

## Questi appunti non vanno studiati!

Una prima parte (metrologia, sistemi di unità di misura) va letta per cultura generale; una seconda (teoria della misura) va "gustata": letta e riletta per apprezzarne le sfumature e le implicazioni nella vita di tutti i giorni; una terza (elaborazione dati) va applicata ogni volta che si vorrà riportare una misura.

Verranno descritte delle "convenzioni" da seguire ispirate a criteri di praticità, alcune in ossequio di leggi dello stato, altre SHU QRUPDWLYH VFDWXULWH GD QHFHVXLQXWLOWXWLOW palestra per trattare con rigore una disciplina governata parzialmente anche dal caso.

Lo scopo principale di un corso di laboratorio è toccare con mano la differenza profonda fra teoria e realtà e sfruttare semplici strumenti statistici per implementare criteri decisionali oggettivi in presenza di incertezze inevitabili.

La parte applicativa di laboratorio (qui non descritta perché in continua evoluzione), vi richiederà di rispolverare le vostre capacità di calcolatrici e calcolatori. Ma i due ingredienti base, le due capacità pregresse indispensabili per aver successo negli studi, non li troverete nei libri: capacità di ragionamento e tanta tanta curiosità.

Adalberto Sciubba

# METROLOGIA

(Insieme delle regole e delle tecniche che conducono alla misura di grandezze fisiche)

Per operare nella realtà (è il compito degli ingegneri) è necessario descrivere i fenomeni in modo:

- **OGGETTIVO** (non dipendente dalle qualità, sensazioni e/o concetti dell'osservatore)
- **INEQUIVOCABILE** (la valutazione di un osservatore deve essere comprensibile a tutti gli utilizzatori dell'osservazione)
- **RIPRODUCIBILE** (in ogni tempo e luogo la stessa osservazione dello stesso fenomeno deve produrre lo stesso risultato)

Per ottenere tale scopo occorre descrivere i fenomeni solo in termini di grandezze fisiche: entità suscettibili di valutazione quantitativa ed oggettiva, cioè di misurazione.

**Misurazione: determinazione di quante volte "g" la grandezza fisica in esame "G" "contiene" una grandezza di riferimento "[g]" ad essa omogenea**

G: grandezza fisica

g: misura

[g]: unità di misura

$$G = g [g]$$

Una grandezza viene detta grandezza fisica (g.f.) se è possibile specificare la serie di operazioni (**definizione operativa di g.f.**) che ne consente la misurazione. Pertanto nel momento in cui viene data la definizione operativa di una grandezza fisica viene anche stabilito come misurarla.

Si dicono **omogenee** quelle g.f. che hanno una stessa caratteristica misurabile: lunghezza di un righello, diametro di una circonferenza, altezza di un oggetto ...

È chiaro come per ottenere una grandezza di riferimento occorrono delle convenzioni riconosciute e adottate a livello internazionale.

**Definita una g.f. è possibile effettuare la misura contando quante volte deve essere applicata l'operazione di somma  $\oplus$  all'unità [g] fino ad ottenere esattamente  $G^1$ .**

## • Criteri di scelta per le unità di misura

Ogni grandezza fisica, per essere misurata **direttamente**, richiede una unità di misura (e quindi un campione di unità di misura). La scelta è illimitata e dettata solo da motivi di praticità. Analizziamo alcuni criteri generali che possono guidare nella scelta dell'unità di misura.

1) Analizziamo questa identità:  $1 \text{ m} = 5 \text{ dm} + 50 \text{ cm}$

essa è formalmente **retta** ma poco pratica:  $1 \neq 5 + 50$

Generalizzando, se  $G(C) = G(A) \oplus G(B)$

da cui  $g(C) [C] = g(A) [A] + g(B) [B]$

generalmente si ha  $g(C) \neq g(A) + g(B)$

tuttavia se  $[A]=[B]=[C]$ , allora:  $g(C) = g(A) + g(B)$

questo è un **primo criterio di coerenza**

In base ad esso g.f. omogenee devono essere misurate utilizzando la stessa unità di misura e quindi, se si adottasse questo criterio, per poter misurare tutte le g.f. ci sarebbe bisogno di una sola unità di misura per ogni gruppo di g.f. omogenee.

<sup>1</sup> Il simbolo  $\oplus$  definisce le operazioni materiali che portano alla somma di g.f.. Per esempio la somma della lunghezza di due righelli si ottiene allineandoli e ponendo l'estremità sinistra di uno a contatto con l'estremità destra dell'altro.

2) Consideriamo la misurazione della superficie di un rettangolo di area S e lati b e h

$$G(S) = G(b) \otimes G(h)$$

$$g(S) [S] = g(b) [b] \times g(h) [h]$$

Adottando il precedente criterio di coerenza  $[b]=[h]=[L]$ , si ottiene:

$$g(S) [S] = g(b) [L] \times g(h) [L]$$

In questo caso, anziché scegliere per la misura della superficie una nuova unità di misura, conviene scegliere  $[S] = [L^2]$  così da ottenere:

$$g(S) = g(b) \times g(h)$$

**secondo criterio di coerenza:** conviene utilizzare per la misura g.f. che sono funzione di altre, unità di misura espresse in termini di queste ultime

Per esempio  $3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/1 s}$ , ma  $3,6$  è preferibile in questo caso misurare le velocità in m/s.

### Quante unità di misura sono necessarie (fondamentali) per poter misurare tutte le g.f. ?

Per studiare tutti i fenomeni che riguardano la geometria avremo bisogno di poter misurare (e quindi definire le relative unità di misura e successivamente i relativi campioni di unità di misura):

**lunghezza [L]                      superficie [S]                      volume [V]**

Sappiamo però p.es. che l'area di un rettangolo è il prodotto di base per altezza e quella di un triangolo 1/2 base per altezza. All'idea del fattore numerico una superficie è pari al prodotto di due lunghezze e quindi, coerentemente, sceglieremo  $[S] = [L^2]$

Analogamente per il volume sceglieremo  $[V] = [L^3]$

Pertanto sarà sufficiente, per studiare la geometria definire una sola grandezza unitaria: le altre due possono essere ricavate a partire da questa.

Per studiare la cinematica dovremo poter misurare altre g.f.:

**tempo [T]                      frequenza [f]                      velocità [v]                      accelerazione [a]                      ... [...]**

Poiché tutte le grandezze introdotte sono ricavabili una dall'altra ricorrendo alle loro definizioni  $f=1/T$ ,  $v=s/t$ ,  $a=v/t$  ... è sufficiente, sfruttando la necessità di un sistema coerente, introdurre una sola grandezza fisica unitaria.

Analogamente per studiare la dinamica dovremo introdurre come g.f. fondamentale solo la massa o la forza o l'energia o altre grandezze meccaniche in quanto anche queste sono collegate le une alle altre da definizioni leggi fisiche (p.es.  $F= m a$ ).

**Il numero di g.f. fondamentali è pari al numero delle g.f. totali diminuite del numero di relazioni geometriche, definizioni, leggi fisiche, etc. (relazioni base) che le correlano:**

$$N_{\text{fond.}} = N_{\text{g.f.}} - N_{\text{rel}}$$

### • Notazioni, equazioni e calcolo dimensionale

Utilizzando la notazione di Maxwell ogni g.f. può essere espressa in termini delle g.f. scelte come fondamentali; vediamo degli esempi:

- consideriamo la definizione di velocità:  $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ .

<sup>2</sup> Il simbolo  $\otimes$  è stato introdotto in analogia con quello che definisce le operazioni materiali di somma

<sup>3</sup> Nel campo della geometria esistono anche due quantità che a rigore non necessitano di unità di misura: l'angolo piano e l'angolo solido. Esse sono rispettivamente il rapporto fra un arco di circonferenza e il suo raggio ( $[L]/[L]$ ) e il rapporto fra una porzione di superficie sferica e il quadrato del suo raggio ( $[S]/[L^2]$ ). Per riconoscere queste due g.f. si utilizzano rispettivamente il radiante (rad) e lo steradiante (sr).

Questa relazione vettoriale corrisponde a tre relazioni scalari; esaminiamo una di queste:  $v_x = \frac{dx}{dt}$  (le altre si comporteranno allo stesso modo).

Essa altri non è che il rapporto fra una lunghezza e un tempo quindi coerentemente verrà misurata utilizzando l'unità di misura  $[v] = [L]/[T]$ .

Dalla relazione  $[v] = [L]/[T]$  si può ricavare immediatamente il **grado di omogeneità** delle grandezze coinvolte, infatti assumendo un'unità di lunghezza  $n$  volte più piccola, la misura di  $v$  resta moltiplicata per  $n$ ; assumendo un'unità di tempo  $m$  volte più piccola, la misura di  $v$  resta moltiplicata per  $m$ ; assumendo infine un'unità di massa  $M$  volte più piccola, la misura di  $v$  non viene alterata. Ciò si esprime dicendo che una velocità ha una omogeneità di grado 1 rispetto alla lunghezza, di grado -1 rispetto al tempo e di grado 0 rispetto alla massa.

- Altro esempio: se le g.f. fondamentali scelte fossero lunghezza  $[L]$ , massa  $[M]$ , tempo  $[T]$ , temperatura  $[θ]$  e carica elettrica  $[Q]$ , allora la forza  $[F]$  si esprimerebbe come:

$[F] = [L]^{-1} [M] [T]^{-2} [θ]^0 [Q]^0$  cioè la forza avrebbe grado di omogeneità 1 con la lunghezza e la massa, -2 con il tempo e 0 con la temperatura e la carica elettrica.

Infatti la legge  $F = m a$  indica che la forza ha omogeneità 1 sia con la massa che con l'accelerazione. Utilizzando la relazione  $a = \frac{dv}{dt}$  si ha  $[a] = [L]^{-1} [T]^{-2}$  e quindi il risultato.

Queste equazioni tra unità di misura si dicono **equazioni dimensionali**.

Grandezze fisiche omogenee hanno le stesse dimensioni e sono misurate confrontandole con la stessa unità di misura. Non è sempre viceversa: grandezze di specie diversa possono risultare equidimensionate. Ne sono esempi la pressione e il modulo di Young, capacità termica ed entropia, lavoro e momento di una coppia.

Oltre alle grandezze dimensionate esistono anche quelle adimensionate. Nel sistema di unità di misura che adotteremo (il Sistema Internazionale) ne sono esempi gli angoli piani e solidi, l'indice di rifrazione, i rendimenti e in generale tutte le grandezze derivate dal rapporto di grandezze equidimensionate (p.es. le costanti dielettriche relative o le permeabilità magnetiche relative).

Il **calcolo dimensionale** permette di condurre un'analisi qualitativa delle varie grandezze che compaiono nello studio dei fenomeni fisici valutando la natura delle grandezze che compaiono in una relazione algebrica, differenziale, vettoriale, ecc. facendo astrazione dal numero che esprime il "valore" delle grandezze.

**Condizione necessaria** (ma non sufficiente) **per la validità di una formula fisica è che le dimensioni dei due membri di un'equazione, o dei vari addendi di un polinomio, siano le stesse.**

Questo tipo di calcolo è estremamente rapido da fare ma si rivela uno strumento assai potente per verificare (in parte) la validità dei risultati ottenuti in qualsiasi tipo di indagine fisica.

Sfuggono però a questo controllo dimensionale i errori dovuti ad errati coefficienti numerici, o a confusione tra grandezze equidimensionate, o alla presenza di grandezze adimensionate.

Esempi:

•  $m \ddot{x} + k x = m g \Rightarrow [m \ddot{x}] = [k x] = [m g] = [F] = [M]^{-1} [L] [t]^{-2}$  : somma, sottrazione e uguaglianza sono possibili solo fra grandezze omogenee

•  $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = V_0 \cos[\omega(t + \tau)] \rightarrow [\omega t + \phi] = [\omega(t + \tau)] = 1$  e da  $[\phi] = [t]^{-1} \rightarrow [\phi] = 1$  e  $[\tau] = [t]$

• Ricavare il valore di  $n$  nell'espressione  $T = 2\pi (g/l)^n$  (periodo di oscillazione di un pendolo)

• Se  $T = T_0 e^{-\alpha x}$ , sviluppando in serie di potenze si ha  $T = T_0 \sum_{n=0, \infty} \frac{(-\alpha x)^n}{n!} = T_0 [1 - \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2} - \dots]$  e

quindi  $[\alpha x]^n = 1 \rightarrow [\alpha x] = 1 \rightarrow [\alpha] = [x]^{-1}$  (gli argomenti di funzioni trascendenti, in quanto sviluppiabili in serie di potenze, sono adimensionali)

<sup>4</sup> Il fatto che dx e dt siano quantità infinitesime non altera la sostanza del ragionamento

# SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Prima di operare con misure sui fenomeni fisici è importante decidere quale sistema di unità di misura adottare. Infatti, a seconda della scelta, variano non solo i valori numerici dei risultati ma a volte anche la forma delle equazioni che descrivono le leggi fisiche.

Un sistema di unità di misura è caratterizzato dalle grandezze fisiche che sono considerate fondamentali, dalle eventuali convenzioni di coordinazione e dai campioni di unità di misura.

È ispirato da criteri di praticità e deve risultare completo (deve consentire la misurazione di tutte le g.f.), assoluto (le misure non devono variare con luogo e al trascorrere del tempo).

La praticità si riflette nella scelta delle g.f. fondamentali (p.es. si preferisce la lunghezza alla superficie o al volume), nell'adozione dei criteri di coerenza e del sistema decimale per i multipli e sottomultipli.

L'assolutezza del sistema è garantita dalla scelta dei campioni di unità di misura che devono risultare precisi (il valore della loro misura non deve variare da una misurazione all'altra) e invariabili nel tempo e nello spazio. Anche i campioni di unità di misura devono risultare pratici e quindi devono essere o accessibili (presso le opportune istituzioni nazionali e/o Internazionali) o riproducibili in laboratorio.

Il sistema di unità di misura che oggi meglio risponde a queste esigenze è il Sistema Internazionale (SI).

Il D.P.R. 12 agosto 1982 n. 802, specificando come per l'attuazione della direttiva CEE n. 80/181 relativa alle unità di misura, obbliga l'uso del SI.

Anche se adatteremo il SI è bene ricordare che diversi testi, anche recenti, utilizzano sistemi di unità di misura differenti (spesso il vecchio M.K.S.A.) ormai non più consentiti dalla legge.

---

<sup>5</sup> Si tratta di relazioni fra g.f. scelte convenzionalmente in alcuni settori per motivi di praticità. Per esempio porre la velocità della luce nel vuoto pari al valore adimensionato 1 semplifica i calcoli di cinematica relativistica ma impedisce la verifica dimensionale dei risultati.

## DEFINIZIONI

### Grandezza misurabile (grandezza fisica):

attributo di un fenomeno, corpo o sostanza che esse essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente.

P.es.: lunghezza, tempo, massa, temperatura, resistenza elettrica.

Le grandezze che possono essere in ordine di grandezza esse sono grandezze dello stesso tipo (omogenee); esse possono essere raggruppate per categorie:

P.es.: lavoro, calore, energia; esse, circonferenza, lunghezza d'onda.

### Grandezza fondamentale:

una delle grandezze che in un sistema di unità di misura sono convenzionalmente accettate come funzionalmente indipendenti dalle altre.

Nel SI alcune grandezze fondamentali sono lunghezza, tempo, massa, temperatura.

Per ogni grandezza fondamentale è necessario stabilire convenzionalmente un'unità di misura; ad ogni unità di misura deve corrispondere un campione di unità.

### Grandezza derivata:

grandezza definita in un sistema di unità di misura come funzione delle grandezze fondamentali di quel sistema.

P.es. nel SI la velocità è una grandezza derivata da lunghezza e tempo.

### Dimensione di una grandezza:

espressione che rappresenta una grandezza in un sistema di unità come prodotto di potenze di fattori (detti dimensioni) che rappresentano le grandezze fondamentali di quel sistema.

P.es. nel SI la dimensione della forza è  $[L][M][T]^{-2}$  è la dimensione dell'energia, del calore, del momento di una forza.

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una relazione fra grandezze fisiche sia corretta è che le dimensioni delle grandezze unite dalla relazione di uguaglianza o dalle operazioni di somma o sottrazione siano le stesse:

p.es.:  $E = m g h + 1/2 m v^2$ ; i 3 termini hanno le dimensioni  $[L]^2[M][T]^{-2}$ .

Gli argomenti di funzioni sviluppabili in serie di potenze (p.es.  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\log(x)$ ,  $\sinh(x)$ , ...) hanno sempre dimensione 1.

### Grandezza di dimensione adimensionale, numero puro):

per esempio: angolo piano, angolo solido, indice di rifrazione, costante dielettrica relativa, numero di Mach.

### Unità di misura:

quantità particolare che convenzionalmente è stata adottata come la quantità alla quale vanno comparate le altre grandezze dello stesso tipo per esprimerne la grandezza relativa.

### Simbolo di una unità di misura:

segno convenzionale che designa una unità di misura; p.es.: m per metro, K per kelvin, A per ampere, V per volt, W per watt.

I nomi di tutte le unità di misura sono nomi propri di accento e vanno scritti con l'iniziale minuscola; sono invariabili al plurale con l'eccezione di: metro, chilogrammo, secondo, candela, mole, radiante e steradiano.

I simboli delle unità vanno scritti con la maiuscola quando il nome dell'unità è derivato da un nome proprio; minuscola negli altri casi.

Quando l'unità di misura non è accompagnata dal valore numerico deve essere scritta per esteso e non con il simbolo.

Indipendentemente dal sito in cui sono inseriti, i simboli vanno scritti in caratteri verticali lasciando uno spazio fra il valore e l'unità (p.es. 5,4 mA e non 5,4mA); non devono mai essere seguiti da punti di abbreviazione.

#### Sistema di unità di misura:

insieme di unità fondamentali e unità derivate definite seguendo le regole assegnate per un sistema di grandezze assegnato; per esempio: c.g.s., M.K.S.A., S.I.

Un sistema di unità è coerente se tutte le unità derivate sono coerenti; esse sono espresse come prodotto di potenze di unità fondamentali.

P.es:  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ ;  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ ;  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ;  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$

#### Campione (di unità di misura):

materiale o sistema di misura usato a definire, realizzare, conservare o riprodurre una unità di grandezza per servire da riferimento.

Non appena la tecnologia consente di utilizzare un fenomeno in modo più stabile e riproducibile che in precedenza, si cerca di utilizzarlo per definire un nuovo campione di unità di misura (per un nuovo sistema di unità di misura). Il suo valore, per ovvi motivi di praticità, non dovrà discostarsi dalla vecchia unità di misura per più della sua riproducibilità.

#### Campione (primario e secondario):

il campione (primario) è designato o largamente accettato come avente le più alte qualità metrologiche; il suo valore è stabilito senza riferimento ad altri campioni della stessa specie; può riferirsi indifferentemente a grandezze fondamentali o derivate.

Il campione secondario è un campione il cui valore è determinato per confronto col campione primario della stessa grandezza.

#### Tracciabilità:

proprietà di un campione o del risultato di una misura di essere rapportabile ai campioni locali, nazionali o internazionali mediante una catena ininterrotta di confronti effettuati con incertezze determinate.

I campioni secondari e/o quelli tenuti a partire da questi ultimi non hanno lo stesso grado di riproducibilità del campione primario: si pensi al campione di lunghezza che da un lato richiede un orologio atomico per sfruttare la definizione di "metro campione" e dall'altro, per poter essere utilizzato, p.es. per la graduazione di un regolo, deve consentire la segnatura di due tacche a distanza di un metro ed è quindi soggetto a dilatazioni termiche, vibrazioni, problemi di planarità, etc. I campioni primari vengono utilizzati rarissimamente: la quasi totalità delle misurazioni tecniche e scientifiche non richiede quella riproducibilità garantita solo dal campione primario.

## Sistema Internazionale di unità di misura SI: norma CNR-UNI 10003

sistema coerente basato 7 unità fondamentali:

grandezza [simbolo <sup>6</sup> ]	Unità	simbolo dell'unità
lunghezza [L]	metro	m
massa [M]	chilogrammo	kg
tempo [T]	secondo	s
corrente elettrica [I]	ampere	A
temperatura termodinamica [θ]	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

### Campioni delle unità di misura del SI<sup>7</sup>:

lunghezza: metro (m)  
*Lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di 1/299 792 458 di secondo*

Prima dell'attuale definizione (XVII Conferenza Generale Pesi e Misure –1983) che è parte integrante del S.I. il metro ha avuto le seguenti definizioni:

- **quarantamilionesima parte del meridiano terrestre** (più precisamente la decimilionesima parte della distanza fra il polo della Terra e l'antipolo lungo il meridiano passante per Parigi) - la definizione di Laplace-Lagrange risale al 1791)
- **distanza fra due incisioni su di una sbarra di platino-iridio** (conservata nel Bureau International des Poids et Mesures a Sèvres, presso Parigi) - la definizione, adottata nel settembre 1889 dalla I<sup>ra</sup> Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, scaturì dalla necessità di fare riferimento a campioni concreti. La riproducibilità di questi campioni era di  $0,2 \mu\text{m/m} = 2 \times 10^{-7}$
- **lunghezza pari a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della riga rosso-arancio del kripton 86**. La definizione (XI CGPM - 1960) è parte integrante del vecchio sistema M.K.S.A (La riproducibilità di questo campione era di  $1 \text{ nm/m} \approx 10^{-9}$ )

La definizione del metro campione di lunghezza si basa sulla costante della velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Nel S.I. tale velocità è per definizione  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ . La riproducibilità del campione di lunghezza coincide, quindi, con quella del campione del secondo  $\Delta L / (L_{\text{metro}}) = \Delta T / (T_{\text{secondo}}) = 10^{-12}$

massa: chilogrammo (kg)  
*Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres - Francia)*

La definizione (III CGPM – 1901) si riferisce a un cilindro di platino – iridio (90%-10%) alto circa 39 mm e di diametro circa 39 mm. Per il suo utilizzo (confronto con prototipi di campioni

<sup>6</sup> Per i simboli delle grandezze fisiche non esiste una convenzione; siete liberi di scegliere la notazione che preferite facendo però molta attenzione: ad esempio con [L] si può indicare una lunghezza ma anche lavoro, momento angolare, induttanza ...

<sup>7</sup> Chi fosse interessato agli aspetti metrologici delle misure dovrà tenere conto del continuo aggiornamento delle definizioni e dei campioni di unità di misura: alcune delle definizioni riportate potrebbero essere già state modificate

secondari) viene impiegata una bilancia (della portata di un chilogrammo) sensibile ai 10<sup>-8</sup> g che garantisce una riproducibilità  $\Delta M / (M_{\text{chilogrammo}}) = 10^{-8}$ .

Quello di massa è il campione di unità di massa del S.I. più antico. Si attende una minore incertezza nella determinazione del numero di Avogadro ( $N = 6,022\ 045\ 23 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ ) per definire un nuovo campione di massa.

tempo: secondo (s)

*Durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133*

Prima dell'attuale definizione del secondo (XIII CGPM – 1967) precedenti si basavano sulla periodicità del moto terrestre:

- **86400-esima parte del giorno solare medio**, cioè della media sulla base di un anno del **giorno solare**, inteso come intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole sullo stesso meridiano (86 400 ore/giorno x 60 min/ora x 60 s/min)
- **secondo dell'effemeride** è 1/31 556 925,974 dell'anno tropico **1900** (intervallo di tempo fra due equinozi di primavera).

Le due unità di misura del secondo erano crollate nel 1900, ma ora non lo sono più, a causa delle anomalie nella velocità di rotazione della Terra.

Successivamente la definizione si basò sull'orologio ad ammoniaca che sfrutta la costanza della frequenza delle vibrazioni dell'atomo di azoto rispetto al piano degli atomi di idrogeno (23,87 GHz).

La riproducibilità del campione di secondo è  $\Delta T / (T_{\text{secondo}}) = 10^{-12}$ .

temperatura termodinamica: kelvin (K)

*Frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua*

(XIII CGPM – 1967)

Il punto termodinamico dove coesistono le tre fasi solida, liquida e gassosa dell'acqua è alla temperatura di -0,01 °C alla pressione di 4,58 mmHg.

Con questa definizione l'acqua distillata solidifica, alla pressione atmosferica, a 0,01 K.

La riproducibilità del campione è  $\Delta \theta / (\theta_{\text{kelvin}}) = 2 \times 10^{-7}$ .

intensità di corrente: ampere (A)

*Intensità di una corrente elettrica costante che, percorrendo due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  N su ogni metro di lunghezza*

(IX CGPM- 1948)

La definizione è astratta. Con le opportune precauzioni è tuttavia possibile approssimare sufficientemente le richieste di conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita e sezione nulla della definizione: il campione è riproducibile  $\Delta I / (I_{\text{ampere}}) = 4 \times 10^{-6}$ . Per altre grandezze elettriche (non fondamentali) sono disponibili campioni più riproducibili.

<sup>8</sup> Per questo motivo questi strumenti vengono detti orologi atomici: il loro periodo di oscillazione è legato ad una particolare vibrazione di un sistema atomico.

quantità di materia: mole (mol)

Quantità di materia di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari debbono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, ovvero gruppi specificati di tali particelle

(XIV CGPM – 1971)

intensità luminosa: candela (cd)

Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}$  Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è  $1/683 \text{ W/sr}$

(XVI CGPM – 1979)

La frequenza di 540 THz corrisponde nel vuoto, alla lunghezza d'onda  $\lambda = 555 \text{ nm}$  (colore giallo) che è al massimo della sensibilità spettrale dell'occhio umano.

**Unità derivate:**

alcune unità derivate hanno nomi e simboli speciali; ad esempio:

grandezza derivata	unità di misura	simbolo	equivalenza
angolo piano	radiante	rad	1 rad = 1 m/m
angolo solido	steradiane	sr	1 sr = $\frac{1 \text{ m}^2}{r^2}$
frequenza	hertz	Hz	1 Hz = 1/s
forza	newton	N	1 N = 1 kg m/s <sup>2</sup>
pressione	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>
energia, lavoro, calore	joule	J	1 J = 1 N m
potenza	watt	W	1 W = 1 J/s
carica elettrica	coulomb	C	1 C = 1 A s
potenziale, f.e.m.	volt	V	1 V = 1 J/C
resistenza elettrica	ohm	$\Omega$	1 $\Omega$ = 1 V/A
flusso magnetico	weber	Wb	1 Wb = 1 V s
induzione magnetica	tesla	T	1 T = 1 Wb/m <sup>2</sup>
capacità elettrica	farad	F	1 F = 1 C/V
induttanza	henry	H	1 H = 1 Wb/A
flusso luminoso	lumen	lm	1 lm = 1 cd sr
illuminamento	lux	lx	1 lx = 1 lm/m <sup>2</sup>

**Prefissi per indicare multipli e sottomultipli:**

femto	f	$10^{-15}$	peta	P	$10^{15}$
pico	p	$10^{-12}$	tera	T	$10^{12}$
nano	n	$10^{-9}$	giga	G	$10^9$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	mega	M	$10^6$
milli	m	$10^{-3}$	chilo	k	$10^3$

<sup>9</sup> Si raccomanda la pronuncia "giul"

Notazioni:

Seguendo lo stile dei documenti I.S. **per marcare la parte decimale di un numero viene utilizzata la virgola e non il punto.**

Non può essere usato più di un prefisso.

Per le misure di massa i multipli e sottomultipli ~~non~~ riferiti al grammo e non al chilogrammo: mg per milligrammo e non  $\mu$ kg.

Occorre prestare attenzione nei casi in cui un prefisso può essere confuso con una unità; ad esempio: mK = millikelvin; Km = kelvin x metro; km = chilometro; MK= megakelvin.

È opportuno scegliere i prefissi in modo da tenere valori compresi fra 0,1 e 1 000.

In una tabella va usato un solo prefisso per una ~~data~~ anche se i valori escono dall'intervallo compreso fra 0,1 e 1 000.

**Unità non SI:**

minuto (min) ora (h) giorno (d)

1 miglio nautico internazionale = 1 852 m

1 miglionautico/h = 1 knot = 0,514 444 m/s

1 km/h = 1/3,6 m/s

1 bar =  $10^5$  Pa

1 kWh = 3,6 MJ

1 Ah = 3,6 kC

1 t (tonnellata) = 1 000 kg

**Unità non SI da evitare (anche se ancora di uso comune)**

1" (1 inch) = 25,4 mm      1 ft = 12" = 0,304 8 m      1 yd = 3 ft = 0,914 4 m

1 kg (chilogrammo forza) = 1 kg (chilogrammo peso) = 9,806 65 N

1 atm (atmosfera standard) = 101,325 kPa = 1,013 25 bar

1 at (atmosfera tecnica) = 98,066 5 kPa = 0,980 665 bar

1 mmHg = 1 Torr = 1,333 22 mbar = 133,322 Pa

1 cal = 4,186 8 J      1 Cal = 4,186 8 kJ

1 HP = 735,498 75 W      1 CV = 75 kgm/s      1 kgm/s = 9,806 65 W

# TEORIA DELLA MISURA

Illustriamo alcuni concetti della teoria della misura con un esempio<sup>10</sup>.

Si supponga di voler determinare la profondità di un pozzo gettando in esso un sasso<sup>11</sup>. Per ottenere una misura diretta della profondità dovremmo eseguire una serie di operazioni che porti al confronto di questa grandezza con un'unità di misura ad essa omogenea<sup>12</sup>. Alternativamente si può pensare a una misura derivata cui si misura il tempo impiegato dal sasso per giungere in fondo al pozzo.

Seguiamo questa seconda strada: possiamo misurare con un cronometro<sup>13</sup> il tempo necessario affinché il sasso, lasciato cadere dall'imboccatura del pozzo, raggiunga il fondo. A questo punto abbiamo bisogno di una relazione tra la profondità del pozzo e il tempo impiegato dal sasso per raggiungerne il fondo. Questa relazione deve essere nota con almeno la stessa accuratezza che richiediamo alla nostra misura.

Dobbiamo quindi creare un modello della realtà, realizzarlo dal punto di vista delle leggi fisiche e infine tradurlo in relazioni matematiche. Una prima schematizzazione potrebbe consistere nel considerare la caduta del sasso come se avvenisse nel vuoto. In questo caso l'equazione del moto si otterrebbe:

$$(1) \quad h = \frac{1}{2} g t^2$$

in cui "h" rappresenta la profondità incognita del pozzo, "g = 9,8 m/s<sup>2</sup>" l'accelerazione di gravità e "t" il tempo misurato direttamente con un cronometro.

La misurazione si svolgerebbe nel seguente modo: il misuratore lascia cadere il sasso mentre fa partire il cronometro quando sente il tonfo del sasso nell'acqua; arresta il cronometro; l'indicazione del cronometro rappresenta il tempo "t" da introdurre nella relazione (1).

Ci aspettiamo di trovare un solo valore<sup>15</sup> dal quale ricavare esattamente la profondità cercata? Se ripetessimo più volte la misurazione otterremmo una serie di misure di tempo simili tra loro ma non coincidenti. Ciò può essere dovuto a diversi motivi:

- non perfetto sincronismo fra il momento del rilascio del sasso e il inizio del conteggio da parte del cronometro dovuto al ritardo dei riflessi del misuratore
- non perfetto sincronismo fra il momento in cui viene percepito il tonfo del sasso e l'istante in cui viene arrestato il cronometro
- velocità iniziale del sasso non nulla.

Questo tipo di cause porta a valori diversi fra misura e la successiva e esse producono effetti di piccola entità che però non sono né riproducibili, prevedibili perché variano casualmente. Vengono chiamati errori casuali.

<sup>10</sup> L'esempio ha validità didattica; all'interno di questo corso la fase preparatoria delle misurazioni da svolgere in laboratorio non viene delegata allo studente. È però istruttivo e consigliato provare ad immaginare alcuni esempi di misurazione ed analizzarli nei termini descritti in queste note

<sup>11</sup> La profondità del pozzo è il misurando. Stiamo definendo il metodo di misurazione: lanciamo un sasso (misura derivata) anziché adoperare un regolo (misura diretta)

<sup>12</sup> Dovendo adottare il Sistema Internazionale, l'unità di misura della profondità (omogenea ad una lunghezza) è il metro. Ovviamente non ricorreremmo al confronto diretto col campione (cosa peraltro impossibile poiché in questo caso si tratta di una definizione) ma con un regolo che riporti delle incisioni (tacche) la cui distanza è determinata a partire dalla definizione del campione primario o più realisticamente da un campione secondario.

<sup>13</sup> Il funzionamento del cronometro si basa su un oscillatore il cui periodo è in relazione nota con il campione di unità di misura del tempo.

<sup>14</sup> Stiamo definendo la procedura di misurazione

<sup>15</sup> Tale valore è detto valore vero. Poiché la definizione del misurando non può essere infinitamente precisa, possono esistere più valori veri.

Gli errori<sup>16</sup> sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato.

Per eliminare questa non riproducibilità si può agire in tre direzioni a seconda del risultato che si vuole ottenere:

- se non è importante distinguere, p.es., fra profondità di 10 metri e una di 11 metri si può utilizzare un cronometro in grado di apprezzare i decimi di secondo. La scarsa sensibilità dello strumento maschererà l'effetto degli errori casuali
- se è possibile eseguire molte misure nelle stesse condizioni si possono utilizzare metodi statistici<sup>17</sup> per ridurre l'effetto degli errori casuali
- se si possono effettuare solo poche misurazioni, o al limite una sola, è necessario cambiare strumentazione<sup>18</sup>, p.es. si può utilizzare un cronometro elettronico attivato dallo sblocco di un elettromagnete che lascia cadere un pannello con velocità nulla e si arresta quando il suono del tonfo arriva a un microfono.

È però illusorio pensare di poter eliminare del tutto gli errori casuali modificando la strumentazione: il cronometro, pur tanto sensibile, non sarà mai in grado di apprezzare intervalli temporali inferiori al periodo del suo oscillatore interno, i dispositivi elettromeccanici risentono delle vibrazioni, la smagnetizzazione non è istantanea, i dispositivi elettronici sono disturbati dai campi elettromagnetici, etc.

**La presenza degli errori casuali viene facilmente evidenziata ripetendo più volte la misurazione nelle stesse condizioni: se la sensibilità della strumentazione lo consente, si otterranno valori non coincidenti fra loro; lo scarto fra i valori delle varie misure è indice dell'entità degli errori casuali presenti nella misurazione.**

Esiste però un'altra serie di cause che possono alterare il risultato della misura e produrre valori che si discostano da quello teorico:

- la formula (1) non considera l'attrito con l'aria
- non si tiene conto della velocità finita della propagazione del suono
- il cronometro può anticipare o ritardare

Le prime due cause conducono a misure di tempo superiori a quelle che si otterrebbero se la (1) descrivesse correttamente il fenomeno; la terza produrrebbe risultati maggiori o minori di quelli corretti a seconda della disfunzione dello strumento. Queste cause appartengono però a una categoria diversa da quella degli errori casuali e il verso della variazione rimangono inalterati fra una misura e la successiva; si parla in questo caso di **errori sistematici**.

**Contrariamente agli errori casuali quelli sistematici, una volta individuati, possono, almeno in linea teorica, essere eliminati cambiando la strumentazione e/o il metodo di misura se questo altera i risultati delle misure o apportando correzioni numeriche al risultato ottenuto.**

Purtroppo non sono di facile individuazione proprio perché non si evidenziano ripetendo la misurazione nelle stesse condizioni. In questo caso per rivelare la presenza occorre o studiare più a fondo il fenomeno per averne un modello e quindi una rappresentazione matematica più accurata, oppure si deve ripetere la misurazione in condizioni diverse, p.es. cambiando lo sperimentatore o la strumentazione o il principio fisico sul quale si basa la misura, etc.

<sup>16</sup> Nel campo della teoria della misura la parola "errore" non ha una connotazione negativa non essendo sinonimo, ad esempio, di "sbaglio".

<sup>17</sup> Il più noto consiste nel calcolare la media aritmetica della serie di risultati: i valori in eccesso tenderanno a compensarsi con quelli in difetto riducendo l'effetto degli errori casuali. Nel seguito del corso approfondiremo questa metodologia

<sup>18</sup> In questo caso variano anche la definizione del misurando, il metodo di misurazione e la procedura della misurazione

Non si deve pensare che la distinzione fra errori casuali ed errori sistematici sia così netta. Ad esempio nell'azionare il cronometro in coincidenza del verificarsi di un qualche evento, a causa della lentezza dei nostri riflessi, l'azione avverrà sempre in ritardo (errore sistematico) ma varierà anche leggermente da una prova successiva (errore casuale).

Data l'impossibilità di conoscere i valori veri (occorrerebbe effettuare delle misure senza errore ...) il concetto di errore è qualitativo; nell'elaborazione dei risultati di misurazioni si ricorrerà alle incertezze, quantificate statisticamente e descritte in modo oggettivo.

## DEFINIZIONI

Il *Comité International des Poids et Mesures (CIPM)*, la più alta autorità mondiale in metrologia ha chiesto al *Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)* di produrre una procedura accettata a livello internazionale per esprimere l'incertezza delle misure

Tale compito è stato istruito dall'*International Organization for Standardization (ISO)* che meglio rappresenta le necessità delle industrie e del commercio e dalle organizzazioni che partecipano ai lavori dell'ISO. *International Electrotechnical Commission (IEC)* partner dell'ISO nella standardizzazione mondiale; il CIPM *Organisation Internationale de Metrologie Légale (OIML)* organizzazioni mondiale nella metrologia; *International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC)*, *International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP)* e *International Federation of Clinical Chemistry (IFCC)*.

Seguono alcune note e definizioni, ricavate in parte dalle norme DIN, che sono state adattate ai contenuti del corso.

## MISURAZIONE E MISURA

### Misurazione:

insieme di operazioni che portano alla determinazione del valore del **misurando**, cioè il valore della grandezza fisica da misurare. Una misurazione è quindi con la specificazione appropriata del misurando, del **metodo di misurazione** e della **procedura di misurazione**.

### Misura:

valore del misurando ottenuto seguito a una misurazione. È espressa come una unità di misura moltiplicata per un numero:

p.es. : lunghezza di una sbarra: 0,34 m; massa di un corpo: 0,152 kg; quantità di sostanza di un campione di acqua: 0,012 mol

I valori possono essere positivi, negativi o zero.

<sup>19</sup> Così come l'uso dell'*International System of Units (SI)* ha portato alla coerenza in tutte le misurazioni tecniche e scientifiche, in quest'epoca di mercato globale occorre un consenso mondiale sulla valutazione ed espressione dell'incertezza affinché sia possibile confrontare misure effettuate in nazioni diverse.

I valori di grandezze di dimensione 1 sono generalmente espressi come numeri puri (p.es. un'eccezione: 0,17 sr).

**L'unità di misura deve essere sempre espressa in quanto parte integrante della misura.**

#### Definizione del misurando:

il misurando deve essere definito con sufficiente completezza, rispetto all'accuratezza richiesta, affinché per tutti gli scopi pratici il valore associato con la sua misurazione sia unico. Se, come esempio, la lunghezza di una sbarra lunga nominalmente 1 m deve essere determinata con l'accuratezza di  $\mu\text{m}$ , occorre che vengano specificate la temperatura che la pressione; se l'accuratezza richiesta è 1 mm necessario esprimere tali condizioni di misura.

#### Valore vero:

valore consistente con la definizione di una particolare grandezza data. Questo è il valore si otterrebbe da una misurazione perfetta; pertanto valori veri non sono determinabili. Possono esserci più valori veri consistenti con una particolare definizione se questa non è sufficientemente dettagliata rispetto all'accuratezza della misurazione.

#### Metodo di misurazione:

può essere diretto se il valore del misurando è ottenuto mediante l'uso di uno strumento atto alla misurazione della grandezza fisica del misurando; è indiretto se il risultato è espresso in termini dei valori di altre grandezze essendo nota la relazione fra queste e il misurando. Molti fenomeni fisici possono essere utilizzati in una misurazione; p.es. per misurare lunghezze si possono utilizzare: interferenza luminosa, variazioni di capacità elettrica; per temperature: la dilatazione termica, l'effetto termoelettrico, la variazione di resistenza elettrica; per la forza: la deformazione elastica, l'accelerazione; per l'intensità di corrente: l'effetto Joule, effetti elettromagnetici.

#### Risultato di una misurazione:

valore attribuito al misurando seguito a una misurazione. È solo un'approssimazione o stima del valore del misurando ed è quindi completo solo quando venga accompagnato dall'incertezza di quella stima. Riportando il risultato di una misurazione deve essere chiaro se è stata o meno effettuata una correzione per errori sistematici e se è stata eseguita una media aritmetica di più valori. In molti casi il risultato di una misurazione è determinato da una serie di osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità. Eventuali variazioni dei risultati di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate le grandezze influenti.

## ERRORI, EFFETTI E CORREZIONI<sup>20</sup>

### Errori di misura e loro cause:

L'errore è il risultato di una misurazione meno un valore vero del misurando. Esso è un concetto idealizzato perché gli errori possono essere conosciuti esattamente in quanto non sono noti i valori veri; in pratica si usa al suo posto una convenzionale che è la stima dell'incertezza.

Ogni valore misurato è influenzato da imperfezioni dello strumento, del metodo di misura, dell'oggetto cui appartiene il misurando, dell'ambiente e dell'osservatore; queste influenze possono anche variare nel tempo. Infine ci possono essere errori commessi dall'osservatore inesperto che si supporranno inesistenti (ma gli studenti sono periferici degli inesperti in questo campo a meno che non abbiano precedentemente acquisito esperienza nel campo delle misurazioni).

Esistono molte cause possibili dell'errore di una misurazione:

- definizione incompleta del misurando
- realizzazione imperfetta della definizione del misurando
- insieme di dati misurati non rappresentativo del misurando
- conoscenza inadeguata delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione
- valutazione soggettiva nell'lettura di strumenti analogici
- risoluzione della strumentazione insufficiente
- valori inesatti delle costanti e dei parametri ottenuti da sorgenti esterne
- assunzioni ed approssimazioni utilizzate
- variazioni delle osservazioni ripetute non identificate

L'errore viene scomposto in una componente casuale e una sistematica.

### Errori casuali

L'errore casuale è pari all'errore meno l'errore sistematico. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori casuali provengono da imprevedibili variazioni temporali e spaziali delle grandezze influenti. Sebbene non sia possibile compensare completamente gli errori casuali, il loro effetto può essere ridotto aumentando il numero di osservazioni calcolando la media aritmetica di un numero sufficientemente elevato di misure: l'errore casuale è il risultato di una misurazione meno la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità.

**La deviazione standard sperimentale della media aritmetica di una serie di misurazioni non è l'errore casuale della media ma una misura dell'incertezza della media dovuta ad effetti casuali.**

---

<sup>20</sup> Il concetto di incertezza come attributo quantificabile è stato introdotto recentemente anche se la teoria degli errori è stata a lungo parte della teoria e pratica della misura. Oggi è accettato il fatto che **quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimanga sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.**

### Errori sistematici

L'errore sistematico è pari all'errore meno l'errore casuale. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori sistematici producono variazioni di verso e entità costanti al ripetersi delle misurazioni; non possono essere eliminati ma spesso possono essere ridotti: se viene identificato un effetto sistematico esso può essere quantificato e, se è significativo per l'accuratezza richiesta, si può applicare una correzione numerica per compensare l'effetto o procedere con una nuova misurazione in condizioni di non riproducibilità.

L'errore sistematico è la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando. L'errore sistematico può essere evidenziato se non si osservano condizioni di riproducibilità.

**Si assume che il risultato di una misurazione sia stato corretto per tutti gli effetti sistematici significativi noti e che sia stato compiuto ogni sforzo per identificarli e che, dopo la correzione, il valore atteso dell'effetto sistematico corretto sia nullo.**

**Dopo la correzione degli effetti sistematici, il risultato di una misurazione è tuttavia solo una stima del valore del misurando.**

### Correzione/fattore correttivo

valore che va sommato algebricamente/moltiplicato per il risultato per compensare l'errore sistematico; la compensazione non può essere completa quanto non è noto l'errore.

### Condizioni di ripetibilità:

esistono quando lo stesso osservatore effettua misure della stessa grandezza fisica usando lo stesso metodo di misura e gli stessi strumenti nelle stesse condizioni ed in un breve intervallo di tempo. Le variazioni di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate grandezze influenti.

### Grandezza influente:

grandezza diversa dal misurando che influisce sul risultato di una misurazione p.es.: la temperatura di un micrometro o la frequenza di una tensione alternata.

### Condizioni di riproducibilità:

possono esistere quando diversi osservatori usano misure di una stessa grandezza fisica (opportunosamente definita) utilizzando lo stesso metodo di misura e strumenti diversi e in luoghi e tempi diversi. Il confronto dei risultati ottenuti sotto condizione di riproducibilità può evidenziare la presenza di effetti sistematici non determinabili da ciascun osservatore separatamente.

## INCERTEZZA

*Riportando il risultato di una misura è obbligatorio fornire qualche indicazione quantitativa della qualità del risultato affinché i suoi utilizzatori possano stabilirne l'affidabilità. Senza tale indicazione i risultati delle misure non possono essere confrontati né fra di loro né con valori di riferimento.*

Errore e incertezza non sono sinonimi ma due concetti diversi: il primo è qualitativo perché si basa sul valore vero che non è noto, secondo è quantitativo perché si basa sui valori dei risultati delle misurazioni.

Quando tutte le componenti note e spesse dell'errore siano state e corrette, rimane sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.

L'incertezza comprende in generale diverse componenti; alcune possono essere valutate statisticamente (incertezze di tipo A); altre vengono valutate assumendo distribuzioni di probabilità assunte sulla base dell'esperienza o di altre informazioni (incertezze di tipo B).

Le componenti della categoria A) sono caratterizzate dalle stime delle varianze  $\sigma^2$  o delle deviazioni standard e dal numero di gradi di libertà.

Le componenti della categoria B) devono essere caratterizzate da quantità che possono essere considerate approssimazioni delle corrispondenti varianze (la cui esistenza è assunta); analogamente per le approssimazioni delle deviazioni standard.

L'incertezza viene generalmente espressa da una deviazione standard (o un suo multiplo).

L'incertezza standard del risultato di una misura è derivata ottenuto dai valori di altre grandezze è detta **incertezza standard combinata**. La corrispondente deviazione standard stimata è pari alla radice quadrata della varianza combinata ottenuta dalle varianze delle varie componenti (legge di propagazione delle incertezze).

Una scienza è esatta nel limite in cui riesce a determinare l'incertezza dei suoi risultati

# STRUMENTI DI MISURA

## Strumenti tarati

Gli strumenti conservano, mediante l'operazione di taratura effettuata dal costruttore, copia del campione dell'unità di misura. Si pensi ad un righello: una volta realizzata (in un ufficio metrologico) una copia del campione di unità di misura di lunghezza, con questo vengono tarate nuove copie e così via: le copie vengono diffuse per generare copie successive. Ad ogni passaggio la qualità metrologica del campione si degrada per via degli errori di misura fino ad arrivare a quello utilizzato per la costruzione del righello. La divisione di 1 cm del righello "ricorda" in questo modo 1/100 della distanza fra le tacche della prima copia di campione di metro realizzata. Analogamente per gli altri strumenti. E' interessante notare come la misura del tempo richieda per questo processo di memorizzazione l'uso di un sistema in grado di oscillare a frequenza fissa: il pendolo meccanico (una volta sostituito da una massa rotante - il bilanciere - collegata ad una molla elicoidale) o nella strumentazione elettronica un circuito oscillante che vibra alla frequenza determinata dalle caratteristiche elastiche di una lamina piezoelettrica di quarzo). E la bilancia o il termometro come vengono tarati.

## Scala degli strumenti analogici

Gli strumenti di misura analogici possono avere una o più scale.

- Indice: parte mobile di un dispositivo indicatore che la posizione, rispetto a tacche di riferimento, permette di determinare il valore indicato (p.es.: ago, puntino luminoso, superficie di un liquido).
- Scala: insieme ordinato di tacche (con una numerazione associata) che forma parte del dispositivo indicatore di uno strumento di misura.
- Divisione: parte della scala compresa fra due tacche consecutive.
- Valore di una divisione: distanza fra due tacche misurata nell'unità riportate sulla scala.
- Scala lineare/non lineare: scala in cui il rapporto fra lunghezza (p.es. in cm) e il valore di ciascuna divisione è/non è costante per tutta la scala. Una scala non lineare può essere ad esempio: logaritmica, quadratica, parabolica, iperbolica (ohmmetro).
- Scala a zero soppresso: scala in cui l'intervallo aperto dalla scala non include lo zero (p.es.: il termometro clinico).
- Scala a zero centrale: scala in grado di presentare valori sia positivi che negativi

## Sensibilità

Una delle principali caratteristiche distintive di uno strumento di misura è la sensibilità.

Essa è definita come rapporto fra la variazione dell'indicazione e la variazione della sollecitazione in ingresso che l'ha provocata. Se invece lo strumento di misura ha un indicatore digitale la sensibilità è definita come il rapporto fra il numero di incrementi digitali e la variazione del misurando che l'ha provocata (dove la variazione minima è detta digit).

Al variare della sollecitazione la sensibilità può essere costante, se la funzione di trasferimento è lineare (p.es. voltmetro, oscilloscopio), o variare in funzione della sollecitazione (p.es. : ohmmetro). Più lo strumento è sensibile e più piccola è la variazione della grandezza di ingresso che produce una variazione dell'uscita pari a una divisione della scala.

## Precisione

La capacità di uno strumento di fornire indicazioni simili sotto condizioni di ripetibilità della misurazione della stessa grandezza è detta precisione.

In generale l'indicazione di uno strumento è funzione non solo della grandezza da misurare ma anche di altre quantità (disturbi) che influenzano il risultato variandolo in modo imprevedibile (si tratta di errori casuali). Tanto più lo strumento è esente da questi effetti tanto più è preciso.

<sup>21</sup> A questo punto dovrete aver e la curiosità per navigare, per esempio dalle parti di wikipedia, per vedere il "come funziona" di altri strumenti. Provate ad esplorare anche i siti degli istituti di metrologia.

La precisione e la sensibilità dello strumento sono due caratteristiche antitetiche: uno strumento molto sensibile riesce a percepire piccole variazioni della grandezza di ingresso ed è quindi sensibile anche alle cause casuali; uno strumento molto preciso sarà sensibile a questi fattori casuali e quindi sarà tipicamente poco sensibile alle variazioni dell'ingresso.

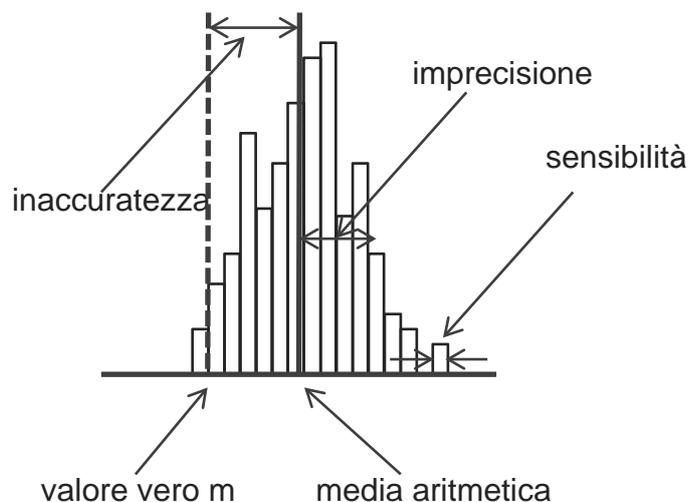
**Accuratezza**

Si definisce accuratezza di uno strumento la sua capacità di fornire una risposta prossima al valore vero del misurando. Il reciproco di questo concetto è l'inaccuratezza che cerca di quantificare la presenza di errori sistematici evidenziabile, sotto condizioni di ripetitività dalle differenze delle medie aritmetiche di campioni di misure ottenuti mediante metodi e/o strumenti diversi. Una volta evidenziata l'inaccuratezza di uno strumento se ne deve ride l'entità o tramite l'aggiustamento, operazione che altera un corso di misura al fine di riportarne le caratteristiche entro i valori limite previsti; p.es. l'azzeramento di un ohmmetro o di un Palmer o mediante una calibrazione, operazione che non altera uno strumento di misura e porta alla conoscenza della differenza fra i valori indicati dallo strumento e i corrispondenti valori veri.

ESERCIZIO Discutere sensibilità, precisione e accuratezza di un orologio fermo

Una visualizzazione efficace degli effetti degli errori casuali e sistematici: si immagini un tiro al bersaglio sparando sei colpi con armi caratterizzate da diverse precisioni e accuratezze

Questo è invece come si presenterebbe una serie di misure in presenza di errori casuali e sistematici:

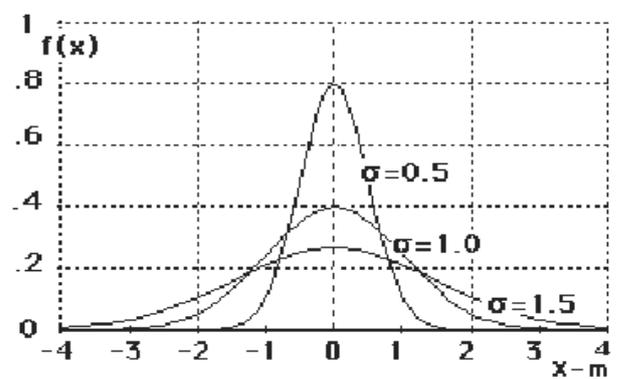


# "CENNI " AL CALCOLO DELLE PROBABILITA' E ALLA STATISTICA<sup>23</sup>

**grado di fiducia nel verificarsi di un evento**

definizione classica

definizione frequentistica



## LIVELLI DI CONFIDENZA

$$P(m - 1 \sigma \leq X \leq m + 1 \sigma) = 68,3\%$$

$$P(m - 2 \sigma \leq X \leq m + 2 \sigma) = 95,4\%$$

$$P(m - 3 \sigma \leq X \leq m + 3 \sigma) = 99,7\%$$

t

### Teorema del limite centrale

**SI ASSUME PERTANTO CHE LA MEDIA ARITMETICA DI UNA SERIE DI NUMEROSE MISURE SIA DISTRIBUITA GAUSSIANAMENTE CON UN ELEVATO LIVELLO DI FIDUCIA CHE IL SUO VALORE DISTI DALLA MEDIA (che rappresenta il valore vero) PER CIRCA UNA DEVIAZIONE STANDARD (della media).**

Con la notazione  $X = (40,35 \pm 0,14)$  cm indicheremo che il risultato di una misurazione ha fornito 40,21 cm ÷ 40,49 cm come intervallo in cui è elevata la probabilità che si trovi il valore vero cercato (non c'è certezza che il valore vero sia all'interno dell'intervallo)

# CIFRE SIGNIFICATIVE E DECIMALI: CONVENZIONI

sensibilità  
precisione

accuratezza

**Il numero di cifre significative del risultato di una misura è strettamente correlato alla bontà della misura e non può essere scelto arbitrariamente**

**Il numero delle cifre decimali può essere variato modificando l'unità di misura:  $10,5 \text{ mm} = 1,05 \text{ cm}$**

l'incertezza viene riportata arrotondando il valore con due cifre significative

## **ESERCIZI**

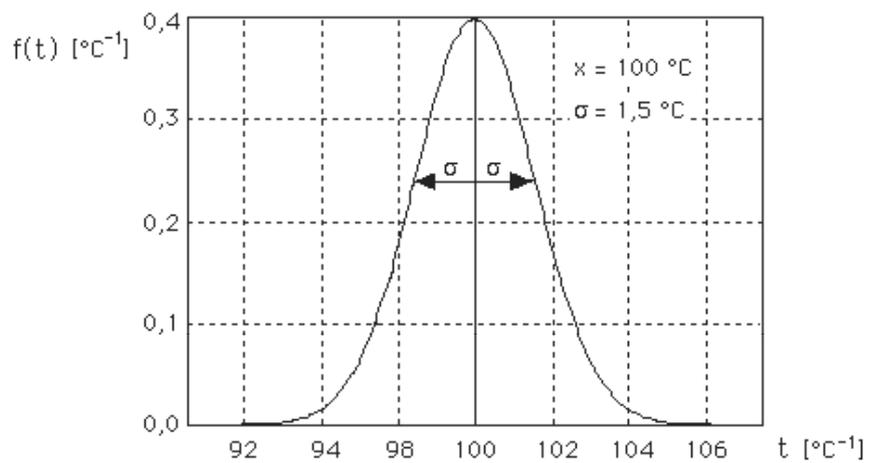
# STIMA DELLE INCERTEZZE



# Elaborazione di dati sperimentali

## MI SURE DIRETTE

Incertezze di tipo A



## Incertezze di tipo B

# I INCERTEZZE ASSOLUTE E RELATIVE

La quantificazione assoluta dell'incertezza non consente di valutare la bontà di una misura.

Per esempio l'incertezza 0,12 cm è indice di una ottima misura se il valore misurato è di 30,23 cm ma rappresenta una misura di scarsa qualità se il valore misurato è 0,35 cm.

Per questo motivo spesso si rapporta l'incertezza al valore della misura:  $\frac{\sigma(X)}{|X|}$

**(incertezza relativa di X)**

per cui le due misure precedenti presentano incertezze relative rispettivamente di:

$$0,12 \text{ cm}/30,23 \text{ cm} = 0,0039696 = 0,39696 \% \approx 0,40 \%$$

$$0,12 \text{ cm}/0,35 \text{ cm} = 0,3429 = 34,29 \% \approx 34 \%$$

dove nell'ultimo passaggio si utilizza la convenzione di utilizzare due cifre significative per esprimere le incertezze.

Il confronto sulla qualità delle due misure è ora immediato.

Nella formula dell'incertezza relativa  $\sigma(X)$  rappresenta la deviazione standard sperimentale di tipo A o B (cioè la migliore stima dell'incertezza della misura) e  $X$  la media aritmetica delle misure o il valore dell'unica misura effettuata (cioè la migliore stima del valore vero).

La strumentazione di uso comune produce incertezze relative<sup>30</sup> dell'ordine del %. Valori superiori al 10% non sono sempre accettabili<sup>[29]</sup>. Ottenere incertezze inferiori allo 0,1 % senza aver utilizzato strumentazione di qualità o metodi particolari è spesso sinonimo di sbagli di calcolo.

Va prestata attenzione al denominatore della formula dell'incertezza relativa: le incertezze relative perdono significato se le misure sono pressoché nulle. In questo caso eventuali confronti possono basarsi solo sulle incertezze assolute.

## MI SURE I NDI RETTE

che può essere una definizione o una legge geometrica, fisica o di qualunque altro tipo che lega fra loro diverse grandezze fisiche.

dove col simbolo  $\bar{x}_i$  si intende la media aritmetica delle  $N_i$  misure  $x_{ik}$  di  $X_i$  (ottenuta con incertezza di tipo A) o l'unica determinazione  $X_i$  (con incertezza di tipo B).

## PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE ASSOLUTE

dato che l'incertezza relativa è una quantità adimensionale consente il confronto fra le prestazioni di strumenti che misurano grandezze fisiche diverse: un metro con divisioni al mm è migliore di una bilancia con portata 1 kg e sensibilità 10 g/div

### ESEMPIO<sup>34</sup>:

Nel grafico si vede quanto sia linearizzabile la funzione  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  nell'intorno della misura  $R = 2$  cm: è sufficiente che  $\sigma_s(R)$  non faccia variare i risultati di una misura di  $R$  fuori dell'intervallo [1,8 cm; 2,2 cm] in cui la retta tangente approssima "bene" la funzione.

### SBAGLIO FREQUENTE

$$Y = a X + b X^2$$

$$\text{anziché } \sigma(Y) = |(a + 2 b x)| \sigma(X):$$

la formula di propagazione è ottenuta considerando variabili indipendenti;  $X$  e  $X_2$  non lo sono !

**Nelle esperienze svolte durante il corso la non linearità e la correlazione saranno in generale trascurabili e la (2) verrà ritenuta sufficientemente accurata per i nostri scopi.**

### PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE RELATIVE

se la (1) è funzione della sola  $X$  allora la (2) diventa banalmente  $\sigma_s(Y) = |dY/dX|_x \sigma_s(X)$

È consigliato l'uso, quando possibile, della (3) al posto della (2) per due motivi:

- il calcolo delle derivate, appena la funzione diventa un poco complessa, diventa pesante
- non è facile distinguere i contributi dati dalle misure dirette e quindi verificare la bontà del calcolo.

### SBAGLIO FREQUENTE

$$Y = a X + b X_0$$

~~$$\sigma(Y)/|y| = |a| \sigma(X)/|x|$$~~

anziché  $\sigma(Y)/|y| = |a| \sigma(X) / |a x + b X_0|$

Y non è sotto forma di monomio: l'incertezza relativa è data dal rapporto  $\sigma(Y) = |a| \sigma(X)$  diviso per  $|y| = |a x + b X_0|$  !

••• Nel riportare il risultato di una misura indiretta occorre:

### ESEMPI

se la (1) è funzione della sola X allora la (3) diventa banalmente  $\sigma_y(Y)/|Y| = |p| \sigma_x(X)/|X|$



La piccola differenza sulla seconda cifra delle incertezze nei due tipi di propagazione è dovuta al fatto che le incertezze vengono riportate con due cifre significative e quindi la meno significative risente dell'approssimazione

**Convenzionalmente l'incertezza relativa si riporta con due cifre significative.**

Ad esempio :  $\sigma_T/T = 1,26/34,713 = 0,0363 = 3,6\%$

## CONFRONTO FRA MISURE

Spesso occorre decidere se il risultato di una misura è attendibile, se rientra in un determinato intervallo di tolleranza, in generale occorre confrontare una misura con altri dati di riferimento o misure. Per far questo spesso si definisce a priori un livello di confidenza (tipicamente 68% 90% 95% 99% ma non solo) e si verifica se in base alla stima delle incertezze la misura ottenuta rientra nell'intervallo di confidenza stabilito in base al livello di confidenza prescelto.

A volte si preferisce considerare in accordo la misura che rientra in un intervallo di confidenza pari a tre deviazioni standard intorno al valore di riferimento.

Un altro criterio considera lo scarto relativo fra misura e dato di riferimento: durante questo corso la considereremo in accordo se dista meno del 5% e in disaccordo se si differenzia per più del 20%; non ci esprimeremo nei casi intermedi.

## CONFRONTO MISURA – VALORE

Si vuole confrontare la misura  $X \pm \sigma$  con il valore  $m$ .

Se la misura  $X$  fosse rappresentativa del valore vero  $m$  e  $\sigma$  stimasse correttamente l'incertezza associata alla misura allora:

lo **scarto** (assoluto)  $\Delta = X - m$  dovrebbe essere "piccolo" (quanto?)  $\rightarrow$  qualitativo

lo **scarto relativo**  $s = \frac{X-m}{m}$  dovrebbe essere "piccolo" (pochi %)  $\rightarrow$  qualitativo

la **variabile t**<sup>38</sup>  $t = \frac{X-m}{\sigma}$  dovrebbe risultare  $|t| < 3 \rightarrow$  quantitativo

## CONFRONTO MISURA – MISURA

Se non è dato un valore di riferimento, per confrontare fra loro le misure  $X_1 \pm \sigma_1$  e  $X_2 \pm \sigma_2$  occorrerà, a seconda del tipo di confronto, stimare il valore  $m$ :

lo **scarto** (assoluto)  $\Delta = X_1 - X_2$  dovrebbe essere "piccolo" (quanto?)  $\rightarrow$  qualitativo

lo **scarto relativo**  $s = \frac{X_2 - X_1}{\frac{X_1 + X_2}{2}}$  dove  $\frac{X_1 + X_2}{2}$  è la migliore stima di  $m$   
dovrebbe essere "piccolo" (pochi %)  $\rightarrow$  qualitativo

la **variabile t** in questo caso viene costruita considerando che la differenza  $X_1 - X_2$  dovrebbe essere nulla e che la misura di  $X_1 - X_2$  ha un'incertezza  $\sigma(X_1 - X_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

$t = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$  dovrebbe risultare  $|t| < 3 \rightarrow$  quantitativo

Lo **scarto assoluto**, anche se a volte utile, richiede una certa "sensibilità" da parte di chi analizza i dati per riconoscere o meno la compatibilità fra le misure;

lo **scarto relativo**, rapportando lo scarto assoluto al valore vero (o alla sua migliore stima), è di più semplice uso: all'interno di una particolare applicazione, un valore percentuale particolarmente basso o elevato è di facile interpretazione anche se non considera anche gli effetti degli errori di misura che possono falsare i risultati;

la **variabile t** quantifica maggiormente il significato dello scarto fra le misure:

se  $|t| < 3$  significa che lo scarto è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (eventuali errori sistematici sono trascurabili rispetto a quelli casuali); ripetendo più volte la/e misura/e è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori ed è possibile trovare una riduzione dello scarto.

Il confronto va considerato positivo e le misure compatibili (coincidenti).

Se  $|t| > 3$  significa che lo scarto non è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (sono presenti errori sistematici non trascurabili); ripetendo più volte la/e misura/e non è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori: lo scarto è significativo di una differenza fra i valori ottenuti.

Il confronto va considerato negativo e le misure non compatibili (diverse)

non esiste una convenzione sul nome di questa grandezza: spesso si indica con  $z$  lo scarto standardizzato per una variabile gaussiana e con  $t$  una variabile di Student. Ho preferito mantenere questo nome per scopi mnemonici anche se, a rigore, è corretto solo nel caso di una media aritmetica di misure distribuite gaussianamente.

# Studio della dipendenza funzionale di due grandezze fisiche

pendenza  $p$

L'intercetta  $q$

**statistica**

metodo dei minimi quadrati

quadrati

retta di regressione dei minimi

**Una volta che il metodo dei minimi quadrati è stato validato mediante l'elaborazione grafica si possono utilizzare le misure<sup>43</sup> di  $p_s$  e  $q_s$  per eventuali ulteriori analisi.**

<sup>43</sup> Il metodo dei minimi quadrati fornisce delle misure nel senso che oltre ai valori  $p_s$  e  $q_s$  fornisce anche le loro incertezze: sono vere misure. Il metodo grafico fornisce dei valori approssimativi ma nessuna indicazione sul loro grado di affidabilità: non sono misure!

# Come redigere una relazione

## TESTO

completa

stringata  
comprensibile

Pertanto non vanno descritti né l'aspetto teorico dell'esperienza né le modalità di esecuzione a meno che non siano difformi da quelle spiegate a lezione

## DATI

## TABELLE

dettate in parte dalle convenzioni e in parte dalla praticità nell'uso:

- ogni misura va riportata con l'unità di misura  
corretto numero di cifre decimali

se si tratta di misure dirette:

fino al decimo di divisione per letture di strumenti analogici;

tutte le cifre per letture di strumenti digitali  
riportando anche gli eventuali zeri terminali

- **ogni incertezza va riportata con l'unità di misura**

- **ogni incertezza va riportata col corretto numero di cifre significative**

se si tratta di misure derivate:

se è stata già valutata l'incertezza

lo stesso numero di cifre decimali dell'incertezza riportata con due cifre significative

se non è stata ancora valutata l'incertezza

un numero sufficiente di cifre significative che non richieda successivamente la ripetizione dei calcoli (ma senza esagerare<sup>46</sup>)

- **evidenziare eventuali dati non graficati** motivandone l'esclusione;

È **particolarmente importante** che almeno i dati graficati siano riportati in una tabella. In questo modo le informazioni per realizzare il grafico andranno prese dalla tabella e non ricercate all'interno della relazione.

Inoltre, anche se non strettamente necessarie per la realizzazione del grafico, è importante che nella tabella compaiano anche le incertezze delle grandezze graficate: se un punto risultasse non allineato sarebbe assai rapido verificare se la discordanza è compatibile con l'incertezza della misura o è sinonimo di qualche altro effetto.

## **GRAFICI**

Anche se per la realizzazione professionale di un grafico è consigliabile l'utilizzo di opportuni programmi di calcolo e grafica, è fondamentale una fase di apprendimento che non può prescindere dalla loro realizzazione manuale. Per questo scopo sono a disposizione fogli di carta con divisioni ogni millimetro (carta millimetrata).

Nell'usare la carta millimetrata per riportare grafici di misure si consiglia:

**SENZA**

**DOVER UTILIZZARE UNA CALCOLATRICE!!!**

Raramente in laboratorio avrete a che fare con incertezze inferiori allo 0,1 % che implica al più 5 cifre significative

riportare sul grafico la relazione (titolo del grafico) che ci si attende occorrere fra le quantità riportate sugli assi: deve essere nella forma  $Y = pX+q$  con gli stessi simboli e unità di misura utilizzati per gli assi e, nella relazione, nel testo e nelle tabelle.

## **ELABORAZIONE GRAFICA**

## **ELABORAZIONE STATISTICA**

## **VALIDAZIONE DEI MINIMI QUADRATI**

# formulario per l'elaborazione di dati sperimentali

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1,N} X_i}{N} \quad \sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N} (X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \quad \sigma_s(\bar{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$$

$$X_p = \frac{\sum_{i=1,N} \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

**Medie**

$\Delta = X - m$	$\Delta = X_1 - X_2$	<b>confronti</b>
$s = \frac{X - m}{m}$	$s = \frac{X_1 - X_2}{\frac{X_1 + X_2}{2}}$	
$t = \frac{X - m}{\sigma}$	$t = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$	

$$p = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N}} \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{Y})^2}{N}}$$

$$\sigma_s(Y) = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (p x_i + q)]^2}{N-2}}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N} \sigma_X} \quad \sigma_q = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{\sigma_X^2}}$$

**minimi quadrati**

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad \sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \sigma(X_i) \right)^2}$$

$$Y = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N} \quad \frac{\sigma(Y)}{Y} = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( p_i \frac{\sigma(X_i)}{X_i} \right)^2}$$

**misure indirette**

$T = (13,2 \pm 1,0) \times 10^3 \text{ s}$     simbolo - unità di misura - fattore moltiplicativo  
 2 cifre significative, stesse cifre decimali    **notazioni**

