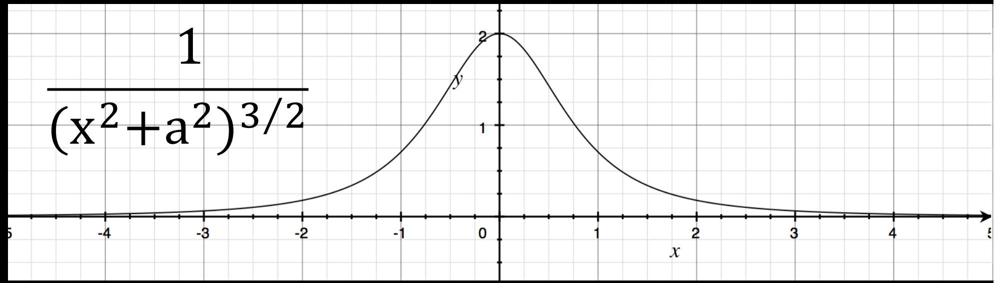
Complementi di fisica generale

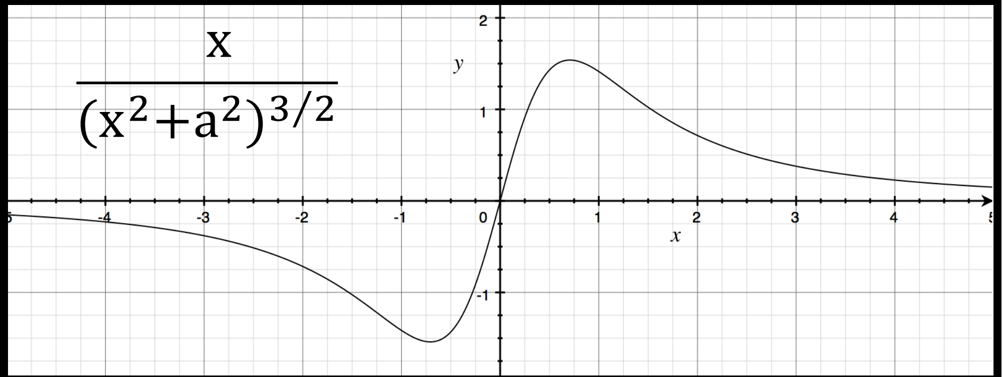
adalberto.sciubba@uniroma1.it

ESERCITAZIONE su:
forze fra cariche
campo magnetico
circuitazione di Ampère

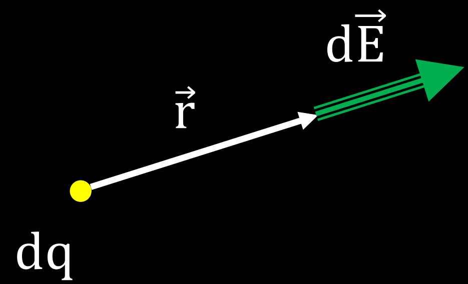
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$



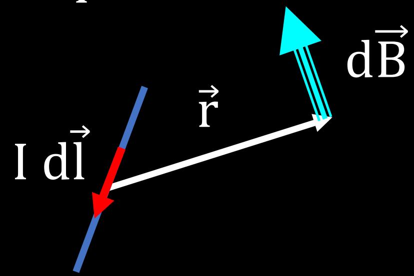
$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$



$$\overrightarrow{dE(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, dq\, \frac{\hat{r}}{r^2}$$



$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\; I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$



$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

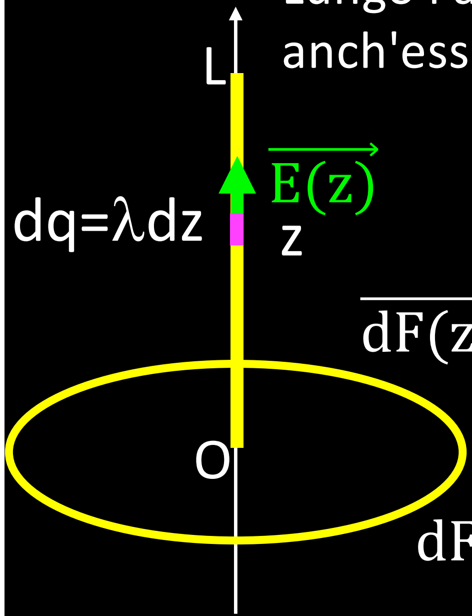
$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_o I_{conc}$$

1) Su una spira circolare di raggio R è distribuita uniformemente una carica con densità λ.

forze fra distribuzioni di carica

Lungo l'asse della spira viene posta una bacchetta lunga L anch'essa uniformemente carica (stessa λ).

Determinare la forza che agisce tra i due elementi quando un'estremità della bacchetta è nel piano che contiene la spira.



$$\overrightarrow{dF(z)} = dq\,\overrightarrow{E(z)}$$

$$\int \frac{x\;dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

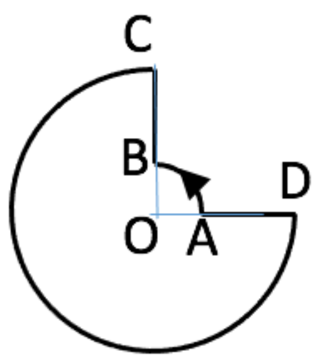
$$dF_z(z) = \lambda dz \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{\lambda^2 R}{2\varepsilon_0}\int_o^L \frac{z\;dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda^2 R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\Bigg|_0^L = -\frac{\lambda^2 R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}} - \frac{1}{R}\right)$$

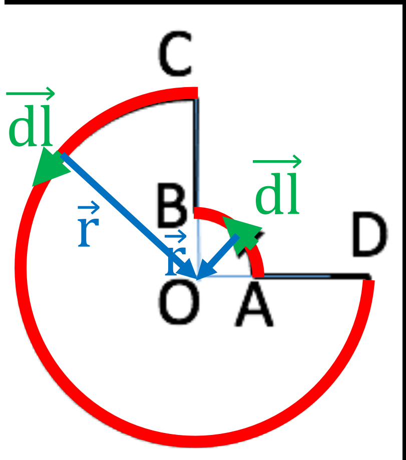
$$E_z(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$$

3) La spira piana in figura è costituita da due archi di circonferenza concentrici di raggi R e 3R raccordati da due tratti radiali lunghi 2R fra loro perpendicolari. La spira è percorsa da una corrente di intensità I. Determinare direzione, intensità e verso del campo magnetico B nel punto O.



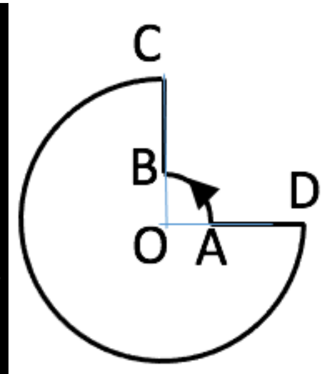
$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \overrightarrow{Idl} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$



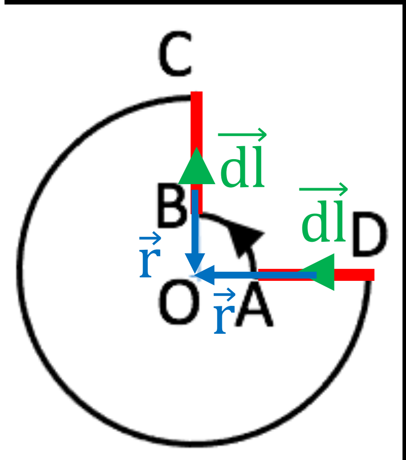
$$AB: \int_0^{\frac{\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\ \overrightarrow{Idl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \hat{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\ Idl\ \frac{1}{R^2} = \hat{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}R} dl\ = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{8R}$$

$$CD: \int_0^{\frac{3\pi}{2}3R} \frac{\mu_0}{4\pi}\ \overrightarrow{Idl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \hat{k}\int_0^{\frac{9\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\ Idl\ \frac{1}{9R^2} = \hat{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{9R^2}\frac{9\pi}{2}R = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{8R}$$

3) La spira piana in figura è costituita da due archi di circonferenza concentrici di raggi R e 3R raccordati da due tratti radiali lunghi 2R fra loro perpendicolari. La spira è percorsa da una corrente di intensità I. Determinare direzione, intensità e verso del campo magnetico B nel punto O.



$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \qquad \overrightarrow{B(0,0,0)} = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4R}$$



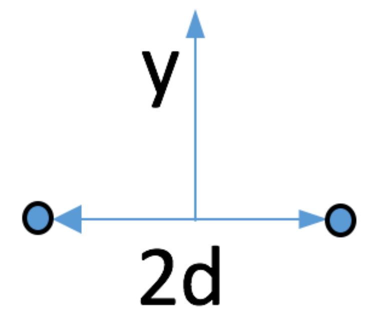
$$AB: \int_0^{\frac{\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \hat{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, Idl\, \frac{1}{R^2} = \hat{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}R} dl = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{8R}$$

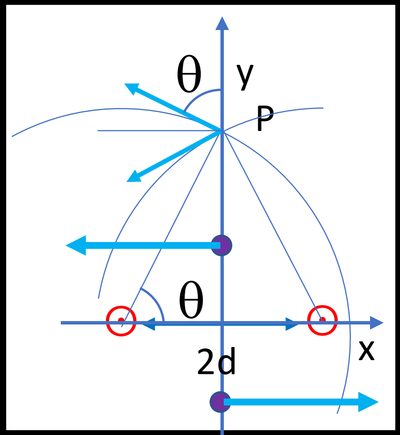
$$CD: \int_0^{\frac{3\pi}{2}3R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \hat{k}\int_0^{\frac{9\pi}{2}R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, Idl\, \frac{1}{9R^2} = \hat{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{9R^2}\frac{9\pi}{2}R = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{8R}$$

$$BC: \int_R^{3R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \int_R^{3R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \hat{k}\int_R^{3R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I|\overrightarrow{dl}|\, \frac{|\vec{r}|}{r^3} \sin(\pi) = 0$$

$$DA: \int_{3R}^{R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \int_{3R}^{R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\overrightarrow{dl} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \hat{k}\int_{3R}^{R} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I|\overrightarrow{dl}|\, \frac{|\vec{r}|}{r^3} \sin(0) = 0$$

5) Due conduttori rettilinei, complanari, separati da una distanza 2d, sono percorsi nello stesso verso da una corrente continua I.
Si determini a quale distanza y dal piano dei fili, lungo la linea di mezzeria, il modulo del campo induzione magnetica B è massimo.





$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2 + y^2}}$$

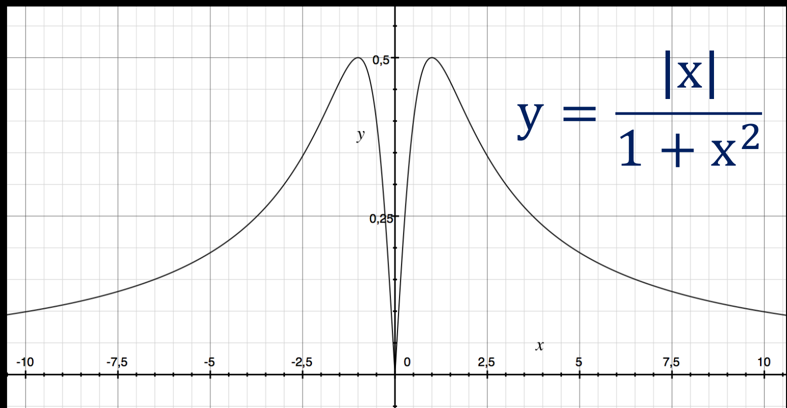
$$B_x = -2B\sin\theta = -2\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{y}{r} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{y}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{y}{d^2 + y^2}$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{|y|}{d^2 + y^2}$$

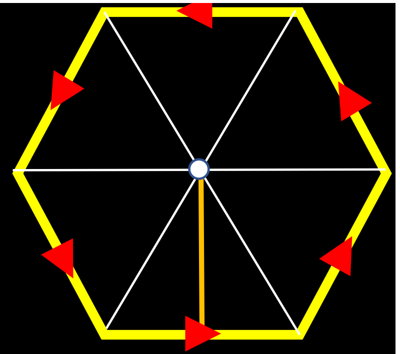
per $y > 0$

$$\frac{dB}{dy} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{1(d^2 + y^2) - y(2y)}{(d^2 + y^2)^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{d^2 - y^2}{(d^2 + y^2)^2}$$

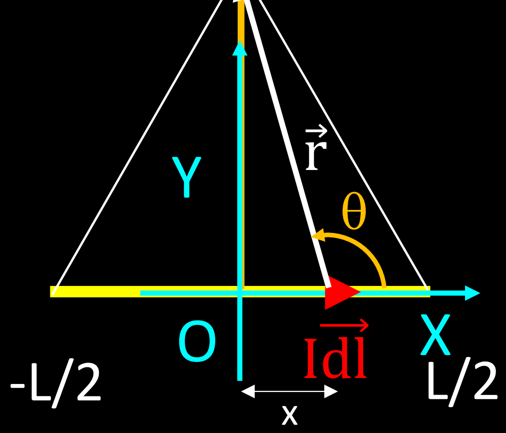
$$\left.\frac{dB}{dy}\right|_{y_{MAX}} = 0 \qquad d^2 - {y_{MAX}}^2 = 0 \quad \rightarrow y_{MAX} = \pm\, d$$



6) Determinare l'espressione del campo magnetico generato nel centro di un esagono regolare di lato L (apotema = $\sqrt{3}$ L/2) percorso dalla corrente I



$h = L \sin 60° = \sqrt{3}\, L/2$



$$\overrightarrow{dB(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\vec{dl} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\, r \sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{dx\, h}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

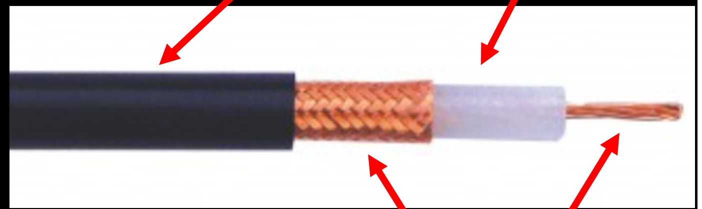
$$B = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{dx\, h}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I h}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\, I h}{4\pi\, h^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\mu_0\, I}{4\pi h} \frac{\frac{L}{2} - (-\frac{L}{2})}{\sqrt{(L/2)^2 + (\sqrt{3}L/2)^2}} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi\sqrt{3}L/2} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + 3L^2/4}} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\sqrt{3}L}\ \mathrm{X}\ 6 = \frac{\sqrt{3}\,\mu_0\, I}{\pi\, L}$$

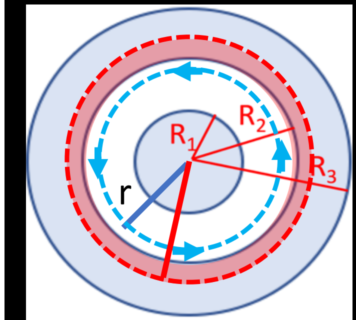
7) In figura è riportata la sezione di un cavo coassiale di lunghezza infinita. Nel conduttore centrale di raggio R_1 scorre, uniformemente distribuita, una corrente di intensità I. La stessa intensità di corrente scorre, anch'essa uniformemente distribuita, nel verso opposto nel conduttore esterno di raggi R_2 e R_3. Ricavare l'espressione del campo magnetico generato in tutto lo spazio dalle correnti circolanti nel cavo coassiale.

guaina esterna

isolante



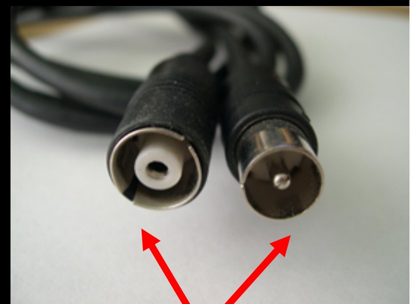
conduttori



γ

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint B(r)\,dl = B(r)\oint dl = 2\pi r\,B(r) = \mu_0\, I(r)_{conc}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, I(r)_{conc}}{2\pi r}$$



connettori

se $r \le R_1$ $\quad I(r)_{conc} = J_1\,\pi r^2 = I\,\dfrac{\pi r^2}{\pi {R_1}^2} = I\,\dfrac{r^2}{{R_1}^2} \Rightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0 I\, r}{2\pi {R_1}^2}$

$$J_1 = \frac{I}{\pi {R_1}^2}$$

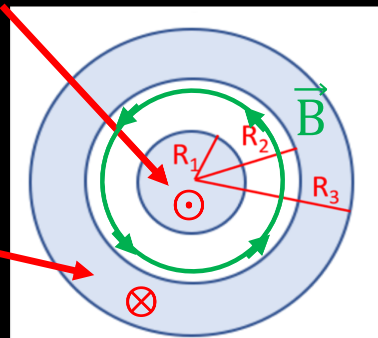
se $R_1 \le r \le R_2$ $\quad I(r)_{conc} = I \Rightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi r}$

se $R_2 \le r \le R_3$ $\quad I(r)_{conc} = I + J_2\,\pi(r^2 - {R_2}^2) = I\left(1 - \dfrac{\pi(r^2 - {R_2}^2)}{\pi({R_3}^2 - {R_2}^2)}\right) = I\,\dfrac{{R_3}^2 - r^2}{{R_3}^2 - {R_2}^2}$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}\,\frac{{R_3}^2 - r^2}{{R_3}^2 - {R_2}^2}$$

versi

$$J_2 = \frac{-I}{\pi({R_3}^2 - {R_2}^2)}$$



se $r \ge R_3$ $\quad I(r)_{conc} = I - I = 0 \Rightarrow B(r) = 0$

Complementi di fisica generale

adalberto.sciubba@uniroma1.it

sorgenti, campi e loro interazioni

VENERDI' 18 ORE 8-10

forze su cariche elettriche
forze fra correnti