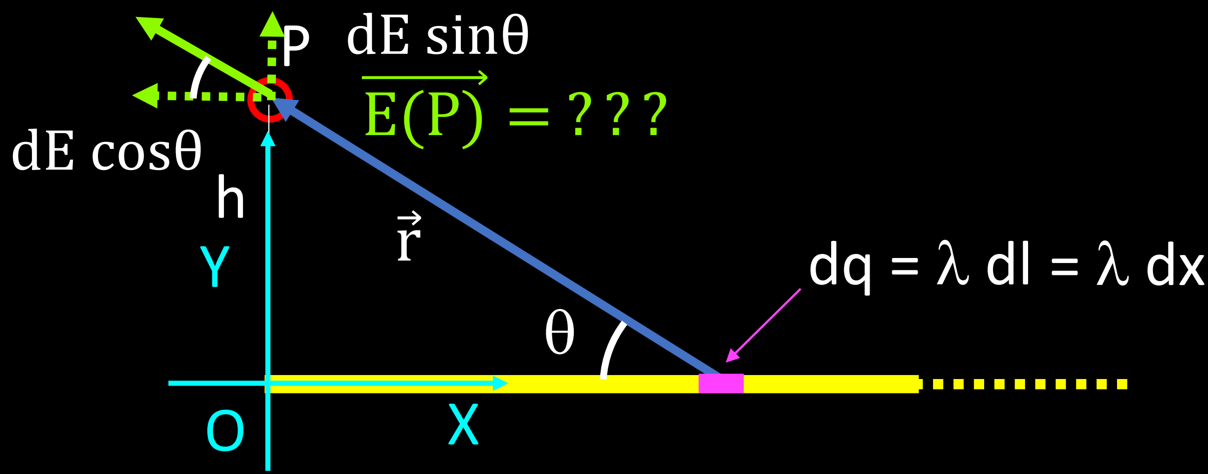
$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\, dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1) Determinare l'intensità del campo elettrico generato nel punto P da una carica uniformemente distribuita lungo una semiretta con densità λ = 1 nC/m. Il punto P è sulla perpendicolare alla semiretta in corrispondenza della sua estremità, a distanza h = 1,4 cm.

>>> soluzione: E = 900 N/C



$$\overrightarrow{dE(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{\hat{r}}{r^2}$$



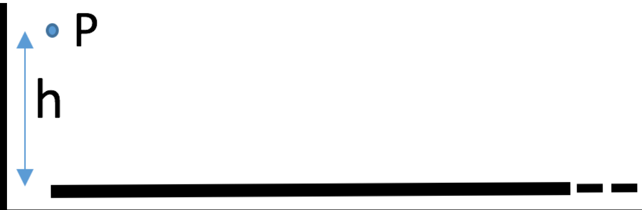
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{x^2 + h^2}$$

$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + c$$

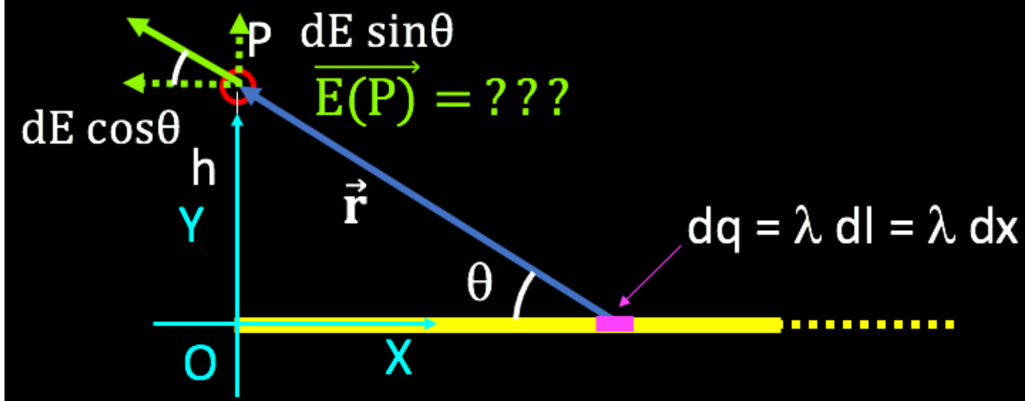
$$dE_X = -dE\cos\theta = -dE\,\frac{x}{r} = -dE\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$$E_X = \int_0^{\infty} -dE\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\ dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{h}$$

1) Determinare l'intensità del campo elettrico generato nel punto P da una carica uniformemente distribuita lungo una semiretta con densità λ = 1 nC/m. Il punto P è sulla perpendicolare alla semiretta in corrispondenza della sua estremità, a distanza h = 1,4 cm.



>>> soluzione: E = 900 N/C



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{x^2 + h^2}$$

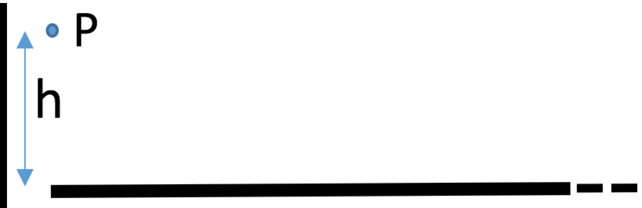
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

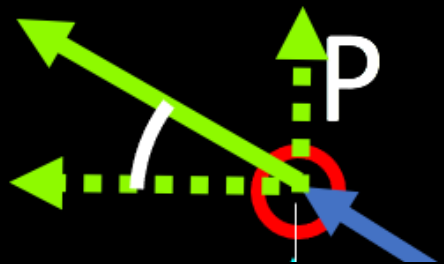
$$dE_Y = dE \sin\theta = dE\,\frac{h}{r} = dE\,\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$E_Y = \int_0^\infty dE\,\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right|_0^\infty = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}$$

1) Determinare l'intensità del campo elettrico generato nel punto P da una carica uniformemente distribuita lungo una semiretta con densità λ = 1 nC/m. Il punto P è sulla perpendicolare alla semiretta in corrispondenza della sua estremità, a distanza h = 1,4 cm.

>>> soluzione: E = 900 N/C





$$E_Y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}$$

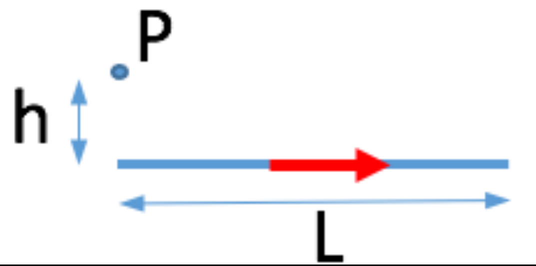
$$E_X = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}$$

$$E = \sqrt{{E_X}^2 + {E_Y}^2} = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}\right)^2} = \sqrt{2}\,\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}$$

1) E = $(\lambda/4\pi\varepsilon_0)\sqrt{2}/h$

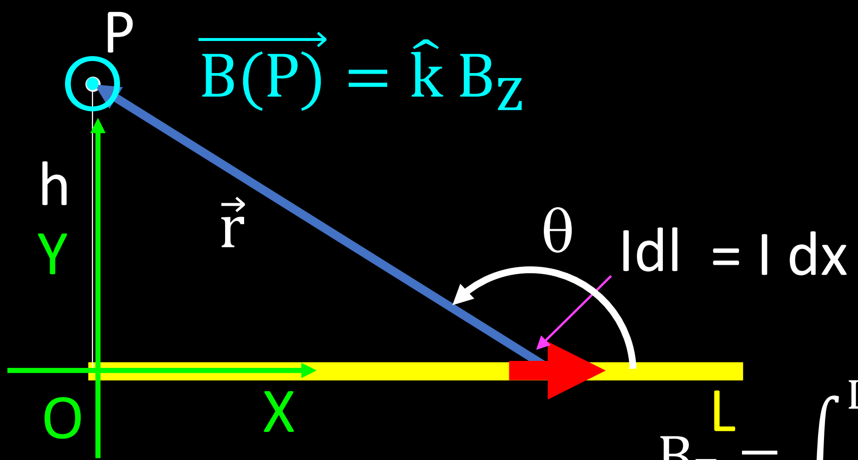
2) Un tratto rettilineo di filo conduttore di lunghezza L = 10 cm disposto lungo l'asse X è percorso da una corrente di intensità I = 10 mA che scorre verso destra. Determinare direzione, verso e l'intensità del campo magnetico generato nel punto P distante h = 2 cm dall'estremità sinistra del filo (dalla corrente che scorre nella porzione di circuito considerato)

>>> soluzione: B = 50 nT



$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{h}{r}$$



$$\overrightarrow{B(P)} = \hat{k}\, B_Z$$

$$dB_Z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\, r \sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\, h}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

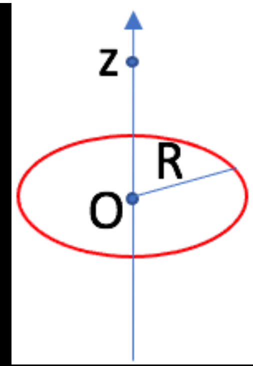
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

$$B_Z = \int_0^L \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\, h}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I h}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

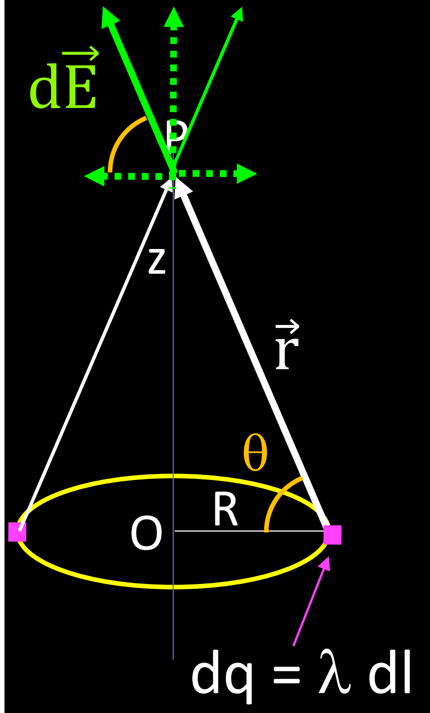
$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi h^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_0^L = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}}$$

2) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IL}{h\sqrt{h^2+L^2}}$

3) Determinare direzione, intensità e verso del campo elettrico nei punti sull'asse di una spira di raggio R uniformemente carica con densità lineare λ.



>>> soluzione: $E = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$



$$\overrightarrow{dE(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dq \frac{\hat{r}}{r^2}$$

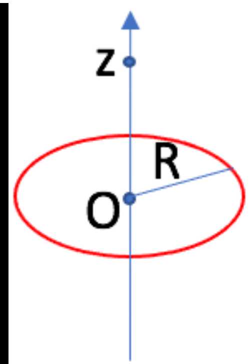
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{z^2 + R^2}$$

$$dE_Z = dE \sin\theta = dE\,\frac{z}{r} = dE \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, z\, dl}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

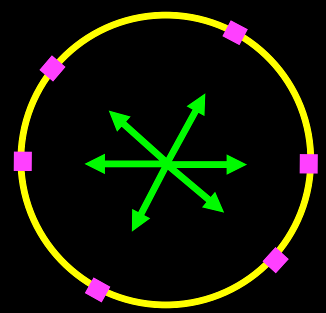
$$E_Z = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, z\, dl}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, z\, 2\pi R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

3) Determinare direzione, intensità e verso del campo elettrico nei punti sull'asse di una spira di raggio R uniformemente carica con densità lineare λ.

>>> soluzione: $E = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

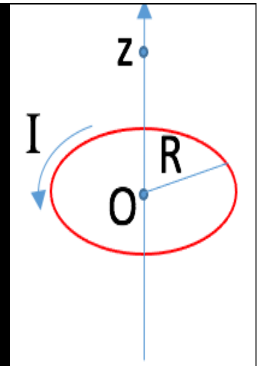


Se z = 0 E(0) = 0

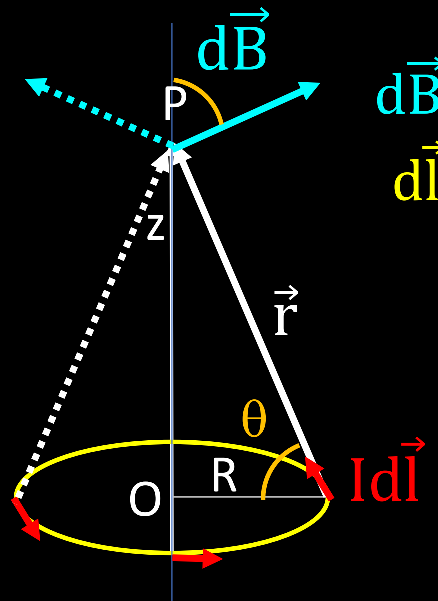


3) $\overrightarrow{E(0,0,z)} = \hat{k}\left[\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\right]$

4) Una spira conduttrice di raggio R è percorsa dalla corrente I. Calcolare il valore del campo magnetico B nei punti dell'asse della spira.



>>> soluzione: $B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$



$d\vec{B} \perp \vec{r}$

$d\vec{l} \perp \vec{r}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,dl}{z^2 + R^2}$$

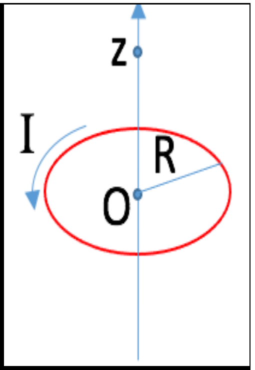
$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, Id\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$dB_z = dB\cos\theta = dB\,\frac{R}{r} = dB\,\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R\,dl}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

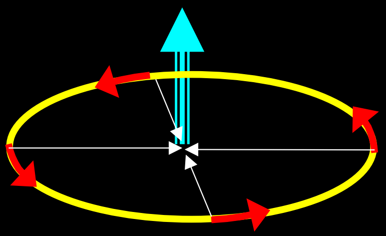
$$B_z = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R\,dl}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R\,2\pi\,R}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

4) Una spira conduttrice di raggio R è percorsa dalla corrente I. Calcolare il valore del campo magnetico B nei punti dell'asse della spira.

>>> soluzione: $B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$



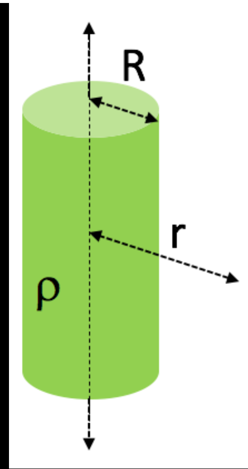
Se z = 0 $\quad \overrightarrow{B(0,0,0)} = \hat{k}\left[\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(0+R^2)^{3/2}}\right] = \hat{k}\,\frac{\mu_0 I}{2R}$



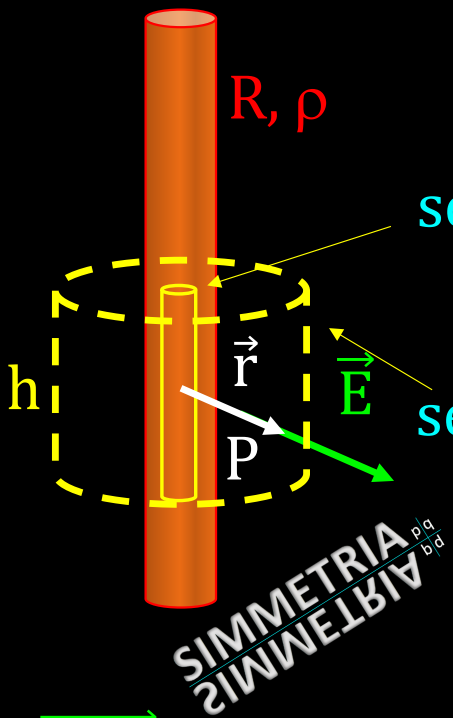
4) $\overrightarrow{B(0,0,z)} = \hat{k}\left[\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\right]$

5) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume ρ. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio a distanza r dall'asse

>>> soluzione: nelle due regioni di spazio si ha $\rho r/(2\varepsilon_0)$; $\rho R^2/(2\varepsilon_0 r)$



$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$



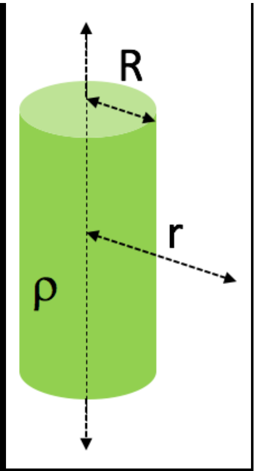
se $r \le R$ $\quad 2\pi r\, h\, E(r) = \dfrac{q_{int}(r)}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho\, \pi r^2\, h}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \dfrac{\rho}{2\,\varepsilon_0} r$

se $r \ge R$ $\quad 2\pi r\, h\, E(r) = \dfrac{q_{int}(R)}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho\, \pi R^2\, h}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \dfrac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$$

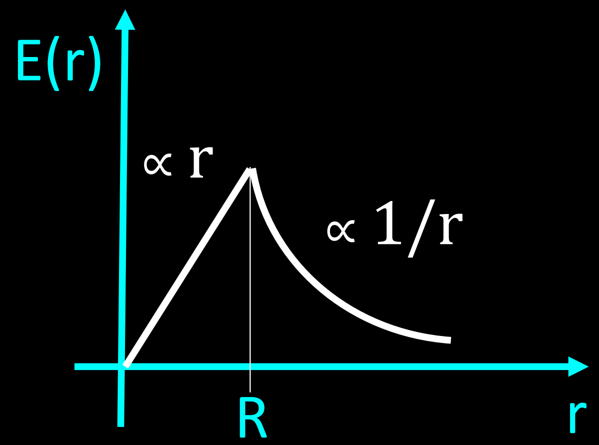
5) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume ρ. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio a distanza r dall'asse

>>> soluzione: nelle due regioni di spazio si ha $\rho r/(2\varepsilon_0)$; $\rho R^2/(2\varepsilon_0 r)$



se $r \leq R$ $\qquad E(r) = \dfrac{\rho}{2\,\varepsilon_0} r$

se $r \geq R$ $\qquad E(r) = \dfrac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0} \dfrac{1}{r}$



6) In un guscio sferico (sfera cava di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2) è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio

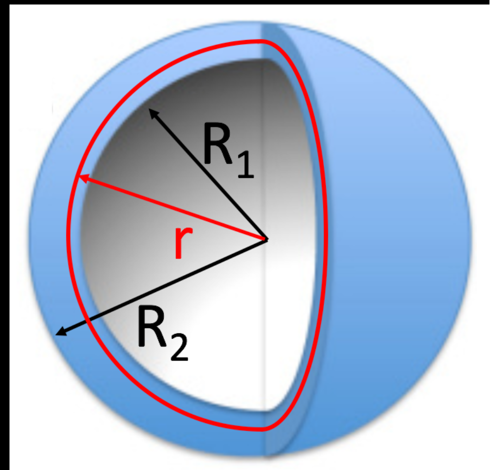
>>> soluzione: nelle tre regioni di spazio 0; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\ (r^3-R_1^3)/(R_2^3-R_1^3)$; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

per sfruttare la simmetria sferica del problema

$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$$

si sceglie come superficie di Gauss una sfera di raggio r



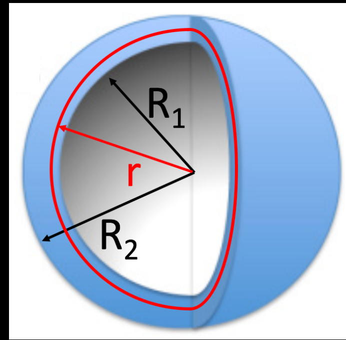
$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_S E(r)\ \hat{r}\ \hat{n}\,dS = \int_S E(r)\ dS$$

$$= E(r)\int_S dS = 4\pi r^2\,E(r)$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}$$

6) In un guscio sferico (sfera cava di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2) è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio

>>> soluzione: nelle tre regioni di spazio 0; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\ (r^3-R_1^3)/(R_2^3-R_1^3)$; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$



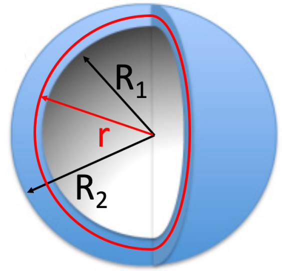
se $r \le R_1$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = \dfrac{q_{int}(r)}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow E(r) = 0$

se $R_1 \le r \le R_2$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = \dfrac{\rho \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0}$ $\qquad \rho = \dfrac{Q}{\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)}$

$$= \frac{Q\,\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0\,\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)} \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

se $r \ge R_2$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = \dfrac{q_{int}(R_2)}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}$

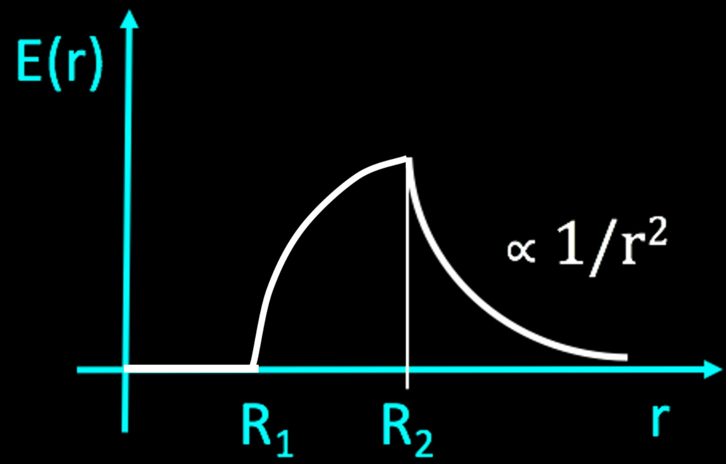
6) In un guscio sferico (sfera cava di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2) è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio
>>> soluzione: nelle tre regioni di spazio 0; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\ (r^3-R_1^3)/(R_2^3-R_1^3)$; $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$



se $r \leq R_1$ ➔ $E(r) = 0$

se $R_1 \leq r \leq R_2$ ➔ $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \dfrac{r^3 - R_1{}^3}{R_2{}^3 - R_1{}^3}$

se $r \geq R_2$ ➔ $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2}$



Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

VENERDÌ 12 ORE 8:30-10

circuitazione di Ampère

forze fra cariche	Coulomb
forze fra correnti	Laplace (da Lorentz)