Metodi Matematici per l'Ingegneria
(A.A. 2019-2020)

Metodi Numerici

Equazioni differenziali ordinarie

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Problemi ai limiti

Docente: Domenico Vitulano

Email: domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 11

Tel. 06 49766555

Ricevimento: consultare la pagina web dedicata al corso

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sui siti:

https://www.sbai.uniroma1.it/vitulano-domenico/analisi-numerica/2019-2020

https://elearning.uniroma1.it/enrol/index.php?id=7967

Equazioni differenziali

Strumento matematico efficace per la costruzione e la simulazione di sistemi dinamici in diversi ambiti dell'*ingegneria* ma anche della *biologia*, della *chimica*, della *fisica*, dell'*informatica* e delle *scienze sociali*.

Esprimono un legame tra una o più funzioni incognite e le loro derivate.

Se le derivate si riferiscono ad una sola variable, allora parliamo di **equazioni differenziali ordinarie** (spesso indicate con l'acronimo **ODE**):

$$y'(t) = ay(t),$$

con y funzione incognita, t variabile indipendente e a costante;

Se le derivate si riferiscono a più variabili, allora parliamo di **equazioni differenziali alle derivate parziali** (acronimo **PDE**):

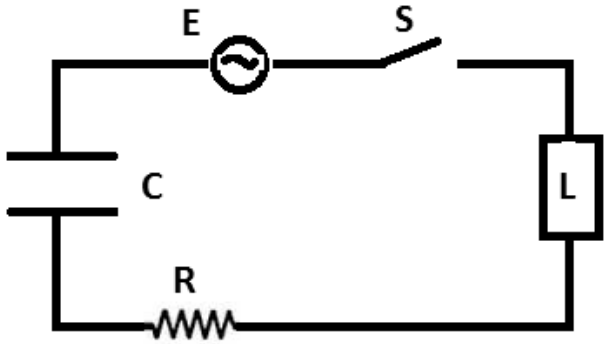
$$u_t - au_{xx} = 0,$$

con u funzione incognita, t e x variabili indipendenti e a costante.

Def: Un'equazione differenziale ha ordine p, se p é l'ordine massimo di derivazione che appare nella sua formula.

Esempio: Circuito elettrico

Un modello analogo descrive un problema di origine diversa: determinare la carica $Q(t)$ di un consendatore C nel circuito chiuso illustrato in figura, in cui R è la resistenza, L l'induttanza, E una sorgente di forza elettromotrice e S l'interruttore



Si applica la *seconda legge di Kirchoff*: in un circuito chiuso la differenza di potenziale fornita attraverso la sorgente E è uguale alla somma delle differenze di potenziale misurate nel resto del circuito, ovvero

$$E(t) = RI(t) + L\frac{dI}{dt}(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

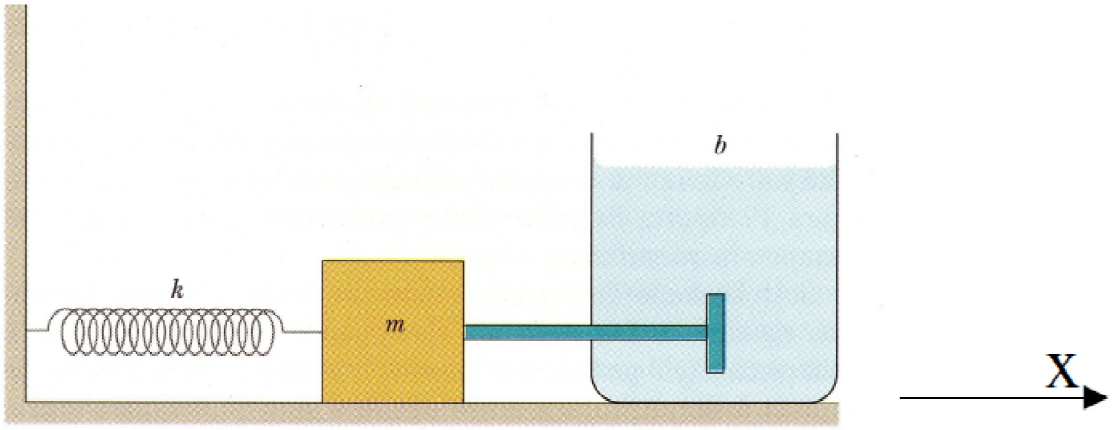
con I l'intensità di corrente. Poichè $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, si ha

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

(**Equazione del 2° ordine**)

Esempio di equazione del 2^o ordine

$f(x, y(x), y'(x), y''(x))$ Equazione del 2^o ordine



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$-b\dfrac{dx}{dt}$: **forza di attrito**

$-k\,x$: **legge di Hooke**

Moto **smorzato** di una **particella di massa** m attaccata all'estremità di una **molla di costante elastica** k

Oscillatore armonico semplice smorzato

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$-b\dfrac{dx}{dt}$: **forza di attrito**

$-k\,x$: **legge di Hooke**

Dall'**analisi matematica** sappiamo che la soluzione "*esatta*" è

$$x(t) = x_m\, e^{-bt/2m}\, \cos(\omega_m\, t + \varphi_m)$$

$\omega_m = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}}$: pulsazione dell'oscillatore

L'**ampiezza** x_m e la **fase** φ_m dell'oscillazione sono individuate dalle **condizioni iniziali**.

Eq. differenziali ordinarie: problema di Cauchy

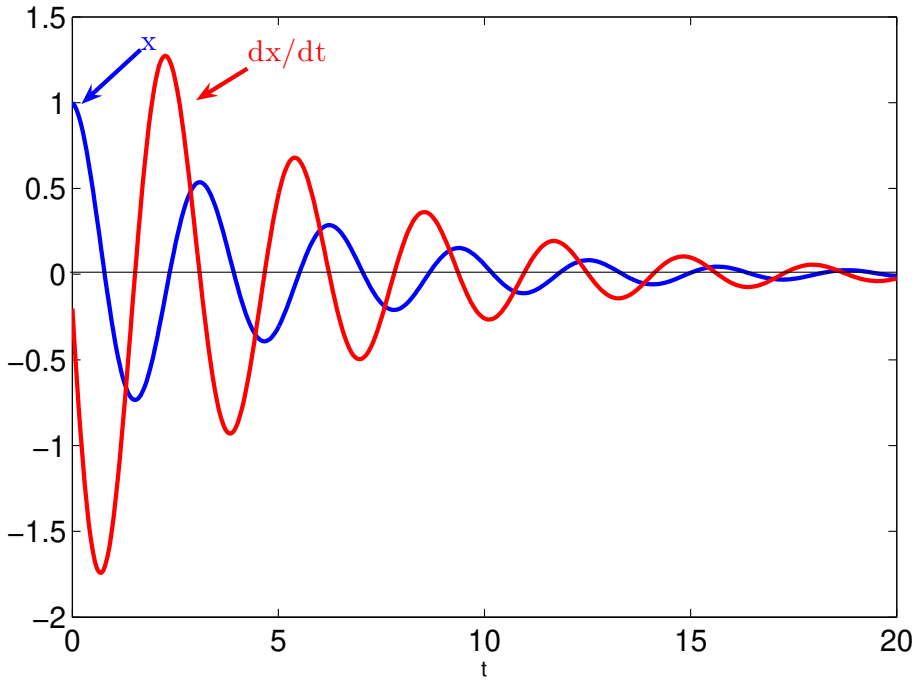
- Un **problema reale** richiede l'assegnazione delle **condizioni iniziali**.

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \qquad c.i. \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0 \qquad c.i. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_m\, e^{-bt/2m}\, \cos(\omega_m t + \varphi_m) \\ x_m = \dfrac{x_0}{\cos\varphi_m} \\ \tan\varphi_m = -\left(\dfrac{b}{2m} + \dfrac{v_0}{x_0}\right)\dfrac{1}{\omega_m} \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$



Equazioni differenziali di ordine n

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ \\ y^{(k)}(x_0) = y_k \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Condizioni iniziali

Un'**equazione differenziale di ordine** n può essere ricondotta a un **sistema di** n **equazioni differenziali** del primo ordine.

$$y^{(n)}(x) = f(x, \underbrace{y(x)}_{y_1(x)}, \underbrace{y'(x)}_{y_2(x)}, \underbrace{y''(x)}_{y_3(x)}, \ldots, \underbrace{y^{(n-1)}(x)}_{y_n(x)})$$

$$y_1(x) = y(x)$$

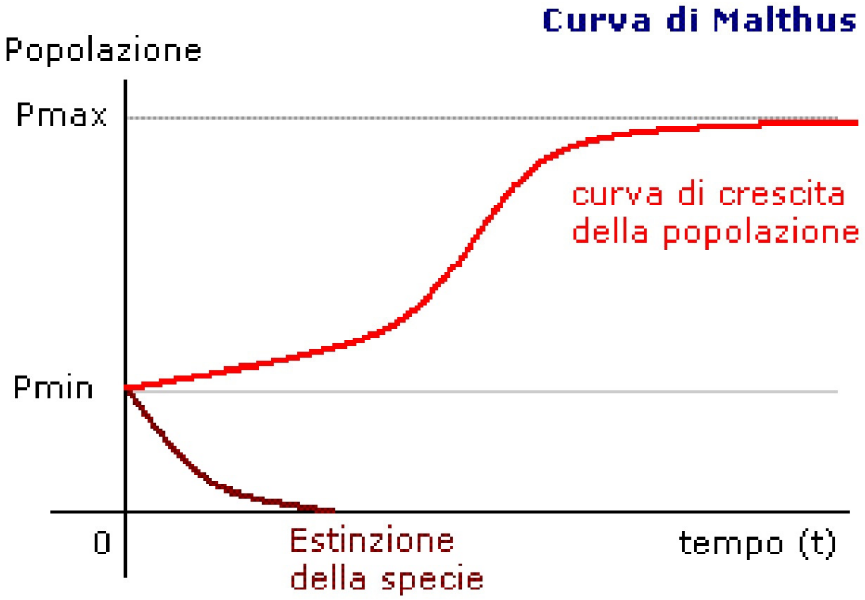
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{10} = y_0 \\ y_{20} = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} = y_{n-1} \end{cases}$$

Condizioni iniziali

Esempio di equazione del 1^o ordine

$y'(x) = f(x, y(x))$ Equazione del 1^o ordine



$$\frac{dy(t)}{dt} = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right)$$

Crescita di una popolazione

Crescita di una popolazione

$$\frac{dy(t)}{dt} = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right)$$

Sia $y(t)$ una popolazione di batteri (generalizzabile a popolazione di persone) in un ambiente limitato (max B batteri).

Se $y_0 << B$ e $C > 0$ il fattore di crescita,

allora la velocitá di crescita dei batteri al tempo t sará proporzionale al numero dei batteri preesistenti al tempo t, ma limitata dal fatto che non possono vivere piú di B batteri.

Nota: Equazione del 1^o ordine che fornisce il $n.$ di batteri al tempo t

Nota: Caso particolare delle **equazioni di Lotka-Volterra**

Crescita di una popolazione: Problema di Cauchy

$$\frac{dy(t)}{dt} = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right)$$

ammette la **soluzione generale** o famiglia di soluzioni:

$$y(t) = \frac{B\varphi(t;k)}{1+\varphi(t;k)}, \qquad t \neq 0 \qquad *)$$

dove $\varphi(t;k) = e^{Ct+k}, \quad k \in R.$

Se: $y(0) = 1 \;\Rightarrow\; \varphi(0;k) = e^k \;\; *) \Rightarrow \;\; k^* = -\log(B-1)$ per cui

$$y(t) = \frac{B\varphi(t;k^*)}{1+\varphi(t;k^*)} = \frac{Be^{Ct+k^*}}{1+e^{Ct+k^*}}$$

Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy

Prima di risolvere **numericamente** un'equazione differenziale bisogna essere sicuri che il **problema di Cauchy** ammetta un'**unica soluzione** $y(x)$.

Definizione. Una funzione $f(x,y)$ si dice **lipschitziana** in y uniformemente rispetto a x in $D \subset \mathbf{R}^2$, se esiste una **costante** $L > 0$ tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall (x,y_1),\ (x,y_2) \in D.$$

Nota. Una **condizione sufficiente** è che f_y esista e sia **limitata** in D.

Esempio: $f(x,y) = K\,y \rightarrow f_y(x,y) = K \rightarrow$ è **limitata**

$\rightarrow$ f è **lipschitziana**

Al contrario, la funzione $f(x) = |x|$ è continua ma non C^1 in un intervallo I limitato e simmetrico rispetto allo 0, in quanto la derivata non è continua in $x = 0$. Tuttavia, la funzione è **Lipschitziana** con $L = 1$ in quanto $\forall\, x_1, x_2 \in I$, si ha $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$.

Teorema

Sia f una **funzione definita** in un **intorno** del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

con a, b reali positivi, e si ponga che f sia almeno di classe C^0 in tale intorno.

Sia inoltre f **lipschitziana** rispetto alla variabile y e **uniformemente continua** rispetto alla variabile x:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\| \quad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2 \in J$$

con $L > 0$ **costante di Lipschitz**. Allora **il problema di Cauchy**:

$$\Theta = \begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

possiede una soluzione unica.

Sotto l'ipotesi di **continuitá** di f, si puó dimostrare l'equivalenza tra il problema di Cauchy e la seguente equazione integrale (**equazione di Volterra**):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in I_\delta$$

dove $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ é un intorno di x_0, con δ valore opportuno.

L'esistenza di una funzione $y = y(x)$ che soddisfa il sistema Θ si verifica se e solo se tale equazione ammette soluzione.

Ben-posizione del problema di Cauchy

Per poter risolvere **numericamente** il problema di Cauchy è necessario anche che il problema sia **ben posto**.

Definizione. Il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \textbf{condizione iniziale}$$

è **ben posto** se, dette $y(x; y_0)$ e $y(x; y_0 + \delta)$ le soluzioni con **condizioni iniziali** $y(x_0) = y_0$ e $y(x_0) = y_0 + \delta$ rispettivamente, si ha

$$|y(x; y_0) - y(x; y_0 + \delta)| < \epsilon \qquad x \in [a, b]$$

dove $\epsilon > 0$ è una prefissata **tolleranza**, purché $\delta = \delta(\epsilon)$ sia sufficientemente **piccolo**.

Nota. Se f soddisfa le condizioni del **Teorema**, il problema di Cauchy è **ben posto**.

Esempi

- Il seguente **problema di Cauchy:**

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t + 1 & t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione unica in $I = [0, 10]$.

$f(t, y) = -y + t + 1$ è definita e continua in $[0, 10] \times \mathbf{R}$ e

$$f_y(t, y) = -1, \quad \forall\, t \quad \Rightarrow \quad |f_y| = 1, \quad \forall\, t \in I \quad \forall\, y \in \mathbf{R}$$

- Il seguente **problema di Cauchy:**

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + tsin(ty) & t \in [0, 2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione unica in $I = [0, 2]$.

$f(t, y) = 1 + tsin(ty)$ è definita e continua in $[0, 2] \times \mathbf{R}$ e $f_y(t, y) = t^2 cos(ty), \quad \forall\, t \;\Rightarrow\; |f_y| = |t^2 cos(ty)| \leq t^2 \leq 2^2 = 4, \quad \forall\, t \in I \;\; \forall\, y \in \mathbf{R}$

Esempio

Si consideri il seguente **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

In $I = [0, 10] \times \mathbf{R}$, $f(t, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$ è definita e continua ma:

$$|f_y| = \left| \frac{1}{2} y^{-2/3} \right| \quad !\,!\,!$$

La soluzione non è unica: $f(t, y)$ non è lipshitziana rispetto a y.

Le soluzioni del problema sono:

$$y(t) = 0 \quad \text{e} \quad y(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

Metodo di Eulero

Problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [x_0, x_0 + \beta] \\ y(x_0) = y_0 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$

Discretizzazione di I: $x_i = x_0 + ih \qquad i = 0, \ldots, n \qquad h = \dfrac{\beta}{n}$

Metodo numerico: I valori **esatti** $y(x_i)$ vengono **approssimati** con i valori y_i.

Sviluppo in **serie di Taylor**:

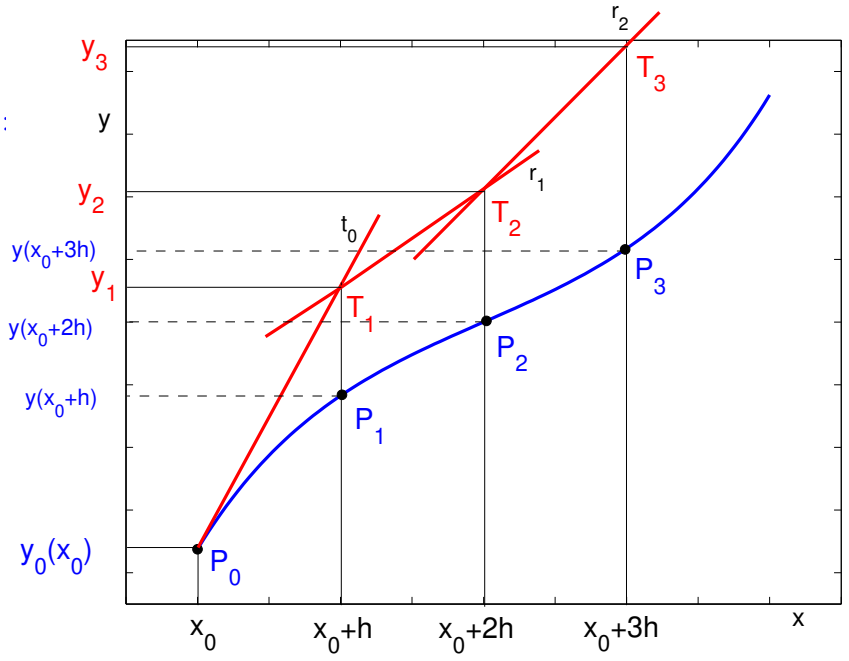
$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(\tau_1)h^2 \\ &= y(x_0) + f(x_0, y(x_0))h + \frac{1}{2}y''(\tau_1)h^2 \\ &\qquad \tau_1 \in [x_0, x_1] \end{aligned}$$

Soluzione **approssimata**:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Errore globale di troncamento:

$$e_1(x_1) = y(x_1) - y_1 = \overline{P_1 T_1}$$



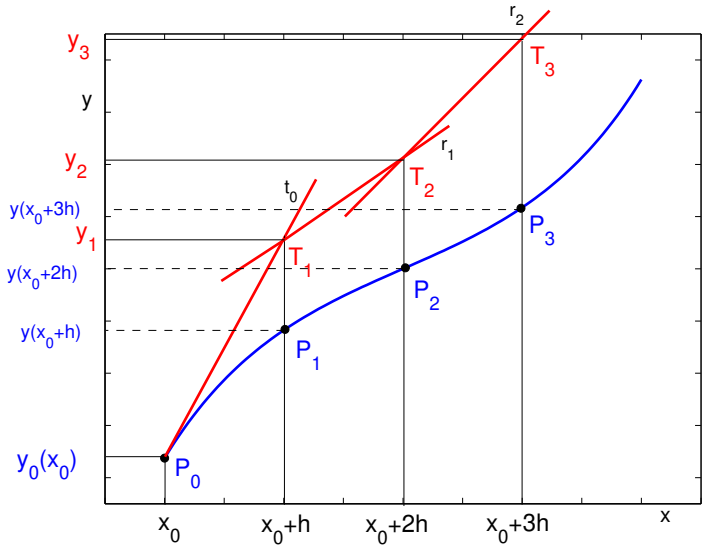
Algoritmo del metodo di Eulero

Algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Errore globale di troncamento:

$$e_i = y(x_i) - y_i = \overline{P_i T_i}$$



L'**errore globale di troncamento** ha due contributi:

- l'**errore locale di troncamento**, dovuto al fatto che la soluzione esatta $y(x)$ viene **approssimata localmente** con una **retta**:

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2} h^2 y''(\tau_i) \qquad \tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = O(h^2) \quad \rightarrow \quad \textbf{Primo ordine}$$

- l'**accumularsi** degli errori locali di troncamento, per cui al generico passo $i \geq 1$ ci si muove lungo la retta r_i che è una **approssimazione della retta tangente** alla soluzione in $P_i = [x_i, y(x_i)]$.

Convergenza del metodo di Eulero

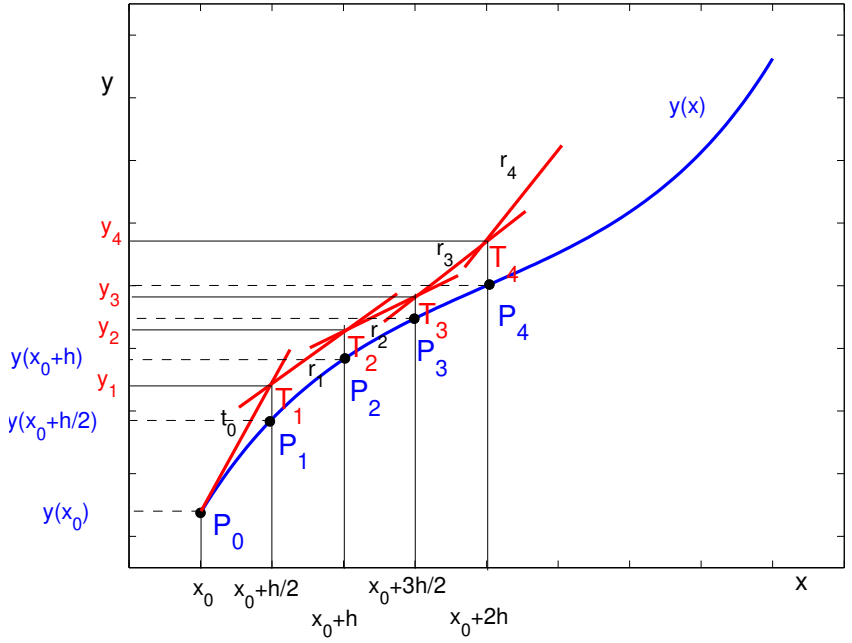
Definizione. Un **metodo numerico** per la soluzione approssimata di un'equazione differenziale è **convergente** se

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le n} |e_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} y_i = y(\bar{x}) \qquad \text{con } \bar{x} = x_0 + ih$$

Dalla figura è evidente che, se si **riduce il passo** h, si riduce anche l'**errore** $e_i = \overline{P_i T_i}$. Per di più

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le n} |e_i| = 0$$

$\Rightarrow$ Il metodo di Eulero è **convergente**



Un **metodo numerico** è **convergente** se è :

- **Consistente:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(x, y; h; f)}{h} = 0$$

+

- **Stabile:**

l'**accumularsi** degli errori locali di troncamento si mantiene **limitato**

Esercizio 1

Partendo da una condizione iniziale di 2 individui adulti (maschio e femmina), si studi l'andamento della popolazione (con una crescita del 10% e in un arco temporale di 10 anni) su un'isola che, in termini di spazio e risorse alimentari, non puó contenere piú di 10000 individui usando il metodo di Eulero.

Soluzione vera:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right) \qquad C = .1, \quad B = 10000$$

ammette la **soluzione generale** o **famiglia di soluzioni**:

$$y(t) = \frac{Be^{Ct+k}}{1 + e^{Ct+k}} \quad k \in R$$

Se poniamo: $y(0) = 2 \;\Rightarrow\; k^* = \log\left(\frac{2}{B-2}\right)$, e:

$$y(t) = \frac{Be^{Ct+k^*}}{1 + e^{Ct+k^*}}$$

Soluzione numerica:

Per verificare se vale il teorema di esistenza e unicità della soluzione bisogna verificare che:

$f(t, y(t)) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right)$ sia **lipschitziana** in $S = [0, 120] \times [2, B]$,

cioè se esiste una costante $L > 0$ (costante di Lipschitz) tale che:

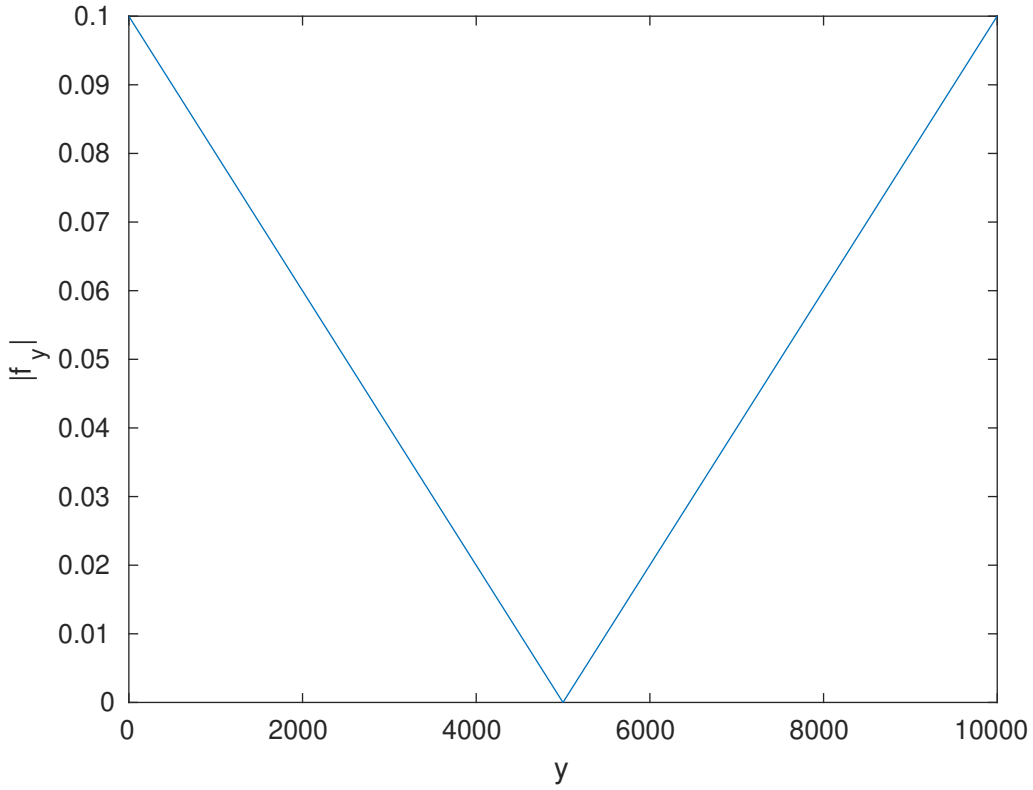
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \qquad \forall\ (t, y_1),\ (t, y_2) \in S.$$

Calcolando la **derivata**:

$$f_y(t) = C\left(1 - \frac{2y(t)}{B}\right)$$

che ci dice:

$$0 \leq |f_y(t)| \leq C$$



Nota: Si potrebbe anche usare il Teorema di Weierstrass: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato assume un valore minimo e un valore massimo nell'intervallo.

Quindi, $f(t, y)$ é lipschitziana in S e il **metodo di Eulero é convergente** in esso.

Scegliendo il passo $h = 12$ (andamento su base annuale), definiamo i punti equidistanti

$$t_i = t_0 + ih$$

in cui si approssimeranno i valori della soluzione del Problema di Cauchy, cioè

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1}).$$

Poichè si chiede la soluzione nell'intervallo $[0, 120]$, sarà necessario eseguire

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{120-0}{12} = 10$$

passi del procedimento suddetto.

Dato che: $f(y) = Cy\left(1 - \frac{y}{B}\right), \quad h = 12,\ y_0 = 2,\ C = .1,\ B = 10000$

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 2 + 12\ 0.1\ 2(1 - 2/10^4) = .0044 * 10^3$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 12 = 12$

$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = (.0044 * 10^3) + 1.2(.0044 * 10^3)(1 - (.0044 * 10^3)/10^4)$

$= 0.0097 * 10^3$

$t_2 = t_0 + 2h = 24$

$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = (.0097 * 10^3) + 1.2(.0097 * 10^3)(1 - (.0097 * 10^3)/10^4)$

$= 0.0213 * 10^3$

$t_3 = t_0 + 3h = 36$

$y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = (.0213 * 10^3) + 1.2(.0213 * 10^3)(1 - (.0213 * 10^3)/10^4)$

$= 0.0468 * 10^3$

$t_4 = t_0 + 4h = 48$

$\vdots$

$y_{10} = y_9 + hf(t_9, y_9) = (2.1670 * 10^3) + 1.2(2.1670 * 10^3)(1 - (2.1670 * 10^3)/10000)$

$= 4.2039 * 10^3$

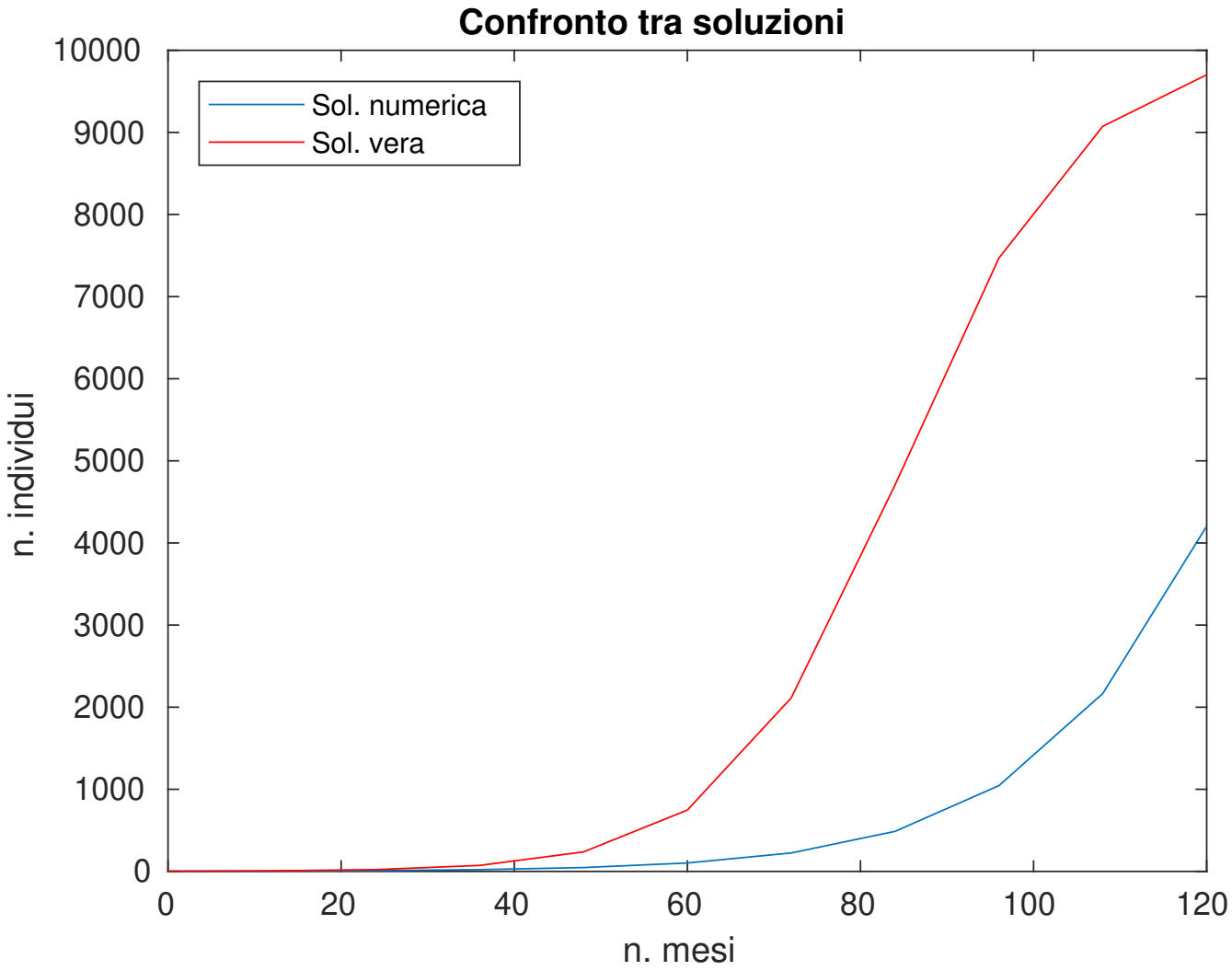
$t_{10} = t_0 + 10h = 120$

Per valutare **l'accuratezza** della approssimazione prodotta, confrontiamo i valori ottenuti con la soluzione esatta:

$y^*(t) = \frac{Be^{Ct+k^*}}{1+e^{Ct+k^*}}$, con $k^* = \log\left(\frac{2}{B-2}\right)$, valutando l'errore globale

$$e_i = |y_i - y_i^*|$$

t_i	y_i	y_i^*	e_i
0	0.0020×10^3	0.0020×10^3	0.0000×10^3
12	0.0044×10^3	0.0066×10^3	0.0022×10^3
24	0.0097×10^3	0.0220×10^3	0.0123×10^3
36	0.0213×10^3	0.0727×10^3	0.0514×10^3
48	0.0468×10^3	0.2373×10^3	0.1905×10^3
60	0.1026×10^3	0.7468×10^3	0.6442×10^3
72	0.2245×10^3	2.1132×10^3	1.8887×10^3
84	0.4878×10^3	4.7079×10^3	4.2201×10^3
96	1.0445×10^3	7.4706×10^3	6.4261×10^3
108	2.1670×10^3	9.0746×10^3	6.9076×10^3
120	4.2039×10^3	9.7020×10^3	5.4980×10^3

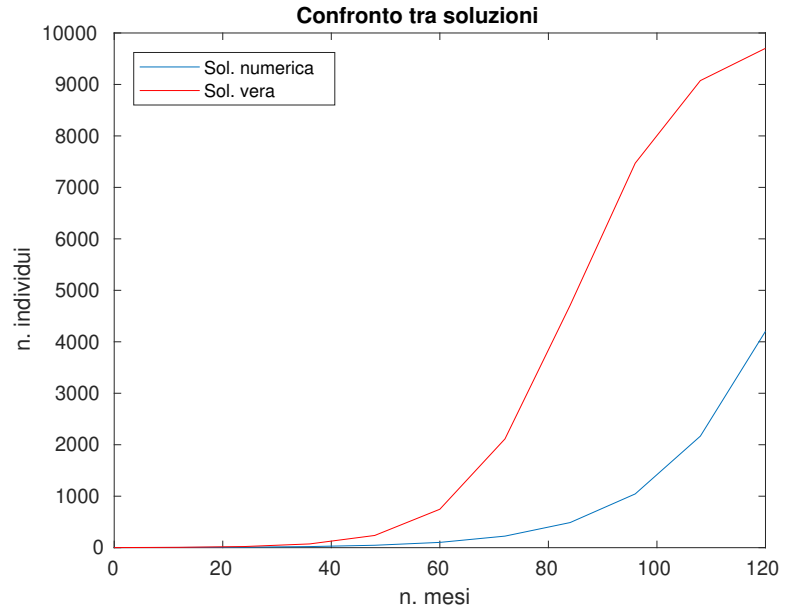


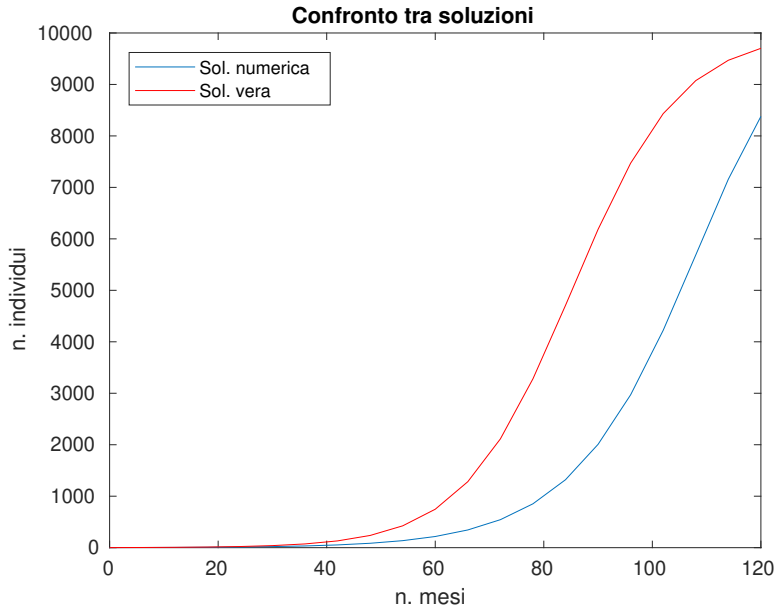
Nota: L'errore di stima cresce per $t_i \to 120$.

Consideriamo ora $h = 6$ (semestrale: 20 passi del metodo di Eulero):

t_i	y_i	y_i^*	e_i
0	$0.0020\ 10^3$	$0.0020\ 10^3$	$0.0000\ 10^3$
6	$0.0032\ 10^3$	$0.0036\ 10^3$	$0.0004\ 10^3$
12	$0.0051\ 10^3$	$0.0066\ 10^3$	$0.0015\ 10^3$
18	$0.0082\ 10^3$	$0.0121\ 10^3$	$0.0039\ 10^3$
24	$0.0131\ 10^3$	$0.0220\ 10^3$	$0.0089\ 10^3$
30	$0.0209\ 10^3$	$0.0400\ 10^3$	$0.0191\ 10^3$
36	$0.0334\ 10^3$	$0.0727\ 10^3$	$0.0392\ 10^3$
42	$0.0535\ 10^3$	$0.1316\ 10^3$	$0.0781\ 10^3$
48	$0.0854\ 10^3$	$0.2373\ 10^3$	$0.1518\ 10^3$
54	$0.1362\ 10^3$	$0.4241\ 10^3$	$0.2878\ 10^3$
60	$0.2169\ 10^3$	$0.7468\ 10^3$	$0.5298\ 10^3$
66	$0.3443\ 10^3$	$1.2820\ 10^3$	$0.9377\ 10^3$
72	$0.5437\ 10^3$	$2.1132\ 10^3$	$1.5695\ 10^3$
78	$0.8522\ 10^3$	$3.2806\ 10^3$	$2.4283\ 10^3$
84	$1.3200\ 10^3$	$4.7078\ 10^3$	$3.3878\ 10^3$
90	$2.0074\ 10^3$	$6.1846\ 10^3$	$4.1771\ 10^3$
96	$2.9701\ 10^3$	$7.4706\ 10^3$	$4.5005\ 10^3$
102	$4.2229\ 10^3$	$8.4330\ 10^3$	$4.2101\ 10^3$
108	$5.6867\ 10^3$	$9.0746\ 10^3$	$3.3879\ 10^3$
114	$7.1583\ 10^3$	$9.4700\ 10^3$	$2.3116\ 10^3$
120	$8.3789\ 10^3$	$9.7020\ 10^3$	$1.3231\ 10^3$

Nota: Riducendo il passo h, l'errore si è ridotto di circa un quinto (da 5.4980×10^3 a 1.3231×10^3)





Infatti, **l'errore locale di troncamento** è

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2} h^2 y''(\eta_i) \qquad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

cioè

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2} h^2 C y \left(1 - \frac{y(\eta_i)}{B}\right)\left(1 - \frac{2y(\eta_i)}{B}\right)$$

Esercizio

Scrivere la funzione matlab **eulero.m** che implementa il metodo di Eulero esplicito. La funzione ha come parametri di input il punto iniziale (x_0, y_0) la funzione $f(x, y(x))$, il passo di discretizzazione h e il numero di iterazioni da eseguire n_step. L'output è una matrice T le cui righe contengono rispettivamente i nodi e l'approssimazione prodotta dal metodo nei nodi.

Usare la funzione per risolvere l'esercizio precedente usando i passi $h = 12,\ 6,\ 3,\ 1$. Si calcolino gli errori commessi confrontando l'approssimazione prodotta con la soluzione esatta e verificare che l'errore massimo nell'intervallo di stima è una funzione lineare rispetto ad h.

```
function [T]=eulero(x0,y0,fun,h,n_step)
%
% [T]= eulero(x0,y0,fun,h,n_step)
% Soluzione di un' equazione differenziale
% del primo ordine con il metodo di Eulero
%
% Dati di input:
% x0, y0: condizione iniziale
% fun: espressione di f(x,y)
% h: passo di discretizzazione
% n_step: numero dei passi da eseguire
%
% OUTPUT
% T = matrice di dimensione 2 x n_step
%     la prima riga contiene il vettore dei nodi,
%     la seconda riga contiene il vettore delle approssimazioni
%     della soluzione nei nodi
%
```

MATLAB

```
xi(1) = x0;
yi(1) = y0;

for i = 2:n_step+1
    %yi(i) = yi(i-1) + h*fun(xi(i-1),yi(i-1));
    yi(i) = yi(i-1) + h * fun(yi(i-1)); %caso eq. diff. autonoma
    xi(i) = x0 + (i-1) * h;
end
T = [xi;yi];
```

MATLAB

```
close all
clear

C = .1; %crescita
B = 10000;  %max n. di individui ammesso
Nu = 2;  %n. di individui al tempo 0

kstar = log(Nu/(B-Nu));

y_true = @(t)[B*exp(C*t+kstar)./(1+exp(C*t+kstar))]; %soluzione vera


t0 = 0;   %tempo zero
y0 = Nu;  %n. individui al tempo 0 (Cond. Cauchy)

fun = @(y)[C*y*(1-(y/B))];   %soluzione numerica

intervallo = 120; %n. di mesi

h = [12 6 3 1];  %passo
color = ['b','r','g','k'];
```

```
%%
%%%% DISEGNA LE SOLUZIONI
%%

figure,
for i = 1:length(h)
    n_step = intervallo / h(i); %numero di passi in Eulero
    [T] = eulero(t0,y0,fun,h(i),n_step); %Metodo di Eulero
    hold on,
    plot(T(1,:),T(2,:),color(i))
    xlabel('t_i')
    ylabel('n. individui')
end
plot(T(1,:),y_true(T(1,:)),'c')
title('Soluzioni')
legend('12','6','3','1','vera','Location','Northwest')
```

MATLAB

```
%%
%%%% DISEGNA L'ERRORE
%%

EH = [];
figure,
for i = 1:length(h)
    n_step = intervallo / h(i);
    [T] = eulero(t0,y0,fun,h(i),n_step);
    err = abs(T(2,:)-y_true(T(1,:)));
    EH = [EH max(err)];
    hold on,
    plot(T(1,:),err,color(i))
    xlabel('t_i')
    ylabel('ERRORE')
end
legend('12','6','3','1','Location','Northwest')
figure, loglog(h,EH,'*')
xlabel('h')
title('grafico di e_h')
```

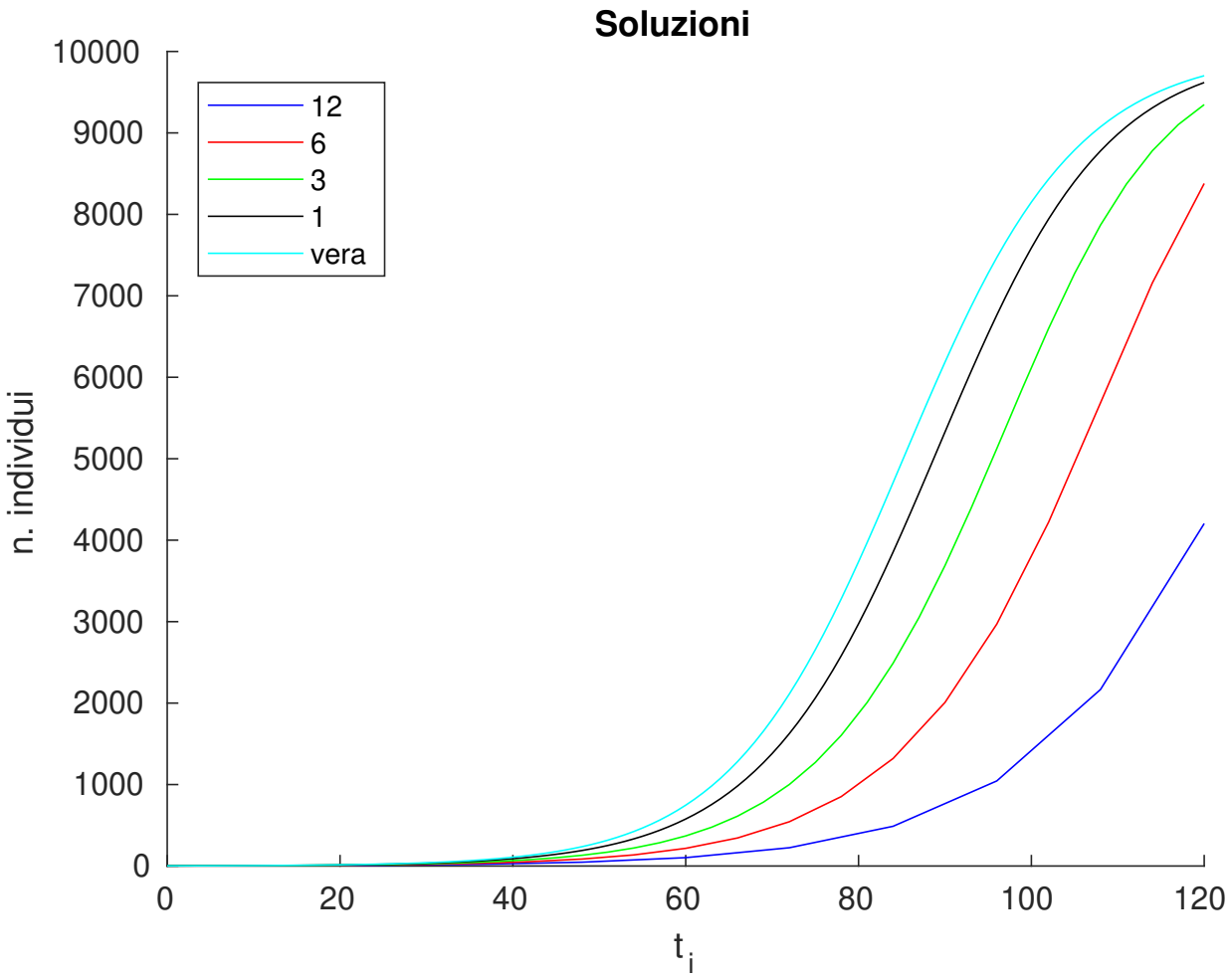
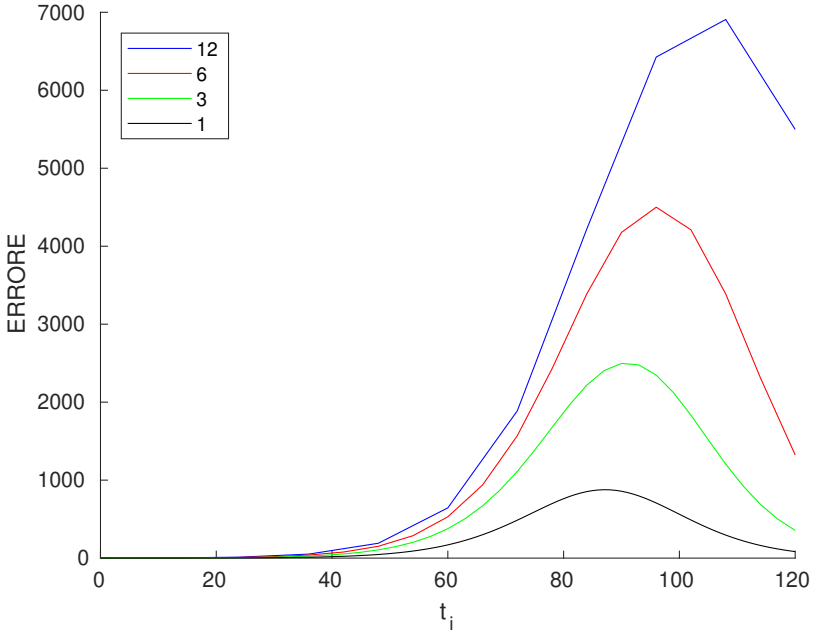


Grafico delle **soluzioni** del metodo di Eulero al variare del passo di discretizzazione h.



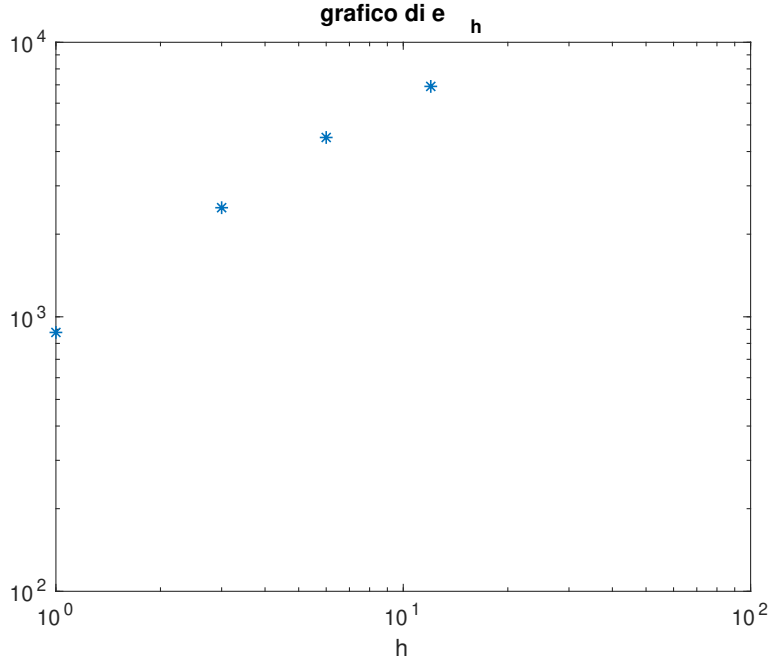


Grafico degli **errori** e del **massimo degli errori** delle **soluzioni** del metodo di Eulero al variare del passo di discretizzazione h.

Esercizio 2

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= |y - x|, \qquad x \in [0, 2] \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

verificare l' esistenza e unicità della soluzione in $S = [0, 2] \times \mathbf{R}$ e approssimarla con il metodo di Eulero con passi $h_1 = 0.1$ e $h_2 = 0.05$ per $x \in [0, 1]$

Soluzione

Per verificare se vale il teorema di esistenza e unicità della soluzione bisogna verificare se

$$f(x, y) = |y - x|$$

è lipschitziana in $S = [0, 2] \times \mathbf{R}$, cioè se esiste una costante $L > 0$ (costante di Lipschitz) tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \qquad \forall\, (x, y_1),\ (x, y_2) \in S.$$

Per $f(x,y) = |y - x|$ si ha

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x, & x < y \\ x - y, & x \geq y \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y \\ -1, & x > y \end{cases} \qquad \forall\, (x,y) \in S = [0,2] \times \mathbf{R}.$$

Quindi:

$|f_y| = 1 \quad x \neq y$ mentre

la derivata di f non è definita in $y = x$ (cioé per $|x - y| = 0$).

Tuttavia f_y risulta limitata in $x \neq y$ e $f(x,y)$ è lipschitziana in S con costante di Lipschitz pari a 1.

Dalla lipschitzianità di f segue anche che il metodo di Eulero è convergente per $x \in [0,2]$.

Scegliendo il passo $h = 0.1$, definiamo i punti equidistanti

$$x_i = x_0 + ih$$

in cui si approssimeranno i valori della soluzione del Problema di Cauchy, cioè :

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Poichè si chiede la soluzione nell'intervallo $[0, 1]$, sarà necessario eseguire

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.1} = 10$$

passi del procedimento suddetto.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0.1|2 - 0| = 2.2, \qquad x_1 = x_0 + h = 0.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2.2 + 0.1|2.2 - 0.1| = 2.41, \qquad x_2 = x_0 + 2h = 0.2$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 2.41 + 0.1|2.41 - 0.2| = 2.631, \qquad x_3 = x_0 + 3h = 0.3$$

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 2.631 + 0.1|2.631 - 0.3| = 2.8641, \qquad x_4 = x_0 + 4h = 0.4$$

$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 2.8641 + 0.1|2.8641 - 0.4| = 3.11051, \quad x_5 = x_0 + 5h = 0.5$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = 4.257947691 + 0.1|4.257947691 - 0.9| = 4.5937424601,$$

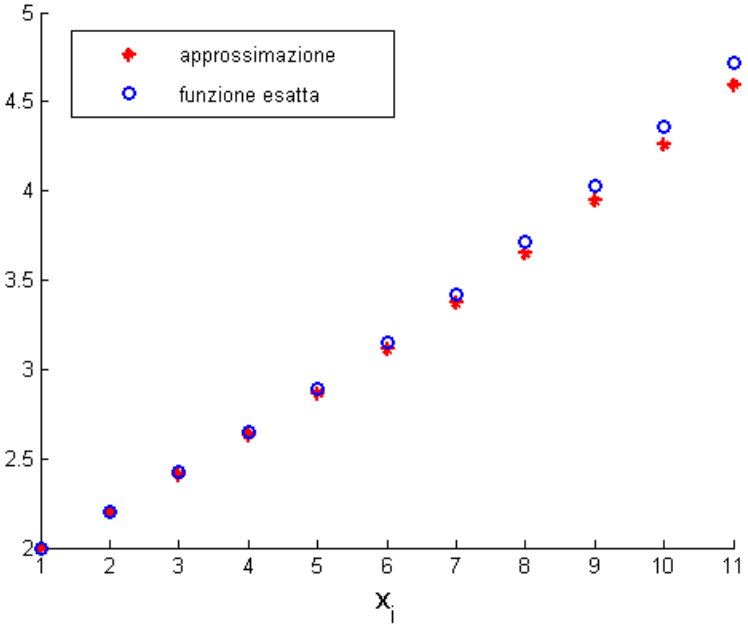
$$x_{10} = x_0 + 10h = 1$$

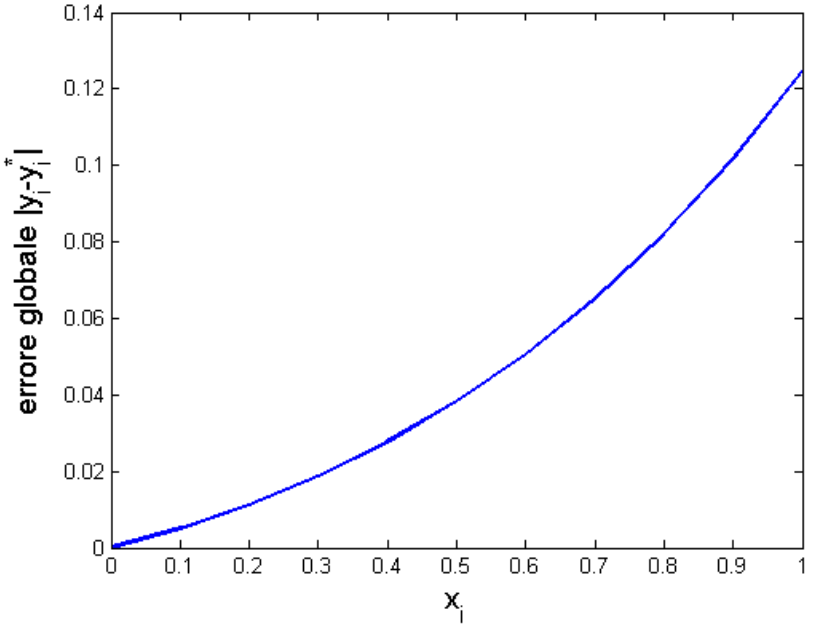
Confrontiamo i valori ottenuti con la **soluzione esatta**

$$y^*(x) = e^x + x + 1$$

valutando l'errore globale $e_i = |y_i - y_i^*|$, cioè

x_i	y_i	y_i^*	e_i
0.0	2.0000000000	2.00000000000000	0.00000000000000
0.1	2.2000000000	2.20517091807565	0.00517091807565
0.2	2.4100000000	2.42140275816017	0.01140275816017
0.3	2.6310000000	2.64985880757600	0.01885880757600
0.4	2.8641000000	2.89182469764127	0.02772469764127
0.5	3.1105100000	3.14872127070013	0.03821127070013
0.6	3.3715610000	3.42211880039051	0.05055780039051
0.7	3.6487171000	3.71375270747048	0.06503560747048
0.8	3.9435888100	4.02554092849247	0.08195211849247
0.9	4.2579476910	4.35960311115695	0.10165542015695
1.0	4.5937424601	4.71828182845905	0.12453936835904



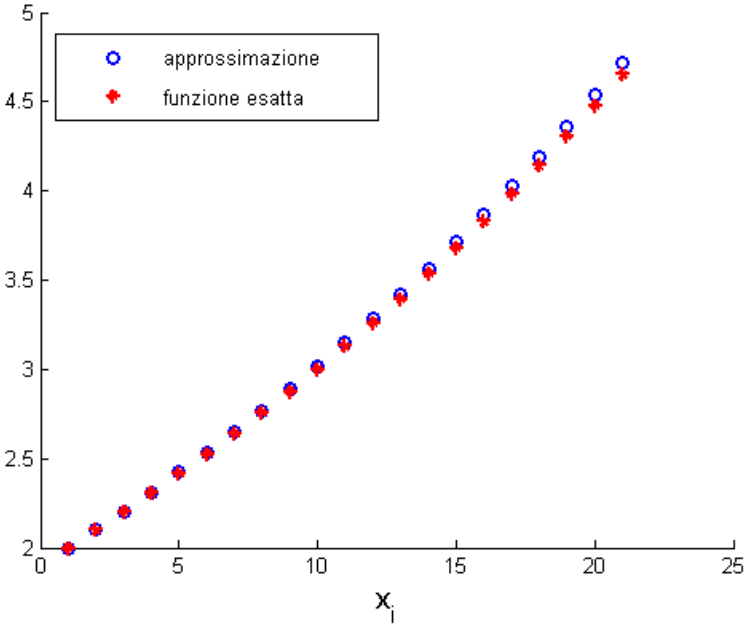


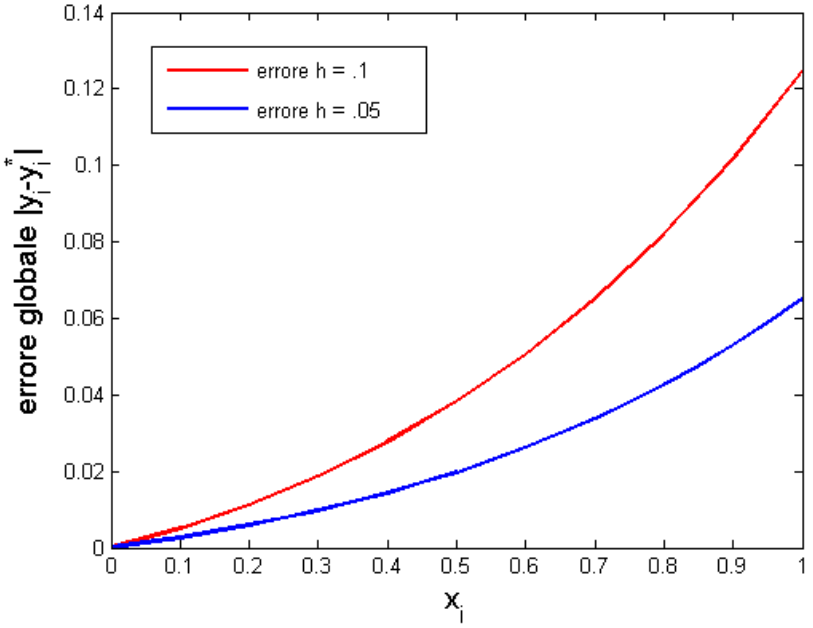
L'errore di stima cresce man mano che x_i si avvicina a 1.

Consideriamo ora il passo di discretizzazione $h = 0.05$. In questo caso eseguiamo 20 passi del metodo di Eulero:

x_i	y_i	y_i^*	e_i
0.00	2.00000000000000	2.00000000000000	0
0.05	2.10000000000000	2.10127109637602	0.00127109637602
0.10	2.20250000000000	2.20517091807565	0.00267091807565
0.15	2.30762500000000	2.31183424272828	0.00420924272828
0.20	2.41550625000000	2.42140275816017	0.00589650816017
0.25	2.52628156250000	2.53402541668774	0.00774385418774
0.30	2.64009564062500	2.64985880757600	0.00976316695100
0.35	2.75710042265625	2.76906754859326	0.01196712593701
0.40	2.87745544378906	2.89182469764127	0.01436925385221
0.45	3.00132821597852	3.01831218549017	0.01698396951165
0.50	3.12889462677744	3.14872127070013	0.01982664392269
0.55	3.26033935811631	3.28325301786740	0.02291365975108
0.60	3.39585632602213	3.42211880039051	0.02626247436838
0.65	3.53564914232324	3.56554082901390	0.02989168669066
0.70	3.67993159943940	3.71375270747048	0.03382110803108
0.75	3.82892817941137	3.86700001661267	0.03807183720131
0.80	3.98287458838194	4.02554092849247	0.04266634011053
0.85	4.14201831780103	4.18964685192599	0.04762853412496
0.90	4.30661923369108	4.35960311115695	0.05298387746587
0.95	4.47695019537564	4.53570965931585	0.05875946394021
1.00	4.65329770514442	4.71828182845905	0.06498412331463

Riducendo il passo di discretizzazione, l'errore si è ridotto di circa la metà





Infatti, **l'errore locale di troncamento** è

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2}h^2 y''(\eta_i) \qquad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

cioè

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2}h^2 e^{\eta_i}$$

Metodi di ordine superiore al primo

Sono basati sull'uso dello sviluppo in serie di Taylor di $y(x)$ arrestato ad un certo ordine

Sviluppo in serie di Taylor di **ordine** m $\qquad (y \in C^{m+1}[x_0, x_n])$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\sum_{k=1}^{m} \frac{y^{(k)}(x_i)}{k!}\, h^{k-1} + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\tau_i) \qquad \tau_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Schema di Taylor di ordine m

Trascurando l'errore e sostituendo i valori approssimati si ottiene l'algoritmo

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k-1)}(x_i, y_i)}{k!}\, h^{k-1}$$

Errore locale di troncamento:

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\tau_i)$$

Problema: Le derivate della f possono essere calcolate ricorsivamente da:

$$\begin{cases} f^{(k)}(x, y(x)) = f_x^{(k-1)}(x, y(x)) + f_y^{(k-1)}(x, y(x))\, f(x, y(x)) & k \geq 1 \\ f^{(0)}(x, y(x)) := f(x, y(x)) \end{cases}$$

Metodi di ordine superiore al primo: Runge-Kutta

Si ottengono muovendosi lungo una **retta** che ha come coefficiente angolare una **combinazione lineare** di valori assunti da $f(x, y)$ in punti opportuni dell'intervallo $[x_i, x_i + h]$.

Metodi di Runge-Kutta del secondo ordine

Relazione esatta

$$y(x + h) = y(x) + h\,\Phi(x, y; h; f) + R(x, y; h; f) \quad (*)$$

$$\rightarrow R(x, y; h; f) = O(h^{2+1})$$

con
$$\begin{cases} \Phi(x, y; h; f) = a_1\,k_1(x, y) + a_2\,k_2(x, y) \quad (**) \\ \\ k_1(x, y) = f(x, y) \\ k_2(x, y) = f\left(x + \lambda\,h, y + \lambda\,h\,k_1(x, y)\right) \end{cases}$$

Esempio: metodo di Heun

Esistono diverse scelte per i parametri a_1, a_2, λ

Il **metodo di Heun** si ottiene per una particolare scelta dei tre parametri a_1, a_2, λ

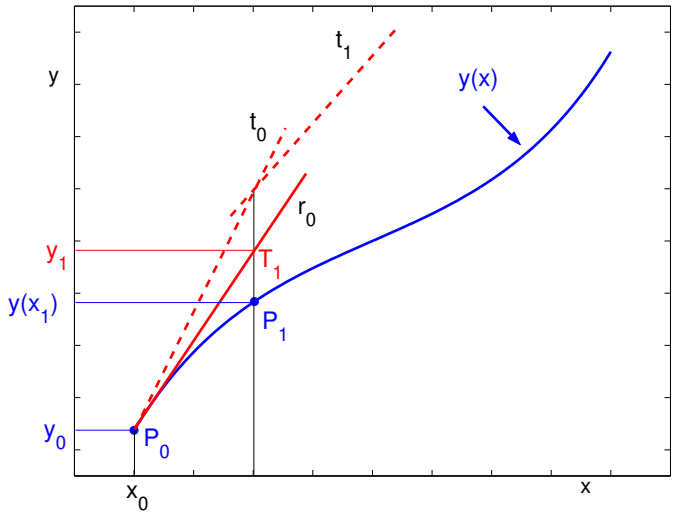
$$\boxed{a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 1}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\Big) & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Errore locale di troncamento:

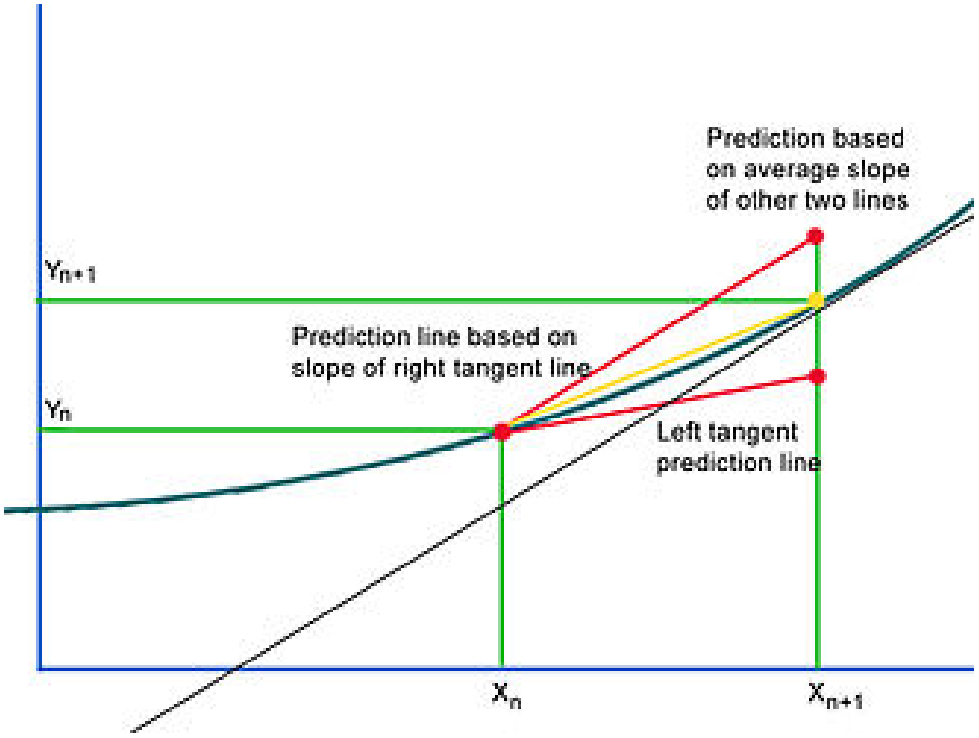
$$R(x, y; h; f) = O(h^3)$$

$$\Rightarrow \textbf{ Secondo ordine}$$



Metodo di Heun: Idea

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\Big) & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$



Esempio: metodo di Eulero modificato

Il **metodo di Eulero modificato** si ottiene per un'altra particolare scelta dei tre parametri a_1, a_2, λ

$$\boxed{a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad \lambda = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\left(f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))\right) & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Esercizio

Partendo da una condizione iniziale di due individui adulti (maschio e femmina), si studi l'andamento della popolazione (con una crescita del 10% e in un arco temporale di 10 anni) su un'isola che, in termini di spazio e risorse alimentari, non puó contenere piú di 10000 individui usando il metodo di Heun e confrontare con la soluzione ottenuta con il metodo di Eulero.

Produrre il codice in MATLAB

MATLAB

```
function [T]=heun(x0,y0,fun,h,n_step)
%
% [T]= heun(x0,y0,fun,h,n_step)
% Soluzione di un'equazione differenziale
% del primo ordine con il metodo di Heun
%
% Dati di input:
% x0, y0: condizione iniziale
% h: passo di discretizzazione
% fun: espressione di f(x,y)
% n_step: numero dei passi da eseguire
%
% OUTPUT
% T = matrice di dimensione 2xn_step
%     la prima riga contiene il vettore dei nodi,
%     la seconda riga contiene il vettore delle approssimazioni
%     della soluzione nei nodi
%
```

MATLAB

```
xi(1) = x0;
yi(1) = y0;

for i = 2:n_step+1
    fi = fun(yi(i-1));
    % fi = fun(xi(i-1),yi(i-1)); %caso eq. non autonoma
    yi(i) = yi(i-1) + h/2 * ( fi + fun(yi(i-1)+h*fi) );
    % yi(i) = yi(i-1) + h/2*(fi+ fun(xi(i-1)+h,yi(i-1)+h*fi)); %caso
                                                    %eq. non autonoma
    xi(i) = x0 + (i - 1) * h;
end
T = [xi;yi];
```

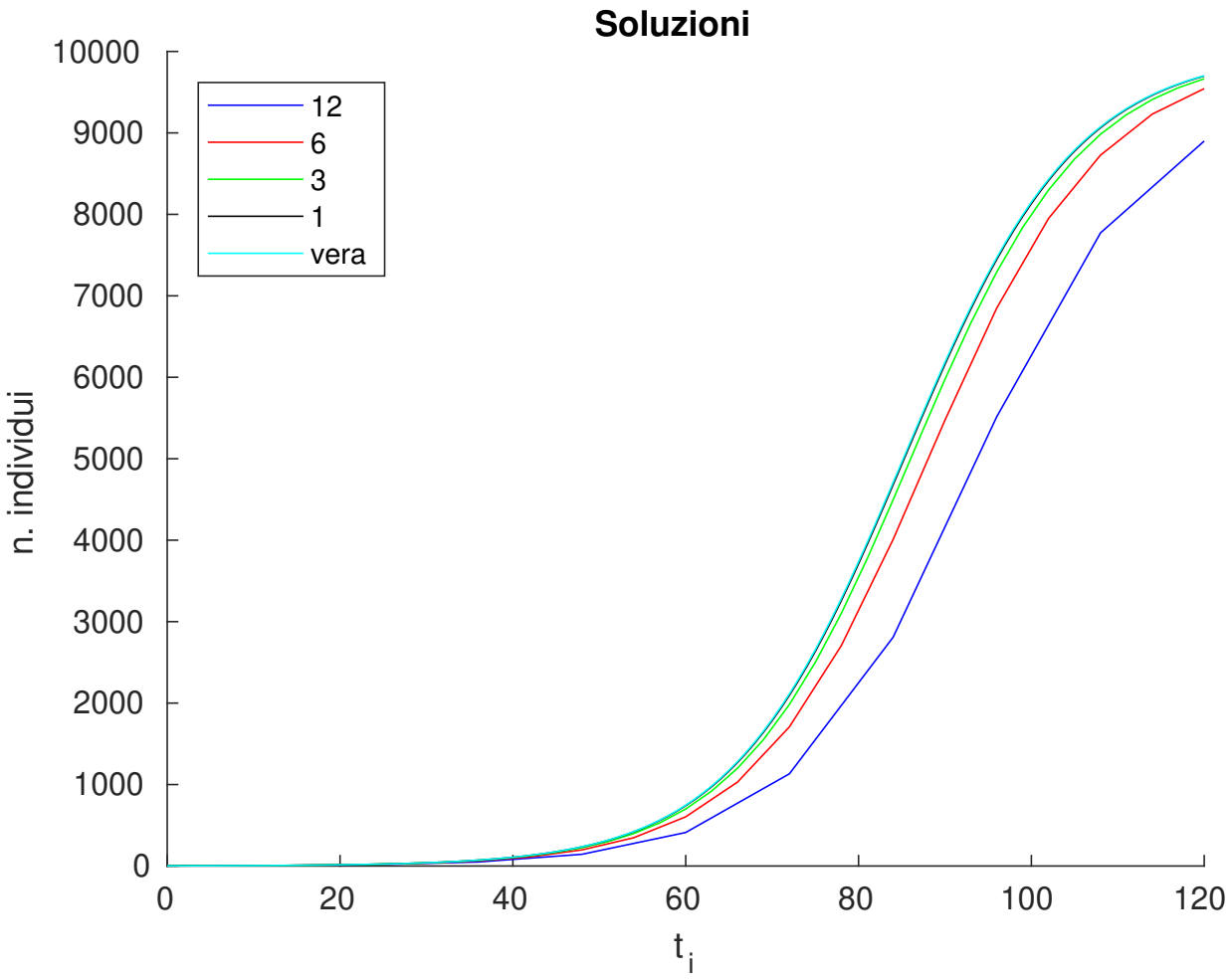
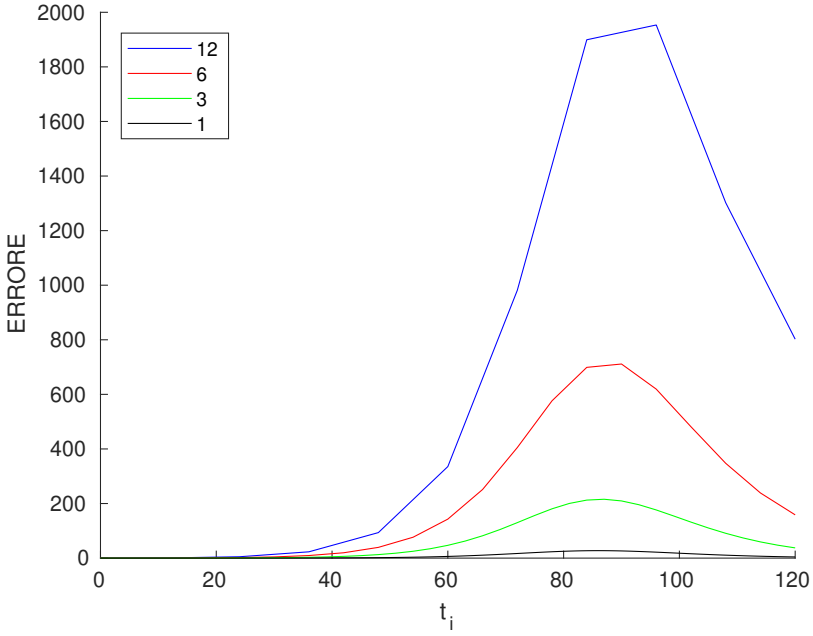


Grafico delle **soluzioni** del metodo di Heun al variare del passo di discretizzazione h.



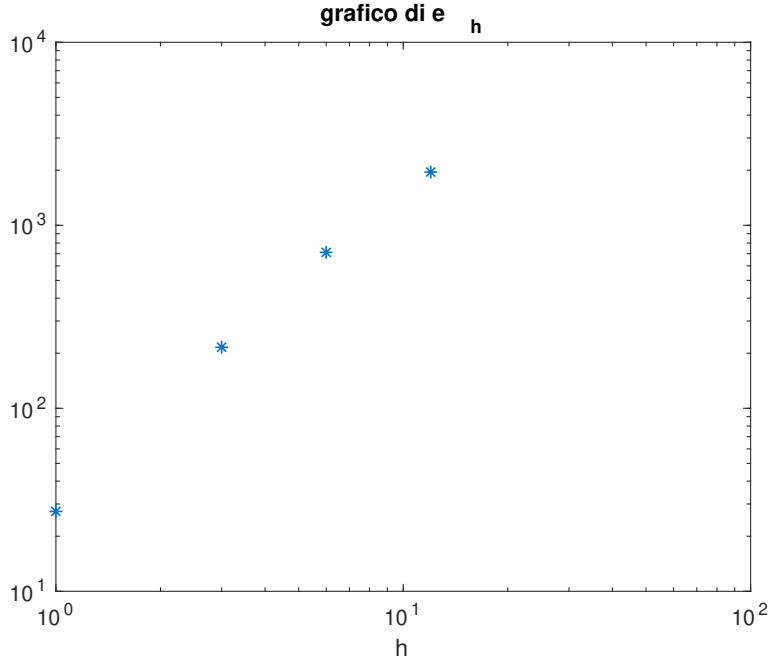
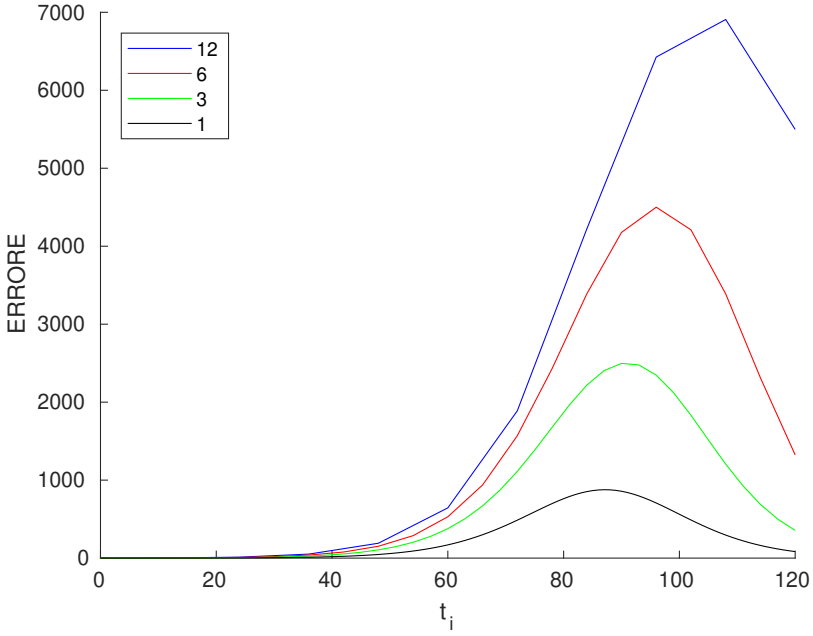
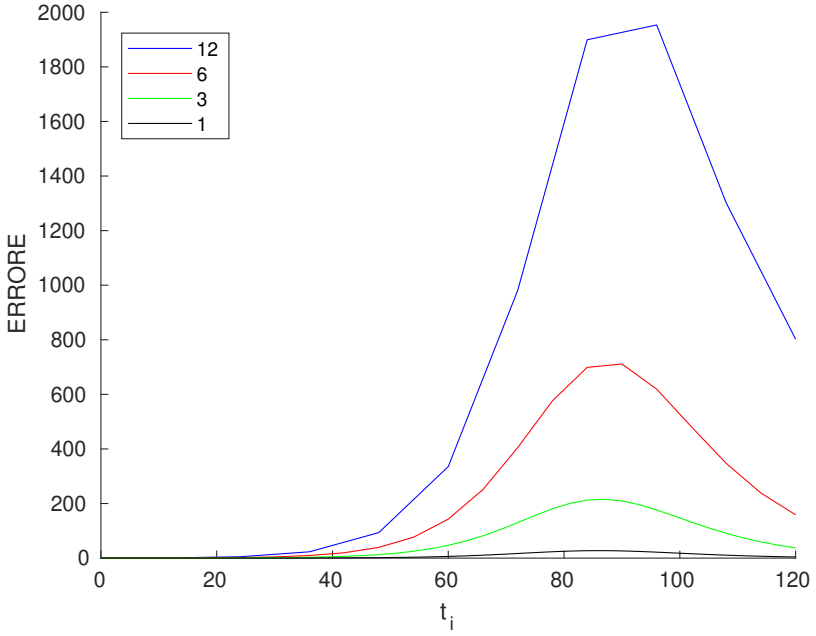


Grafico degli **errori** e del **massimo degli errori** delle **soluzioni** del metodo di Heun al variare del passo di discretizzazione h.



Metodo di Eulero



Metodo di Heun

Confronto tra gli **errori** al variare del passo di discretizzazione h.

Metodo di Runge-Kutta del 4^o ordine

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

Errore locale di troncamento:

$$R(x, y; h; f) = O(h^5) \Rightarrow \textbf{ Quarto ordine}$$

Metodo di Runge-Kutta a r stadi

Più in generale è possibile costruire metodi di **Runge Kutta a r stadi**

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\sum_{l=1}^{r} a_l k_l & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_l = f\left(x_i + \lambda_l h, y_i + h\sum_{j=0}^{l-1} b_{lj} k_j\right) \end{cases}$$

che risultano consistenti se $\sum_{l=1}^{r} a_l = 1.$

Inoltre, l'ordine del metodo è

$$\begin{array}{ll} p = r, & r = 1, \ldots, 4 \\ p = r - 1, & r = 5, \ldots, 7 \\ p = r - 2, & r \geq 8 \end{array}$$

Runge-Kutta del 4^o ordine

```
function [T]=RK4(x0,y0,fun,h,n_step)
%
% [T]= RK4(x0,y0,fun,h,n_step)
% Soluzione di unequazione differenziale
% del primo ordine con il metodo di Runge-Kutta di  ordine 4
%
% INPUT:
% x0, y0: condizione iniziale
% n: numero dei passi da eseguire
% h: passo di discretizzazione
% fun: espressione di f(x,y)
% OUTPUT
% T = matrice di dimensione 2xn_step
%     la prima riga contiene il vettore dei nodi,
%     la seconda riga contiene il vettore delle approssimazioni
%     della soluzione nei nodi
```

```
xi(1) = x0;
yi(1) = y0;
for i = 2:n_step+1
    k1 = fun(xi(i-1),yi(i-1));
    k2 = fun(xi(i-1)+h/2,yi(i-1)+h/2*k1);
    k3 = fun(xi(i-1)+h/2,yi(i-1)+h/2*k2);
    k4 = fun(xi(i-1)+h,yi(i-1)+h*k3);
    yi(i) = yi(i-1) + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    xi(i) = x0 + (i-1)*h;
end
T = [xi;yi];
```

Esempio

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = |y - x| & x \in [0, 2] \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Soluzione esatta: } y(x) = e^x + x + 1$$

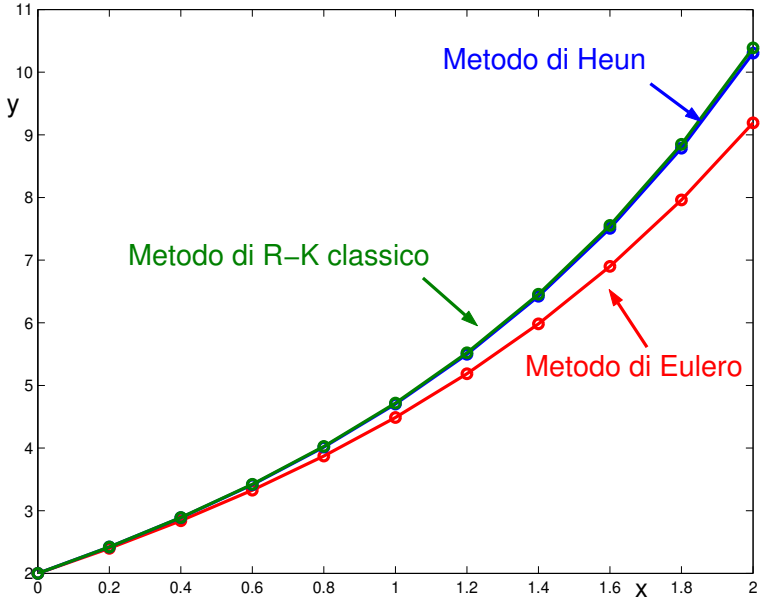


Grafico della soluzione

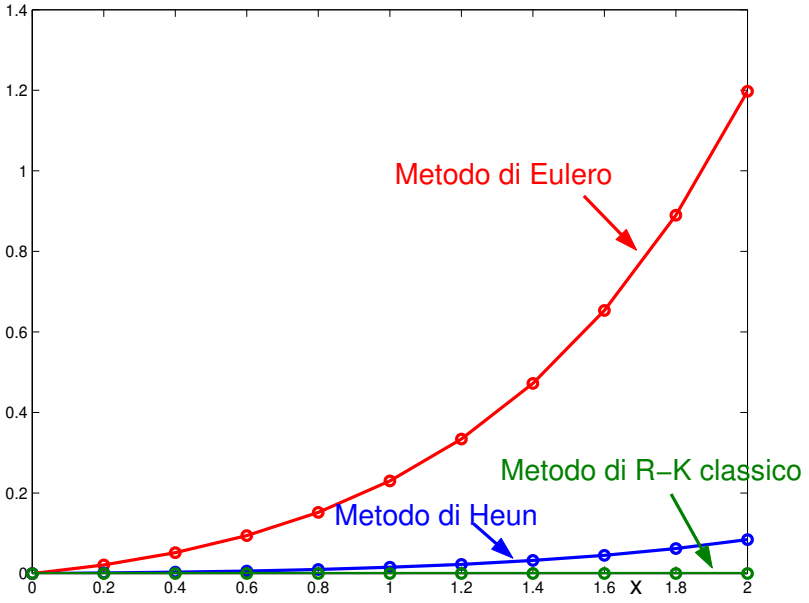


Grafico dell'errore

Metodi one-step espliciti

I metodi di **Eulero**, **Heun** e **Runge-Kutta classico** sono tutti **metodi one-step espliciti**, cioè metodi in cui per il calcolo di y_{i+1} si utilizza **solo** il valore approssimato y_i:

Metodi one-step espliciti:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\underbrace{\Phi(x_i, y_i; h; f)}_{\text{Funzione incremento}} & i = 0, 1, \ldots, n \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Metodo di Eulero: $\Phi(x, y; h; f) = f(x, y(x))$

Metodo di Heun: $\Phi(x, y; h; f) = \frac{1}{2}\left[f(x, y(x)) + f(x + h, y(x) + hf(x, y(x))\right]$

Metodo di Runge-Kutta classico: $\Phi(x, y; h; f) = \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$

Digressione: Teorema

Sia f una **funzione definita** in un **intorno** del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

con a, b reali positivi, e si ponga che f sia almeno di classe C^0 in tale intorno.

Sia inoltre f **lipschitziana** rispetto alla variabile y e **uniformemente continua** rispetto alla variabile x:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\| \quad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2 \in J$$

con $L > 0$ **costante di Lipschitz**. Allora il problema di Cauchy:

$$\Theta = \begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

possiede una soluzione unica.

Sotto l'ipotesi di **continuitá** di f, si puó dimostrare l'equivalenza tra il problema di Cauchy e la seguente equazione integrale (**equazione di Volterra**):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in I_\delta$$

dove $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ é un intorno di x_0, con δ valore opportuno.

L'esistenza di una funzione $y = y(x)$ che soddisfa il sistema Θ si verifica se e solo se tale equazione ammette soluzione.

Digressione: Metodi impliciti

Un altro modo di derivare metodi numerici per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie è :

$$\underbrace{\int_{x_i}^{x_i+h} y'(x)dx}_{y(x_i+h)-y(x_i)} = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x, y(x))dx$$

e valutare l'integrale al secondo membro con una formula di quadratura usando un numero di nodi N con passo inferiore ad h,

$$\Rightarrow \quad y(x_i+h)-y(x_i) = \sum_{r=1}^{N} c_r f(x_i+h-l_r, y(x_i+h-l_r)) + R(x_i, y(x_i); h; f)$$

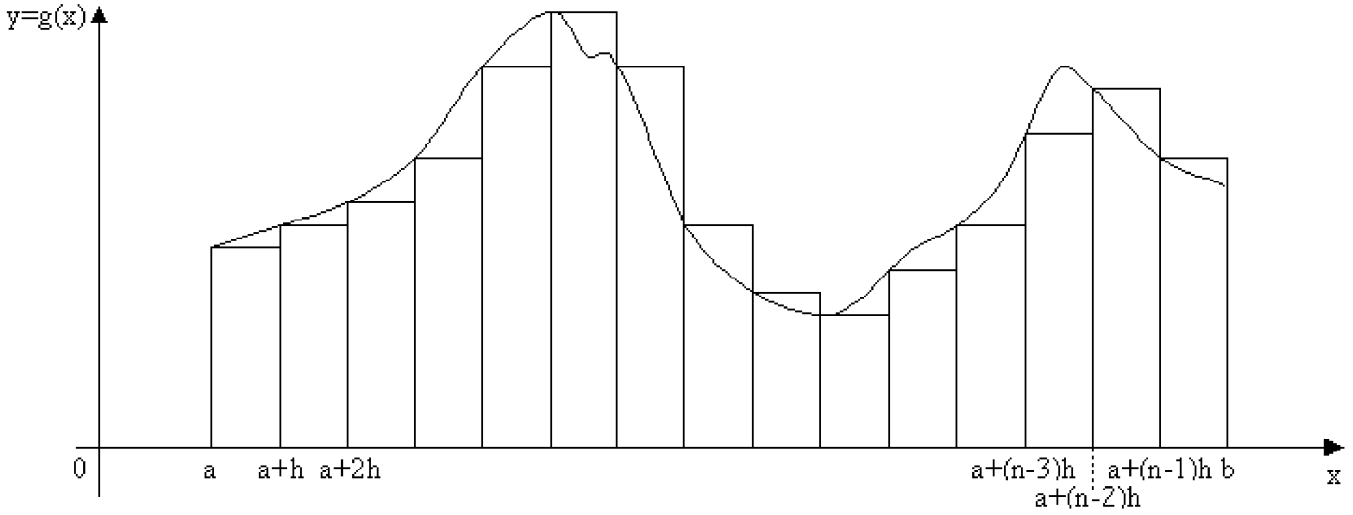
$\Rightarrow$ y_{i+h} è una combinazione lineare dei valori di f nei nodi e di y_i

Digressione:

Esempio: usando la formula del rettangolo

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$ Metodo di Eulero implicito

(**metodo implicito del primo ordine**)



Digressione:

Esempio: usando la formula del rettangolo

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$ Metodo di Eulero implicito

(**metodo implicito del primo ordine**)

Nota: **differenze finite all'indietro**

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

cioé

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Digressione **Esempio**: usando la formula del trapezio

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\Big)$$ Metodo di Crank-Nicolson

(**metodo implicito del secondo ordine**)

Infatti, se:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$ (Eulero esplicito)

$$+$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$ (Eulero implicito)

$$=$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\Big)$$

Nota. Piú in generale:

$$y_{i+1} = y_i + h\Big((1-\theta)f(x_i, y_i) + \theta f(x_{i+1}, y_{i+1})\Big) \quad \theta \in [0, 1]$$ Metodo θ

Digressione Metodi predictor-corrector

La soluzione viene approssimata con un metodo iterativo (**corrector**) in cui l' approssimazione iniziale è ottenuta con un metodo esplicito (**predictor**). Per esempio,

$$\begin{cases} Predictor: y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & i \geq 0 \\ Corrector: y_{i+1}^{(r)} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(r-1)}) + f(t_i, y_i)\right) & 1 \leq r \leq N \\ y_{i+1} = y_{i+1}^{(N)} \end{cases}$$

in cui è stato usato il *metodo di Eulero esplicito* come *predittore* e il *metodo di Crank-Nicolson* come *correttore*.

Oss:

1. La correzione si può iterare N volte, con N scelto a priori oppure determinato usando un opportuno criterio di arresto.

2. Il metodo converge se $h < \frac{2}{L}$, con L costante di Lipschitz di f.

3. Se L è grande (*problemi stiff*) la limitazione su h può essere troppo restrittiva

4. In generale, l'ordine p di un metodo *predictor-corrector* è $p = min\{p_P + 1, p_C\}$, con p_P e p_C gli ordini rispettivamente del predittore e del correttore.

Errore locale di troncamento

L'**errore locale di troncamento** è definito come la **differenza** tra la **soluzione esatta** $y(x+h)$ e l'**approssimazione** fornita dallo schema numerico quando questo utilizza i valori esatti $y(x)$:

$$R(x, y(x); h; f) = y(x+h) - \Big(y(x) + h\Phi(x, y(x); h; f)\Big)$$

Rappresenta l'**errore** dovuto al fatto di aver approssimato **localmente** la soluzione esatta con una retta.

Errore locale unitario di troncamento:

$$\tau(x, y(x); h; f) = \frac{R(x, y(x); h; f)}{h} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x); h; f)$$

Ordine del metodo: permette di valutare quanto è **accurata** l'approssimazione ottenuta. E' definito come il **massimo intero** p tale che

$$R(x, y(x); h; f) = O(h^{p+1}) \Leftrightarrow \tau(x, y(x); h; f) = O(h^p)$$

ovvero $\exists\, C_p$ costante : $|R(x, y(x); h; f)| \leq C_p h^{p+1}$

- Un metodo di ordine p è **esatto** per **tutti i polinomi** fino al grado p.

Consistenza dei metodi one-step espliciti

Consistenza: $\lim_{h\to 0} \tau(x, y(x); h; f) = \lim_{h\to 0} \dfrac{R(x, y; h; f)}{h} = 0$

I metodi one-step espliciti si ottengono **discretizzando** una relazione **esatta** del tipo:

$$y(x+h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h; f) + \underbrace{R(x, y(x); h; f)}$$

$\downarrow$

Errore locale di troncamento

$$\lim_{h\to 0} \tau(x, y; h; f) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x); h; f) \right]$$

$$= y'(x) - \lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x); h; f) = 0$$

$\Rightarrow$ Un metodo one-step esplicito è **consistente** se e solo se

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x); h; f) = y'(x) = f(x, y(x))}$$

In particolare,

- il metodo di **Eulero** è **consistente**. Infatti,

$$\lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x); h; f) = \lim_{h\to 0} f(x, y(x)) = f(x, y(x))$$

- il metodo di **Heun** è **consistente**.

  Infatti,

$$\lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x); h; f) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}(f(x, y(x)) + f(x+h, y(x)+hf(x, y(x)))) =$$

$$= f(x, y(x))$$

Nota: In modo analogo è possibile verificare la consistenza del metodo di Eulero modificato e, più in generale, dei metodi di Runge-Kutta a r stadi.

Stabilità dei metodi one-step espliciti

Errore globale di troncamento: $e_i = y(x_i) - y_i$

Convergenza: $\lim_{h \to 0} \max_{0 \le i \le n} |e_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i \to \infty} y_i = y(\bar{x}) \qquad \bar{x} = x_0 + ih$

$$
\begin{aligned}
e_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \\
&= (y(x_i) + h\Phi(x_i, y(x_i); h; f) + R(x_i, y(x_i); h; f)) - \\
&- (y_i + h\Phi(x_i, y_i; h; f))
\end{aligned}
$$

- Dalla definizione di **ordine** di un metodo si ha:

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = O(h^{p+1}) \Rightarrow |R(x_i, y(x_i); h; f)| \le C_p h^{p+1}$$

Esempio: per il **metodo di Eulero** $|R| = |\frac{1}{2}h^2 y''(x)| \le \frac{M}{2}h^2$, dove M è il **massimo** di $|y''(x)|$ nell'intervallo di integrazione $\Rightarrow C_1 = M/2$

- Poiché Φ è una combinazione lineare di valori di f, dalla **lipshitzianità** di f segue la lipshitzianità di Φ:

$$|\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Utilizzando le **maggiorazioni** trovate e **trascurando** gli errori di arrotondamento si ha:

$$e_{i+1} = \underbrace{(y(x_i) - y_i)}_{e_i} + h \underbrace{(\Phi(x_i, y(x_i); h; f) - \Phi(x_i, y_i; h; f)}_{\leq L|y(x_i)-y_i|} + O(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |e_{i+1}| \leq |e_i|(1 + hL) + C_p h^{p+1} & i = 0, 1, ... \\ e_0 = y(x_0) - y_0 = 0 \end{cases}$$

Si associa alla disuguaglianza ottenuta una **equazione alle differenze** del primo ordine:

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i(1 + hL) + C_p h^{p+1} & i = 0, 1, ... \\ t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow t_i = C_p h^p \frac{(1 + hL)^i - 1}{L}$$

Poiché $|e_i| \leq t_i$, $i = 0, 1, ...$, e $(1 + \alpha)^i < e^{i\alpha}$ per $\alpha > 0$, si deduce che l'**errore globale** di troncamento ha la **limitazione**

$$\mathbf{|e_i| \leq C_p \; h^p \; \frac{e^{L(x_i - x_0)} - 1}{L}}$$

L: costante di Lipschitz di $f(x, y)$ C_p: costante dipendente dal metodo one-step.

Convergenza dei metodi one-step espliciti

Un generico metodo per risolvere numericamente un'equazione differenziale è **convergente** se è **consistente** (l'errore locale unitario di troncamento tende a zero quando h tende a zero) e **stabile** (la propagazione degli errori durante lo sviluppo del metodo resta limitata).

Teorema. Sia $\Phi(x, y(x); h; f) \in C^0(D)$, $D = [x_0, x_0 + \beta] \times S$, $0 < h \leq \beta$, e **lipschitziana** in y. Allora un **metodo one-step esplicito** è **convergente** se e solo se è **consistente**. Inoltre, se il metodo è di **ordine** p, si ha

$$|e_i| = |y(x_i) - y_i| \leq k \cdot h^p$$

dove k è una costante indipendente da i e da h.

Sistemi di equazioni differenziali

Sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$ Condizioni iniziali

In forma **vettoriale**:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} Y(x) = [y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]^T \\ Y_0 = [y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)]^T \\ F(x, Y(x)) = [f_1(x, Y(x)), \ldots, f_n(x, Y(x))]^T \end{array}$$

Caso **particolare**: $n = 2$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$$ Condizioni iniziali

Nota. Per i **sistemi di equazioni differenziali** del primo ordine valgono teoremi di **esistenza** e **unicità** della soluzione analoghi a quelli validi nel caso di un'unica equazione differenziale.

Soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} Y(x) = [y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]^T \\ Y_0 = [y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)]^T \\ F(x, Y(x)) = [f_1(x, Y(x)), \ldots, f_n(x, Y(x))]^T \end{array}$$

Metodo di Eulero:

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + hF(x_i, Y_i) \\ \qquad\qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \\ Y_0 = Y(x_0) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} Y(x_0) = [y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)]^T \\ Y_i = [y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}]^T \\ F(x_i, Y_i) = [f_1(x_i, Y_i), \ldots, f_n(x_i, Y_i)]^T \end{array}$$

Caso **particolare**: $n = 2$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) \\ y_{10} = y_1(x_0) \\ y_{20} = y_2(x_0) \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Metodo di Heun:

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + \dfrac{h}{2}[F(x_i, Y_i) + F(x_i + h, Y_i + hF(x_i, Y_i))] & i = 0, 1, \ldots, n \\ Y_0 = Y(x_0) \end{cases}$$

dove
$$Y_0 = [y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)]^T$$
$$Y_i = [y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}]^T$$
$$F(x_i, Y_i) = [f_1(x_i, Y_i), \ldots, f_n(x_i, Y_i)]^T$$

Caso **particolare**: $n = 2$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + \dfrac{h}{2}[f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) + f_1(x_i + h, y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}))] \\ \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + \dfrac{h}{2}[f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) + f_2(x_i + h, y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}))] \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\ \\ y_{10} = y_1(x_0) \\ y_{10} = y_2(x_0) \end{cases}$$

Metodo di Runge-Kutta classico (IV ordine):

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + \dfrac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\ \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n \\ Y_0 = Y(x_0) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} K_1 = F\ (x_i, Y_i) \\ K_2 = F\left(x_i + \dfrac{h}{2}, Y_i + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = F\left(x_i + \dfrac{h}{2}, Y_i + \dfrac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = F\ (x_i + h, Y_i + hK_3) \end{cases}$$

Caso **particolare**: $n = 2$ $\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + \dfrac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] & y_{2,i+1} = y_{2,i} + \dfrac{h}{6}[t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4] \\ & \qquad\qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \\ y_{10} = y_1(x_0) & y_{20} = y_2(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = f_1\ (x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) & t_1 = f_2\ (x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) \\ k_2 = f_1\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_{1,i} + \dfrac{h}{2}k_1, y_{2,i} + \dfrac{h}{2}t_1\right) & t_2 = f_2\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_{1,i} + \dfrac{h}{2}k_1, y_{2,i} + \dfrac{h}{2}t_1\right) \\ k_3 = f_1\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_{1,i} + \dfrac{h}{2}k_2, y_{2,i} + \dfrac{h}{2}t_2\right) & t_3 = f_2\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_{1,i} + \dfrac{h}{2}k_2, y_{2,i} + \dfrac{h}{2}t_2\right) \\ k_4 = f_1\ (x_i + h, y_{1,i} + hk_3, y_{2,i} + ht_3) & t_4 = f_2\ (x_i + h, y_{1,i} + hk_3, y_{2,i} + ht_3) \end{cases}$$

Esercizio

Si consideri la seguente equazione differenziale in $z(t)$

$$z'' + 2(z')^2 + 4z = t$$

con condizioni iniziali

$$z(0) = 0, \qquad z'(0) = 1$$

e lo si risolva numericamente usando due passi del metodo di Eulero con passo di discretizzazione $h = 1/2$.

Definendo il vettore

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$$

l'equazione precedente si riduce ad un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t - 2y_2^2 - 4y_1 \end{cases}$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

e che in forma vettoriale si scrive

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} y_2 \\ t - 2y_2^2 - 4y_1 \end{pmatrix}.$$

Usando il metodo di Eulero calcoliamo

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + h\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$

cioè

$$t_0 = 0 \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = 0.5 \qquad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + h\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

```
function [T] = eulero_sistemi(x0,y0,z0,h,n_step,ffun,gfun)
% Soluzione di un sistema di due equazioni differenziali
% del primo ordine con il metodo di Eulero
%
% INPUT
% x0,y0,z0 = condizioni iniziali
% h = passo di discretizzazione
% n = numero passi
% ffun = input(funzione f(x,y,z): );
% gfun = input(funzione g(x,y,z): );
%
% OUTPUT
% T = matrice contenente [xi;yi;zi]
```

```
xi(1) = x0; yi(1) = y0; zi(1) = z0;
for i = 2:n_step+1
    x = xi(i-1);
    y = yi(i-1);
    z = zi(i-1);
    k1 = ffun(x,y,z);
    t1 = gfun(x,y,z);
    xi(i) = x + h;
    yi(i) = y + h*k1;
    zi(i) = z + h*t1;
end
figure(1)
plot(xi,yi,'r',xi,zi,'b')

T = [xi;yi;zi];
```

Dal Command window

```
>> ffun = @(t,y,z)[z];
>> gfun = @(t,y,z)[t-2*z^2-4*y];
>> [T] = eulero_sistemi(0,0,1,.5,2,ffun,gfun);
>> disp(['       ti   ','   y1(i)   ', '   y2(i)   '    ]), disp(T')
       ti      y1(i)      y2(i)
         0          0    1.0000
    0.5000    0.5000         0
    1.0000    0.5000   -0.7500
```

Usando il metodo di RK del quarto ordine con lo stesso passo di discretizzazione si ha

```
>> [T] = RK_sistemi(0,0,1,.5,2,ffun,gfun);
>> disp(['       ti   ','   y1(i)   ', '   y2(i)   '    ]), disp(T')
       ti      y1(i)      y2(i)
         0          0    1.0000
    0.5000    0.3148    0.3259
    1.0000    0.3761   -0.0401
```

Usando il metodo di Eulero con passo di discretizzazione $h = 0.05$:

```
>> [T] = eulero_sistemi(0,0,1,.05,20,ffun,gfun);
>> disp(['       ti   ','   y1(i)   ', '   y2(i)  '    ]), disp(T')
       ti      y1(i)      y2(i)
         0          0    1.0000
    0.0500     0.0500    0.9000
    0.1000     0.0950    0.8115
    0.1500     0.1356    0.7316
    0.2000     0.1722    0.6585
    0.2500     0.2051    0.5907
    0.3000     0.2346    0.5273
    0.3500     0.2610    0.4676
    0.4000     0.2844    0.4110
    0.4500     0.3049    0.3572
    0.5000     0.3228    0.3060
    0.5500     0.3381    0.2571
    0.6000     0.3509    0.2104
    0.6500     0.3614    0.1657
    0.7000     0.3697    0.1232
    0.7500     0.3759    0.0827
    0.8000     0.3800    0.0444
    0.8500     0.3823    0.0082
    0.9000     0.3827   -0.0258
    0.9500     0.3814   -0.0574
    1.0000     0.3785   -0.0865
```

Mentre il metodo di RK con passo $h = 0.05$ restituisce

```
>> [T] = RK_sistemi(0,0,1,.05,20,ffun,gfun);
>> disp(['       ti   ','   y1(i)   ', '   y2(i)  '    ]), disp(T')
       ti      y1(i)      y2(i)
         0          0    1.0000
    0.0500     0.0476    0.9057
    0.1000     0.0907    0.8211
    0.1500     0.1298    0.7440
    0.2000     0.1652    0.6730
    0.2500     0.1972    0.6070
    0.3000     0.2260    0.5452
    0.3500     0.2518    0.4870
    0.4000     0.2748    0.4319
    0.4500     0.2950    0.3797
    0.5000     0.3128    0.3300
    0.5500     0.3281    0.2827
    0.6000     0.3411    0.2378
    0.6500     0.3519    0.1950
    0.7000     0.3606    0.1544
    0.7500     0.3674    0.1160
    0.8000     0.3723    0.0798
    0.8500     0.3754    0.0458
    0.9000     0.3769    0.0142
    0.9500     0.3768   -0.0149
    1.0000     0.3754   -0.0415
```

Esercizio

Consideriamo l'**oscillatore armonico** descritto dall'equazione differenziale del **secondo ordine** ($n = 2$):

$$\boxed{u''(x) + 2\alpha u'(x) + \beta^2 u(x) = 0}$$

$$\downarrow$$

$$u''(x) = -2\alpha u'(x) - \beta^2 u(x) := g(x, u(x), u'(x))$$

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, \underbrace{u(x)}_{y(x)}, \underbrace{u'(x)}_{z(x)}) \\ \\ \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u_1 \end{cases}$$

$$y(x) = u(x)$$

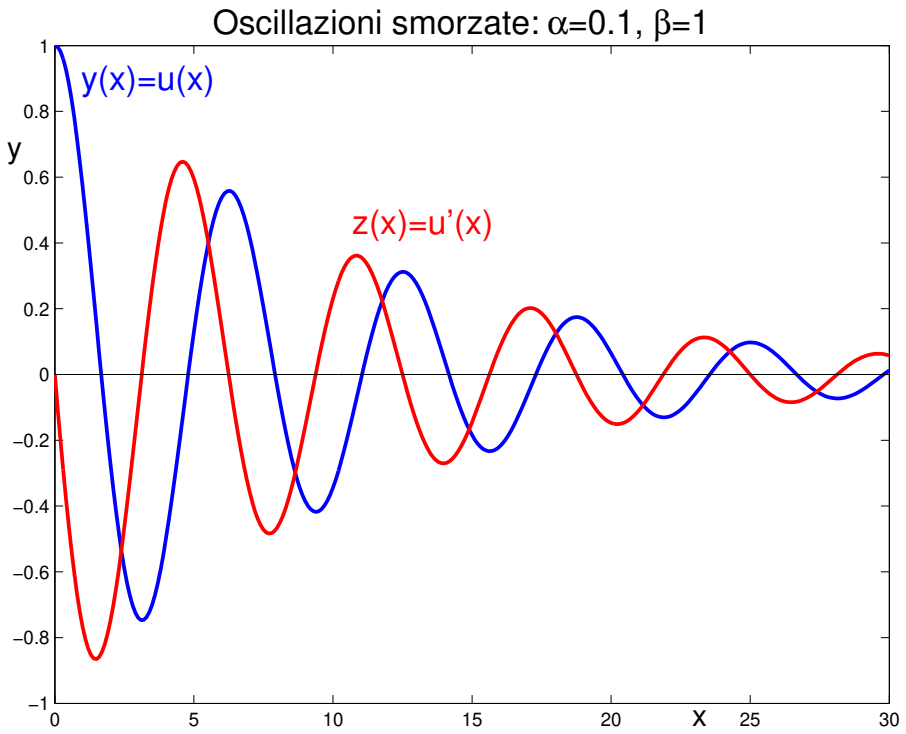
$$\rightarrow \begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_1 \end{cases}$$

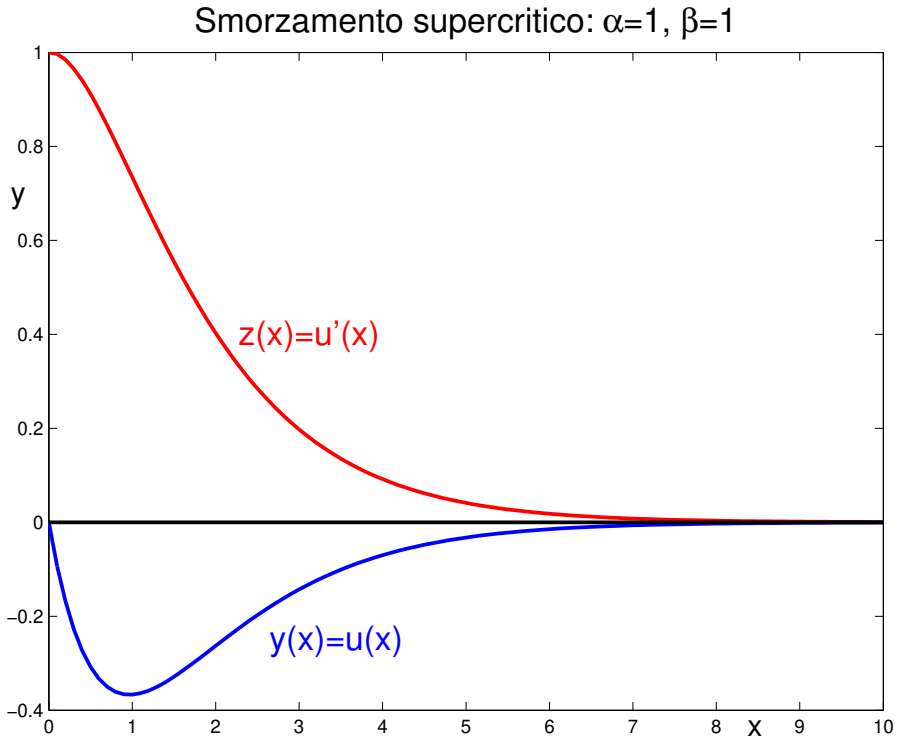
Per risolvere il sistema differenziale ottenuto, si possono applicare i metodi già visti per la soluzione dei sistemi (ad esempio, il metodo di Runge-Kutta classico).

Script MATLAB

```
% Soluzione di un sistema di due equazioni differenziali
% del primo ordine con il metodo di Runge-Kutta classico
%
% Input
%
clear
x0 = input('x0: ');
y0 = input('y0: ');
z0 = input('z0: ');
h  = input('passo: ');
n  = input('numero passi: ');
ffun = input('funzione f(x,y,z): ');
f =  inline(ffun,'x','y','z');
gfun = input('funzione g(x,y,z): ');
g =  inline(gfun,'x','y','z');
%
% Algoritmo
%
xi(1) = x0; yi(1) = y0; zi(1) = z0;
for i = 2:n
   x = xi(i-1);
   y = yi(i-1);
   z = zi(i-1);
   k1 = f(x,y,z);
   t1 = g(x,y,z);
```

```
    k2 = f(x+0.5*h,y+0.5*h*k1,z+0.5*h*t1);
    t2 = g(x+0.5*h,y+0.5*h*k1,z+0.5*h*t1);
    k3 = f(x+0.5*h,y+0.5*h*k2,z+0.5*h*t2);
    t3 = g(x+0.5*h,y+0.5*h*k2,z+0.5*h*t2);
    k4 = f(x+h,y+h*k3,z+h*t3);
    t4 = g(x+h,y+h*k3,z+h*t3);
    xi(i) = x + h;
    yi(i) = y + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    zi(i) = z + h*(t1+2*t2+2*t3+t4)/6;
end
figure(1)
plot(xi,yi,'r',xi,zi,'b')
```





Dati del problema

```
x0: 0
y0: 1
z0: 0
passo: 0.2
numero passi: 150
funzione f(x,y,z): 'z'
funzione g(x,y,z): '-2*0.1*z-y'
```

Dati del problema

```
x0: 0
y0: 1
z0: 0
passo: 0.2
numero passi: 150
funzione f(x,y,z): 'z'
funzione g(x,y,z): '-2*z-y'
```

ODEs per l'analisi ai transienti di un reattore chimico (Chapra pg. 808)

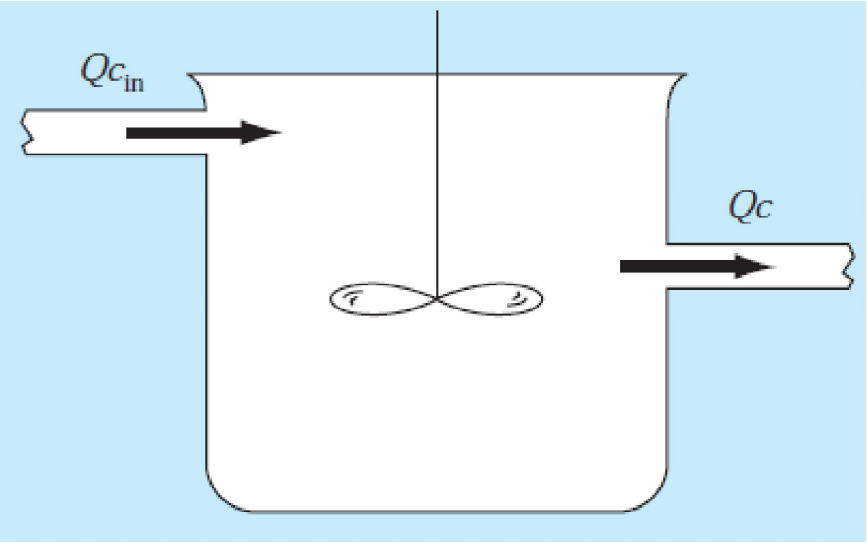
L'accumulo puó essere scritto come:

varazione di massa nel reattore (ipotesi: volume costante) per variazione di tempo, cioé:

$$Accumulo = V \frac{dc}{dt}$$

dove V é il volume e

c é la concentrazione



Per un singolo reattore si puó scrivere:

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{in} - Qc \qquad *)$$

dove Q é il flusso (m^3/min) e

Accumulo = input - output

Supponendo come condizione iniziale:

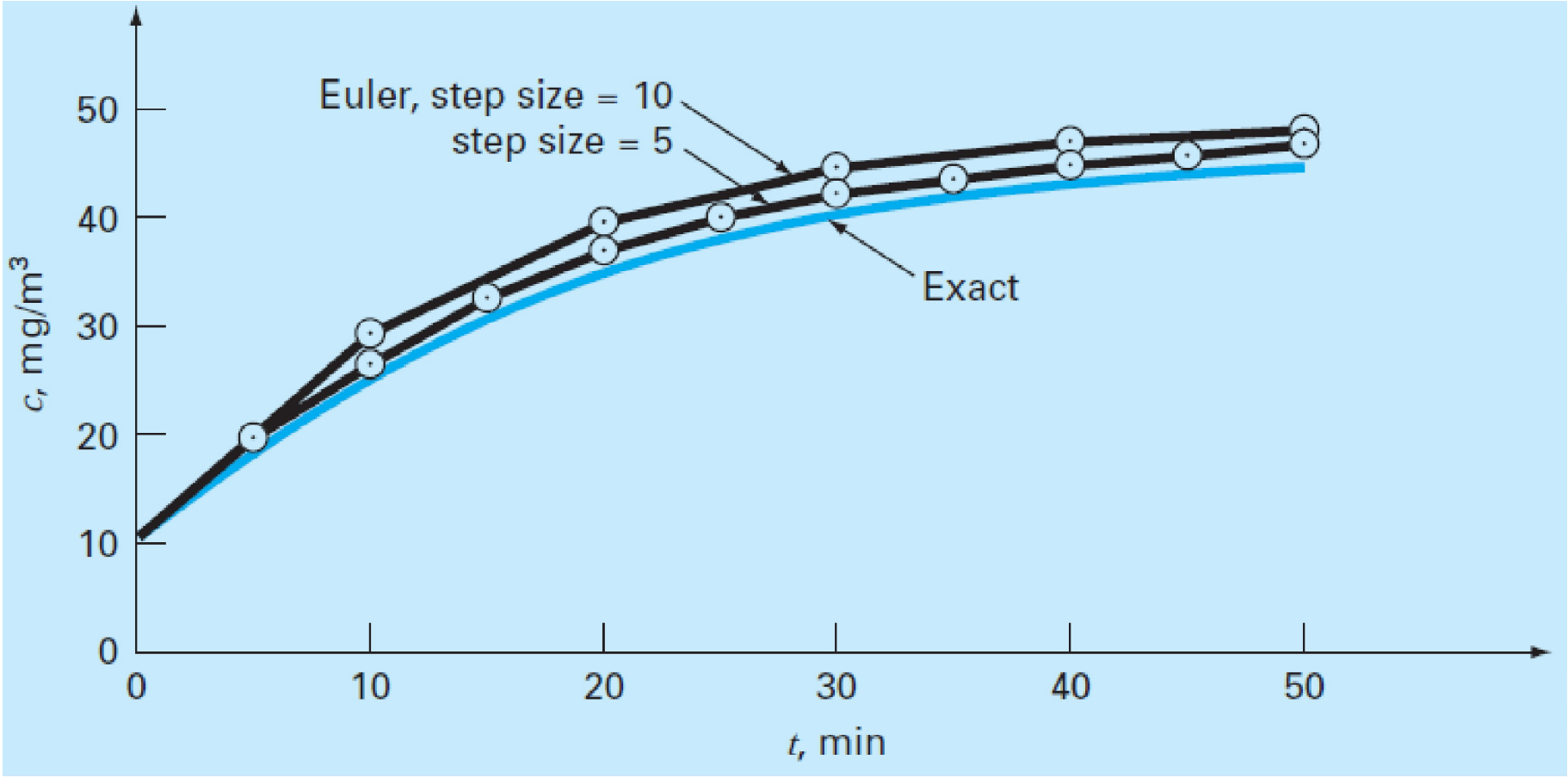
$$c(t = 0) = c_0$$

la soluzione analitica di $*)$ é:

$$c(t) = c_{in}(1 - e^{-(Q/V)t}) + c_0 e^{-(Q/V)t}$$

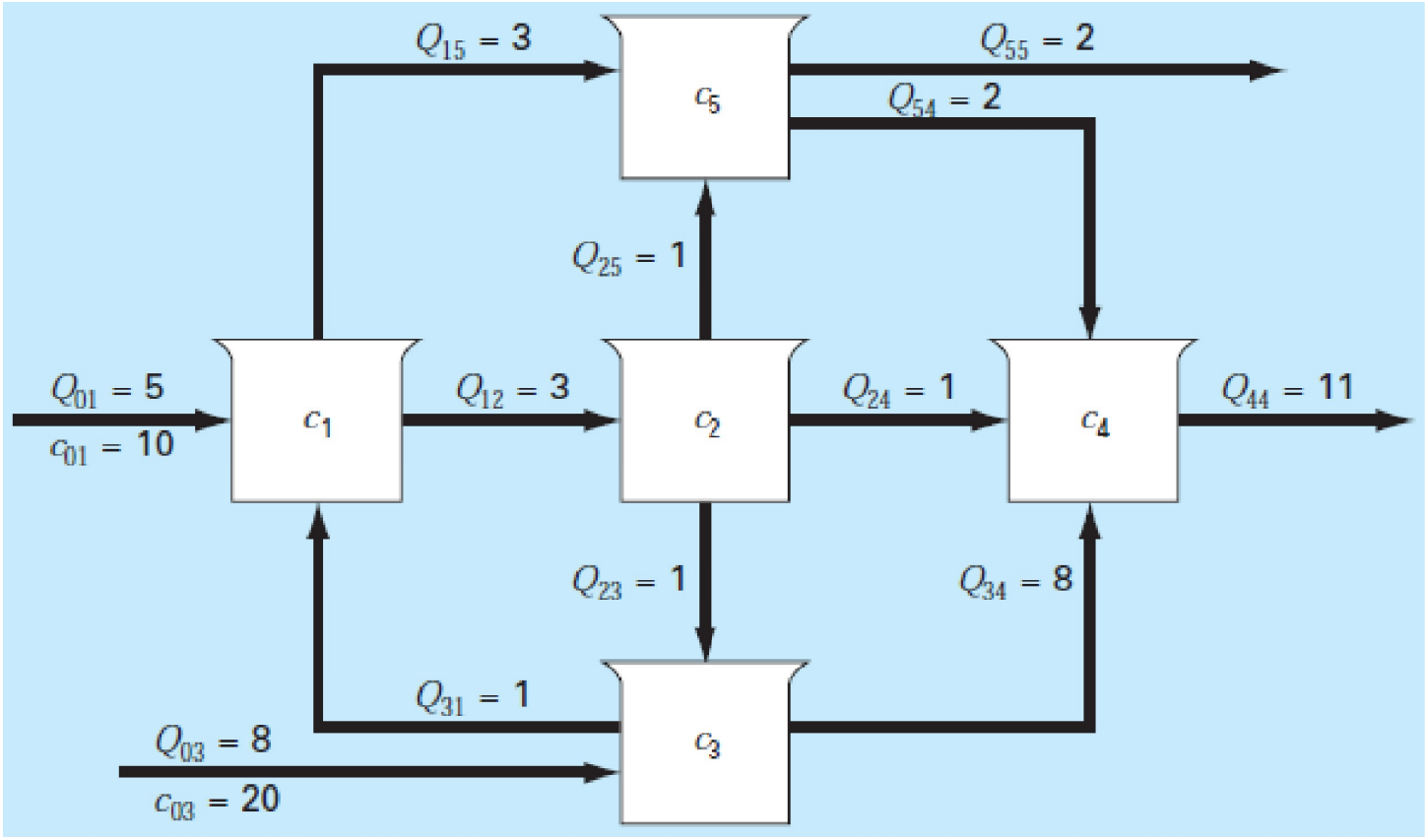
Se $c_{in} = 50mg/m^3$, $Q = 5m^3/min$, $V = 100m^3$, e $c_0 = 10mg/m^3$ l'equazione diventa:

$$c(t) = 50(1 - e^{-.05t}) + 10e^{-.05}t$$



La figura mostra un confronto tra la soluzione esatta e le soluzioni con **Eulero** con due passi diversi.

I metodi numerici diventano di (maggiore) interesse nel caso di reattori accoppiati:



Il bilanciamento di massa per il primo reattore diventa:

$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 - Q_{12}c_1 - Q_{15}c_1$$

Considerando:

$Q_{01}c_{01} = 50mg/min$, $Q_{03}c_{03} = 160mg/min$, $V_1 = 50m^3$, $V_2 = 20m^3$, $V_3 = 40m^3$, $V_4 = 80m^3$ e $V_5 = 100m^3$

$$\frac{dc_1}{dt} = -.12c_1 + .02c_3 + 1$$

$$\frac{dc_2}{dt} = -.15c_1 - .15c_2$$

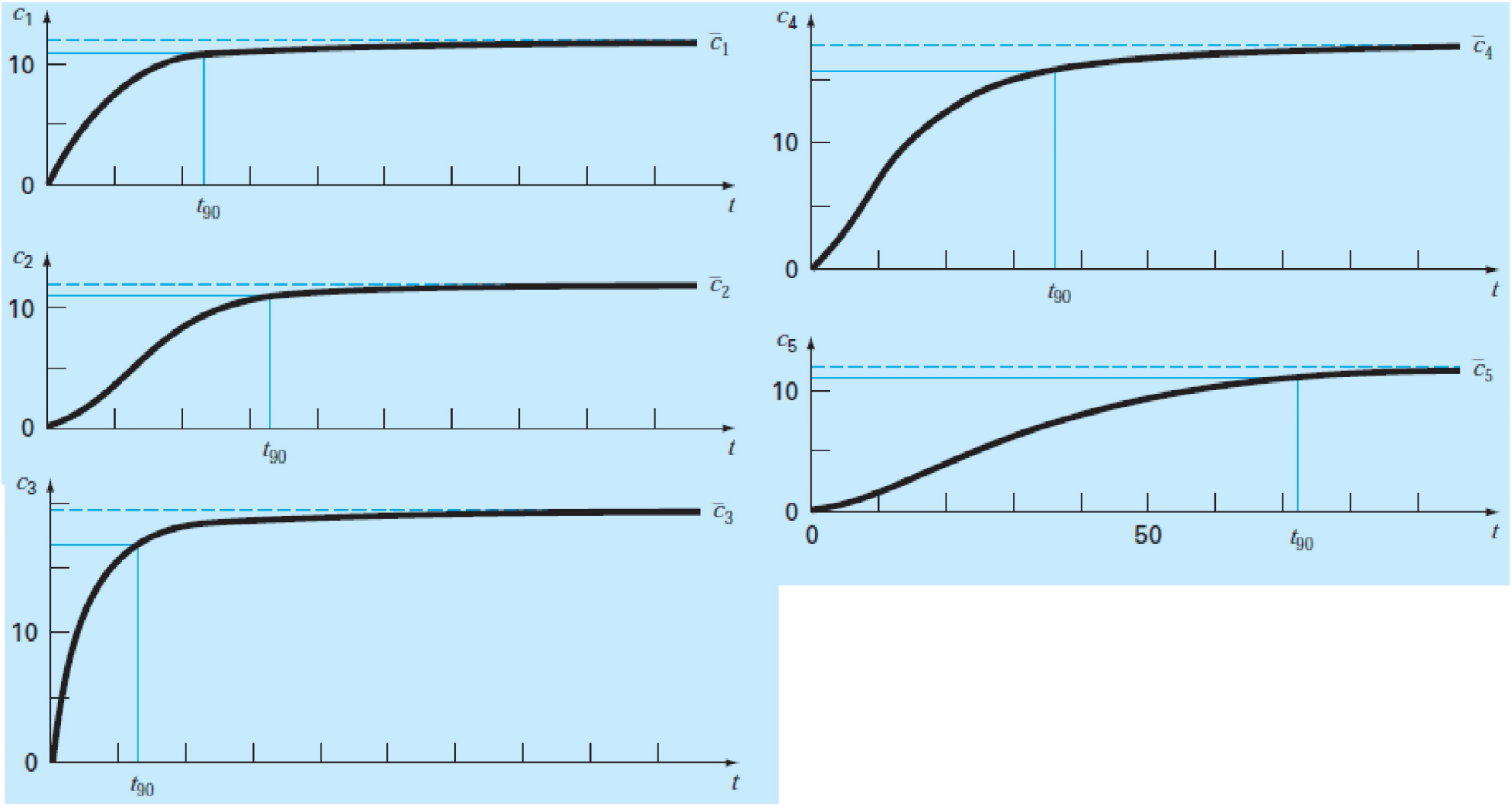
$$\frac{dc_3}{dt} = -.025c_2 - .225c_3 + 4$$

$$\frac{dc_4}{dt} = .1c_3 - .1375c_4 + .025c_5$$

$$\frac{dc_5}{dt} = .03c_1 - .01c_2 - .04c_5$$

Supponiamo che a $t = 0$ tutte le concentrazioni siano $=0$, si vuole stabilire **come variano le concentrazioni nell'ora successiva**.

Usando un RK del quarto ordine per sistemi di ODE si ottiene:



Nota: ogni reattore ha un diverso transiente di risposta all'introduzione di sostanza chimica.

Nota: volendo considerare il tempo t_{90} (tempo necessario per arrivare al 90% dell'equilibrio) si nota che ogni reattore reagisce diversamente:

10 min per il reattore 3

70 min per il reattore 5

Nota: il comportamento dei reattori 4 e 5 é fondamentale perché costituiscono l'output del sistema. Un ingegnere chimico in fase di progettazione puó variare il flusso dei volumi per cercare di velocizzare la risposta dei reattori tenendo fisso l'output del sistema.

Ulteriori approfondimenti di progettazione:

- studio degli autovalori del sistema per cambiare il comportamento del sistema (in termini di velocitá di risposta etc.).

- quantificare la velocitá delle reazioni chimiche (cinetica chimica).

Problemi ai limiti

In molti **problemi** le grandezze coinvolte dipendendono dalla **posizione** piuttosto che dal **tempo**.

In questo caso il modello matematico consiste in un'equazione differenziale con **condizioni imposte in più punti**.

Dato un intervallo $[a, b]$, una funzione $f(x, y, y')$ e due valori α e β, si cerca la funzione y tale che

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Esempio: Deflessione di una trave

Una trave orizzontale di sezione rettangolare e di lunghezza l, tesa lungo la direzione della sua lunghezza da una forza S, è soggetta a un carico trasversale uniforme t. La **deflessione** della trave $w(x)$ è descritta dall'equazione differenziale **non lineare** del secondo ordine

$$[1 + (w'(x))^2]^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{t(x)}{2EI}(x - l) \qquad 0 < x < l$$

con $w(x)$: **deflessione** della trave; x: **distanza** dall'estremo sinistro della trave; l: **lunghezza** della trave;
$t(x) = qx$: intensità del **carico**; E: **modulo di elasticità** ;
S: **tensione** agli estremi della trave; I: **momento principale di inerzia**

Supponendo che la trave sia **fissata** agli estremi, all'equazione differenziale devono essere associate le **condizioni al bordo**

$$w(0) = w(l) = 0$$

Se **si trascurano i termini del secondo ordine**, il problema differenziale diventa lineare:

$$\boxed{\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{t(x)}{2EI}(x-l) \qquad 0 < x < l}$$

e si può risolvere in modo **esatto** se la sbarra ha spessore uniforme (EI è costante).

Se, invece, lo spessore non è uniforme, il momento di inerzia I è una funzione di x e

il problema va risolto numericamente.

Equazioni lineari: Esempio 1

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Integrale generale: $y(x) = \gamma_1 \sinh x + \gamma_2 \cosh x$

Condizioni al bordo $\Rightarrow \quad \gamma_1 = \dfrac{\beta}{\sinh b} \qquad \gamma_2 = 0$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \beta \dfrac{\sinh x}{\sinh b}}$ $\Rightarrow$ La soluzione **esiste** ed è **unica** per qualunque valore di b

Equazioni lineari: Esempio 2

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Integrale generale: $y(x) = \gamma_1 \sin x + \gamma_2 \cos x$

Condizioni al bordo $\Rightarrow \quad \gamma_1 = \dfrac{\beta}{\sin b} \qquad \gamma_2 = 0$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \beta \dfrac{\sin x}{\sin b}}$ $\Rightarrow$ La soluzione è **unica** solo se $b \neq n\,\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$

Se $b = n\,\pi$ e $\beta = 0 \quad \Rightarrow$ Ci sono **infinite** soluzioni $y(x) = c \sin x$

Se $b = n\,\pi$ e $\beta \neq 0 \quad \Rightarrow$ **Non esistono** soluzioni

Problemi differenziali lineari

Consideriamo il problema differenziale **lineare**

$$\begin{cases} y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y - r(x) \qquad a < x < b \\ y(a) = \alpha \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Teorema. Se *i)* $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sono **continue** in $[a, b]$

ii) $|p(x)| \leq K$ e $q(x) > 0$ per $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$ la **soluzione** del problema differenziale **esiste** ed è **unica**

Esempi

Nell' **Esempio 1** si ha

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 1, \quad r(x) = 0$$

sono funzioni continue e verificano le ipotesi del teorema $\forall\, x$.

Nell' **Esempio 2** si ha

$$p(x) = 0, \quad q(x) = -1, \quad r(x) = 0$$

sono funzioni continue ma non verificano le ipotesi del teorema $\forall\, x$ in quanto $q(x) < 0, \quad \forall\, x$.

Metodi alle differenze finite

I **metodi alle differenze finite** consistono nel sostituire ciascuna delle **derivate** che compaiono nell'equazione differenziale con una approssimazione ottenuta tramite le **differenze finite**.

Discretizzazione: si divide l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ **sottointervalli uguali** di ampiezza $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ e si introducono $N + 2$ **nodi equispaziati** x_i, $i = 0, 1, \ldots, N + 1$

$$\boxed{x_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, N + 1}$$

Nei punti **interni** x_i, $i = 1, \ldots, N$, l'equazione differenziale diventa

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y(x_i) - r(x_i) \qquad i = 1, \ldots, N$$

Formula alle differenze centrate per $y'(x_i)$

Se $y \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$, per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$ si può sviluppare y in **serie di Taylor** con punto iniziale x_i e arrestandosi all'ordine 2:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(\eta_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(\eta_i^-)$$

$$\eta_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \qquad \eta_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$$

Formula alle differenze finite centrate per $y'(x_i)$: sottraendo il secondo sviluppo dal primo e usando il teorema dei valori intermedi:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)}_{\downarrow} \qquad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Errore di troncamento: $\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) = O(h^2)$ **Secondo ordine**

Formula alle differenze centrate per $y''(x_i)$

Se $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$, per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$ si può sviluppare y in **serie di Taylor** con punto iniziale x_i e arrestandosi all'ordine 4

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^-)$$

$$\xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \qquad \xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$$

Formula alle differenze finite centrate per $y''(x_i)$: sommando i due sviluppi in serie e usando teorema dei valori intermedi:

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)}_{\downarrow} \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Errore di troncamento: $\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = O(h^2)$ **Secondo ordine**

Metodi alle differenze finite lineari

I **metodi alle differenze finite** consistono nel sostituire le **formule alle differenze finite** nell'**equazione differenziale** esatta collocata nei punti x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Operatore differenziale esatto:

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) := -y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i) \qquad i = 1, ..., N$$

Metodo alle differenze finite:

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} +$$

$$+ q(x_i)y(x_i) - \frac{h^2}{12}\Big[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\Big] = r(x_i)$$

$$i = 1, ..., N$$

Schema alle differenze finite lineari

Indicando con y_i l' **approssimazione** di $y(x_i)$ e trascurando l'**errore di troncamento** nella discretizzazione dell'operatore differenziale $(\mathcal{L}\,y)(x_i)$, si ottiene lo **schema alle differenze finite lineari**:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \qquad y_{N+1} = \beta \\ \\ -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)\,y_i = r(x_i), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$$

che definisce **un sistema lineare** di N equazioni in N incognite. Il vettore delle incognite è il vettore delle approssimazioni $[y_1, y_2, \cdot, y_N]^T$,

Operatore differenziale discreto:

$$(\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)\, y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Schema numerico:

$$(\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = r(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Errore di troncamento /1

Definizione. L'**errore di troncamento** è definito come la differenza tra l'**operatore differenziale esatto** e l'**operatore differenziale discreto** applicato alla soluzione esatta.

Operatore differenziale esatto:

$$(\mathcal{L}\,y)(x_i) = -y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i)$$

Operatore differenziale discreto (applicato alla soluzione esatta):

$$(\mathcal{L}_h\,\{y(x_i)\})_i = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+\,p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)y(x_i)$$

Errore di troncamento:

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) := (\mathcal{L}\,y)(x_i) - (\mathcal{L}_h\,\{y(x_i)\})_i$$

Errore di troncamento /2

Operatore differenziale esatto

(dello schema alle differenze finite lineare):

$$(\mathcal{L}\,y)(x_i) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} +$$

$$+ q(x_i)y(x_i) - \frac{h^2}{12}\Big[2\,p(x_i)\,y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\Big]$$

Errore di troncamento:

$$\begin{aligned}\tau(x_i, y(x_i); h; f) &= (\mathcal{L}\,y)(x_i) - (\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i = \\ &= -\frac{h^2}{12}\Big[2\,p(x_i)\,y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\Big]\end{aligned}$$

Consistenza dello schema alle differenze finite

Definizione. Uno **schema alle differenze finite** è **consistente** se

$$\lim_{h \to 0} \tau(x, y(x); h; f) = 0$$

Errore di troncamento:

$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{12}\left[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right] = O(h^2) \to 0$ per $h \to 0$

$\Rightarrow$ Lo **schema alle differenze finite lineare** è **consistente** e del **secondo ordine** .

Nota. Un metodo del secondo ordine è **esatto** per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

Stabilità dello schema alle differenze finite

Definizione. Uno **schema alle differenze finite lineare** è detto **stabile** se, data una **funzione discreta** $\{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ definita sulla **discretizzazione** $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, esiste una **costante** M tale che

$$\max_{0\le i\le N+1} |v_i| \le M \left\{ \max(|v_0|, |v_{N+1}|) + \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h \{v_i\})_i| \right\}$$

Dalla stabilità segue la **limitazione dell'errore globale** $\{e_i\}_{i=0}^{N+1}$ con $e_i := y(x_i) - y_i$:

$$\max_{0\le i\le N+1} |e_i| \le M \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h \{e_i\})_i| \} = M \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i - (\mathcal{L}_h \{y_i\})_i| \} =$$

$$= M \max_{1\le i\le N} |\tau(x_i, y(x_i); h; f)|$$

Nota.

- $(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i = \underbrace{(\mathcal{L}y)(x_i)}_{=r(x_i)} - \tau(x_i, y(x_i); h; f)$
- $(\mathcal{L}_h \{y_i\})_i = r(x_i)$ (schema numerico)

Convergenza dello schema alle differenze finite

Teorema. Siano $K = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$ e $0 < L = \min_{a \le x \le b} q(x)$.
Se $h\,K < 2 \;\Rightarrow$ lo **schema alle differenze finite lineari** è **stabile** con $M = \max(1, 1/L)$

Poiché la stabilità è soggetta alla **condizione** $h\,K < 2$ si parla di **stabilità condizionata**.

La **consistenza** e la **stabilità condizionata** implicano la **convergenza condizionata** dello schema alle differenze finite.

Sistema lineare

La soluzione approssimata si ottiene risolvendo il **sistema lineare tridiagonale** di N equazioni nelle N incognite $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$

$$AY = B$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$B = \left[h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) \alpha, h^2 r(x_2), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, h^2 r(x_{N-1}), h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) \beta \right]^T$$

Infatti, la $i - sima$ equazione dello schema alle differenze finite si riscrive come segue

$$(-1 - \frac{h}{2} p(x_i)) y_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i)) y_i + (-1 + \frac{h}{2} p(x_i)) y_{i+1} = h^2 r(x_i).$$

Se valgono le **ipotesi** dei teoremi precedenti e se, in particolare, $\boxed{h\,K \leq 2}$
$\Rightarrow$ il sistema lineare ammette un'**unica** soluzione

Osservazione: metodo upwind

La condizione imposta $hK < 2$ può essere eliminata se si approssima in maniera diversa $y'(x_i)$. Invece di utilizzare le differenze finite centrate, si possono usare rispettivamente quelle in avanti se $p(x_i) \leq 0$, ovvero $\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$, e quelle all'indietro se $p(x_i) > 0$, ovvero $\frac{y_i-y_{i-1}}{h}$.

Ne risulta che l'operatore differenziale discreto è

$$(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i =$$

$$= -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{(|p(x_i)| - p(x_i))y_{i+1} - 2|p(x_i)|y_i + (|p(x_i)| + p(x_i))y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i =$$

$$= r(x_i)$$

Lo schema **upwind** è meno accurato dello schema alle differenze finite centrate ma non da vincoli sulla scelta del passo di discretizzazione h.

Esercizio 1

Si consideri il seguente problema ai limiti lineare

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = sinh(1)$$

del quale si conosce la soluzione analitica $y(x) = sinh(x)$.

Si vuole confrontare la soluzione analitica con quella numerica ottenuta costruendo uno schema alle differenze finite su cinque nodi equidistanti di passo $h = 0.25$ nell'intervallo $[0,\ 1]$

Riscrivendo l'equazione nella forma $-y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - r(x) = 0$, si ha

$$-y''(x) + y(x) = 0$$

e quindi $p(x) = r(x) = 0$, $q(x) = 1$.

I punti in cui va determinata la soluzione sono

$$x_i = x_0 + ih = 0 + 0.25i, \quad i = 1, .., 3$$

mentre il sistema di tre equazioni in tre incognite da risolvere è

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) \\ 0 & -1 - \frac{h}{2} p(x_3) & 2 + h^2 q(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) \alpha \\ h^2 r(x_2) \\ h^2 r(x_3) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_3)\right) \beta \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 + h^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è tridiagonale e a diagonale dominante. La condizione $hK < 2$ è rispettata $\forall\ h$ in quanto $p(x) = 0$. Il sistema può essere risolto con un metodo numerico per la soluzione di sistemi lineari con matrice dei coefficienti tridiagonale (per esempio il metodo di Thomas oppure il metodo SOR). In particolare, poichè la matrice è simmetrica e definita positiva, per il metodo SOR è possibile scegliere il parametro di rilassamento ottimo.

Usando il passo $h = 0.25$, si ha

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
0	0	0	0
0.250000000000000	0.252803113763196	0.252612316808168	-0.000190796955027
0.500000000000000	0.521406422136591	0.521095305493747	-0.000311116642844
0.750000000000000	0.822597631893524	0.822316731935830	-0.000280899957694
1.000000000000000	1.175201193643801	1.175201193643801	0

mentre usando il passo $h = 0.125$ si ha

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
0	0	0	0
0.125000000000000	0.125350843284863	0.125325775241115	-0.000025068043748
0.250000000000000	0.252660293496053	0.252612316808168	-0.000047976687884
0.375000000000000	0.383917560793118	0.383851067913615	-0.000066492879503
0.500000000000000	0.521173539977575	0.521095305493747	-0.000078234483828
0.625000000000000	0.666572855724182	0.666492264456616	-0.000080591267566
0.750000000000000	0.822387372341479	0.822316731935830	-0.000070640405649
0.875000000000000	0.991051691651612	0.991006637144295	-0.000045054507318
1.000000000000000	1.175201193643801	1.175201193643801	0

Oss: In corrispondenza di ogni nodo interno x_i, l'errore di troncamento è

$$\tau(x_i) = -\frac{h^2}{12}(2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(IV)}(\xi_i)),$$

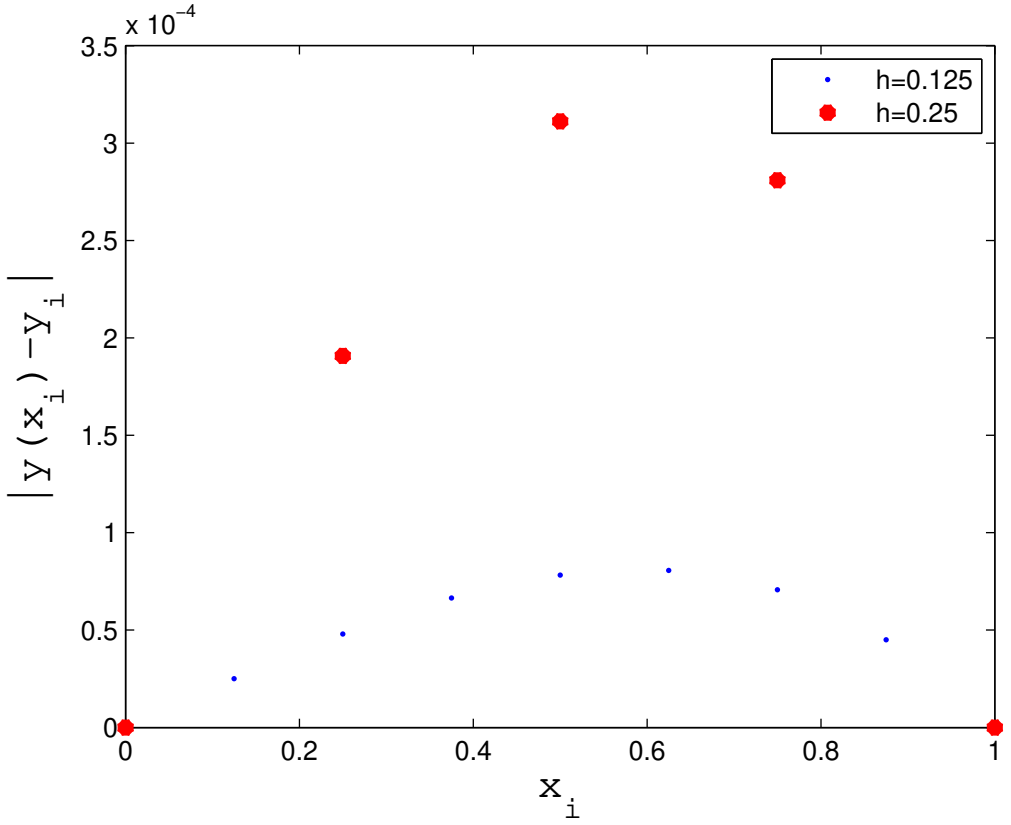
con $\xi_i,\ \eta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Poichè $p(x) = 0$ e $q(x) = 1 \quad \forall\, x$,

$$\tau(x_i) = \frac{h^2}{12}y^{(IV)}(\xi_i).$$

Inoltre, dall'equazione differenziale segue che $y^{(IV)}(x) = y(x)$, da cui

$$|\tau(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} max_{x\in[x_i-h,x_i+h]}|y(x)|$$

Grafico dell'errore: confronto caso $h = 0.25$ e $h = 0.125$



Problemi differenziali non lineari

Consideriamo il problema differenziale del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & a < x < b \\ y(a) = \alpha, \ \ y(b) = \beta & \textbf{condizioni al bordo} \end{cases}$$

dove $f(x, y, z) \in C^1([a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ è una funzione **non lineare**.

Esistenza e unicità della soluzione

Teorema. Se *i)* $f(x, y, z)$ e le derivate parziali $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ e $f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$ sono **continue** in

$$D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, -\infty < y, z < \infty\}$$

ii) $f_y(x, y, z) \geq \delta$ in D per qualche $\delta > 0$

iii) esistono due **costanti** K e L tali che

$$H = \max_{(x,y,z) \in D} f_y(x, y, z)$$

$$K = \max_{(x,y,z) \in D} |f_z(x, y, z)|$$

$\Rightarrow$ la **soluzione** del problema differenziale **esiste** ed è **unica**

Esempio

Il seguente problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{1}{2}(1+x+y)^3, & x \in (0,\ 1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione unica in $x \in [0,\ 1]$.

Infatti, $f(x, y, y') = \frac{1}{2}(1+x+y)^3$, $f_y = \frac{3}{2}(1+x+y)^2$ e $f_{y'} = 0$ sono funzioni continue in $[0,\ 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Inoltre, $0 < f_y < L$ e $max|f_{y'}| = 0$.

Schema alle differenze finite

Sostituendo le **formule alle differenze finite centrate** nell'**equazione differenziale** $-y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, si ha:

$$-\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = 0$$

Lo **schema alle differenze finite** si ottiene trascurando l'**errore di troncamento** e aggiungendo le **condizioni al bordo**.

Se y_i è l' **approssimazione** di $y(x_i)$ si ha

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \qquad y_{N+1} = \beta \\ (\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0 \quad i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Consistenza dello schema alle differenze finite

Operatore differenziale (esatto):

$$(\mathcal{L}\,y)(x_i) = -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = 0$$

Operatore differenziale discreto (applicato alla soluzione esatta):

$$(\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right)$$

Errore di troncamento:

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = \underbrace{(\mathcal{L}\,y)(x_i)}_{=0} - (\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i = O(h^2) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

$\Rightarrow$ Lo **schema alle differenze finite** non lineare è **consistente** e del **secondo ordine**

Nota

- Lo schema è **esatto** per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

- $|\tau(x_i, y(x_i); h; f)| \leq \frac{h^2}{12}(2|y^{(3)}(\eta_i)|K + |y^{(4)}(\xi_i)|)$

Stabilità dello schema alle differenze finite /1

Definizione. Uno **schema alle differenze finite non lineare** è detto **stabile** se, date due **funzioni discrete** $\{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ e $\{u_i\}_{i=0}^{N+1}$ definite sulla **discretizzazione** $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, esiste una **costante** M tale che

$$\max_{0 \le i \le N+1} |v_i - u_i| \le M \left\{ \max(|v_0 - u_0|, |v_{N+1} - u_{N+1}|) + \right.$$

$$\left. + \max_{1 \le i \le N} |(\mathcal{L}_h \{v_i\})_i - (\mathcal{L}_h \{u_i\})_i| \right\}$$

Stabilità dello schema alle differenze finite /2

Teorema. Siano $K = \max_{(x,y,z)\in D} |f_z(x,y,z)|$ e $0 < L = \min_{(x,y,z)\in D} f_y(x,y,z)$.
Se $h\,K \leq 2 \;\Rightarrow$ lo **schema alle differenze finite non lineari** è **stabile** con $M = \max(1, 1/L)$

$$\Rightarrow \max_{0\leq i\leq N+1} |e_i| = \max_{0\leq i\leq N+1} |y(x_i) - y_i| \leq$$

$$\leq M \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i - \underbrace{(\mathcal{L}_h\{y_i\})}_{=0}|\} = M \max_{1\leq i\leq N} |\tau(x_i, y(x_i); h; f)|$$

La **consistenza** e la **stabilità condizionata** implicano la **convergenza condizionata** dello schema alle differenze finite

Schema alle differenze finite non lineare

Si tratta di risolvere il **sistema non lineare** di N equazioni nelle N incognite $y_1, y_2, \ldots, y_N$

$$
\begin{cases}
2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\
-y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} + h^2 f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\
-y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0
\end{cases}
$$

Se valgono le **ipotesi** dei teoremi precedenti e, in particolare, $\boxed{hK \leq 2}$ $\Rightarrow$ il sistema ammette un'**unica soluzione**.

Soluzione del sistema con il metodo di Newton

La soluzione $[y_1, y_2, \ldots, y_N]^T$ del **sistema non lineare** può essere approssimata con il **metodo di Newton**: si genera una **successione di approssimazioni** $\{[y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_N^{(k)}]^T\}$ che **converge** alla soluzione se l'**approssimazione iniziale** $\{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)}]^T\}$ è abbastanza **vicina** alla soluzione e la **matrice Jacobiana** $J(y_1, \ldots, y_N)$ del sistema è **regolare**.

Matrice Jacobiana: $J(y_1, \ldots, y_N)$ è **tridiagonale**

$$[J(y_1, \ldots, y_N)]_{ij} = \begin{cases} -1 + \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i+1, \quad i = 1, \ldots, N-1 \\ 2 + h^2 f_y\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i, \qquad i = 1, \ldots, N \\ -1 - \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i-1, \quad i = 2, \ldots, N \end{cases}$$

con $y_0 = \alpha$ e $y_{N+1} = \beta$.

Algoritmo del metodo di Newton

Se $Y^{(k)} = [y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_N^{(k)}]^T$ indica l'**approssimazione** alla k-esima iterazione, l'**algoritmo del metodo di Newton** è

$$\boxed{\begin{cases} J(y_1^{(k)}, \ldots, y_N^{(k)})V = B^{(k)} \\ \\ Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + V \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

$$B^{(k)} = -\left[2y_1^{(k)} - y_2^{(k)} - \alpha + h^2 f\left(x_1, y_1^{(k)}, \frac{y_2^{(k)} - \alpha}{2h}\right), -y_1^{(k)} + 2y_2^{(k)} - y_3^{(k)} + \right.$$

$$\left. + h^2 f\left(x_2, y_2^{(k)}, \frac{y_3^{(k)} - y_1^{(k)}}{2h}\right), \ldots, -y_{N-1}^{(k)} + 2y_N^{(k)} - \beta + h^2 f\left(x_N, y_N^{(k)}, \frac{\beta - y_{N-1}^{(k)}}{2h}\right)\right]^T$$

- Ad ogni iterazione bisogna risolvere un **sistema lineare tridiagonale**, che ha un costo computazionale ridotto

- L'**approssimazione iniziale** $Y^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)}]^T$ si può ottenere approssimando $y(x)$ con la **retta** che congiunge i punti (a, α) e (b, β), cioè ponendo $y_i^{(0)} = \alpha + i\left(\frac{\beta - \alpha}{b - a}h\right)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Esempio

Si consideri il seguente problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{8}(32 - 2x^3 + yy'), \quad 1 \leq x \leq 3 \\ y(1) = -15, y(3) = \frac{11}{3} \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = x^2 - \frac{16}{x}$

Si vuole valutare l'errore che si commette approssimando $y(x)$ con la soluzione prodotta risolvendo il problema in modo numerico mediante il metodo delle differenze finite centrate scegliendo come $h = 0.1$ come passo di integrazione ed il seguente criterio di arresto per il metodo di Newton.

$$\max_{1 \leq i \leq N} |y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| \leq 0.5 \cdot 10^{-8}$$

$f(x, y, y') = \frac{1}{8}(32 - 2x^3 + yy')$, $[a,\ b] = [1,\ 3]$, $\alpha = -15$, $\beta = \frac{11}{3}$, i punti (nodi) in cui approssimare la funzione sono $x_i = 1+ih, \quad i = 0, 1, \ldots, 20$ e il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\ \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0 \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\ \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2\frac{1}{8}\left(32 - 2x_1^3 + y_1\frac{y_2-\alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2\frac{1}{8}\left(32 - 2x_2^3 + y_2\frac{y_3-y_1}{2h}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -y_{18} + 2y_{19} - y_{20} + h^2\frac{1}{8}\left(32 - 2x_{19}^3 + y_{19}\frac{y_{20}-y_{18}}{2h}\right) = 0 \\ -y_{19} + 2y_{20} + h^2\frac{1}{8}\left(32 - 2x_{20}^3 + y_{20}\frac{\beta-y_{19}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana è

$$[J(y_1,\ldots,y_{20})]_{ij} = \begin{cases} -1 - \frac{h}{2}\frac{y_i}{8} & i = j-1, \quad j = 2,\ldots,20 \\ 2 + \frac{h}{2}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{8} & i = j, \qquad j = 1,\ldots,20 \\ -1 + \frac{h}{2}\frac{y_i}{8} & i = j+1, \quad j = 1,\ldots,19 \end{cases}$$

La tabella riporta i risultati ottenuti

x_i	$y_i = y_i^{(K)}$	$y_i^{(K)} - y_i^{(K-1)}$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.0	-15.000000000000	+0.00000000000000	0
1.1	-13.336285267647	-0.00000000000241	0.8307×10^{-3}
1.2	-11.894727993496	-0.00000000000386	0.1395×10^{-2}
1.3	-10.619464727660	-0.00000000000420	0.1772×10^{-2}
1.4	-9.470588135082	-0.00000000000326	0.2017×10^{-2}
1.5	-8.418829716423	-0.00000000000078	0.2163×10^{-2}
1.6	-7.442235993306	+0.00000000000316	0.2236×10^{-2}
1.7	-6.524017517365	+0.00000000000785	0.2253×10^{-2}
1.8	-5.651114707934	+0.00000000001201	0.2226×10^{-2}
1.9	-4.813216479186	+0.00000000001436	0.2164×10^{-2}
2.0	-4.002073211108	+0.00000000001432	0.2073×10^{-2}
2.1	-3.211005966600	+0.00000000001223	0.1958×10^{-2}
2.2	-2.434549521590	+0.00000000000917	0.1822×10^{-2}
2.3	-1.668188486321	+0.00000000000639	0.1667×10^{-2}
2.4	-0.908159366566	+0.00000000000472	0.1493×10^{-2}
2.5	-0.151300099290	+0.00000000000430	0.1300×10^{-2}
2.6	0.605065723571	+0.00000000000463	0.1088×10^{-2}
2.7	1.363218943685	+0.00000000000487	0.8551×10^{-3}
2.8	2.125115669308	+0.00000000000429	0.5986×10^{-3}
2.9	2.892443514287	+0.00000000000258	0.3151×10^{-3}
3.0	3.666666666667	+0.00000000000000	0

grafico della stima della soluzione

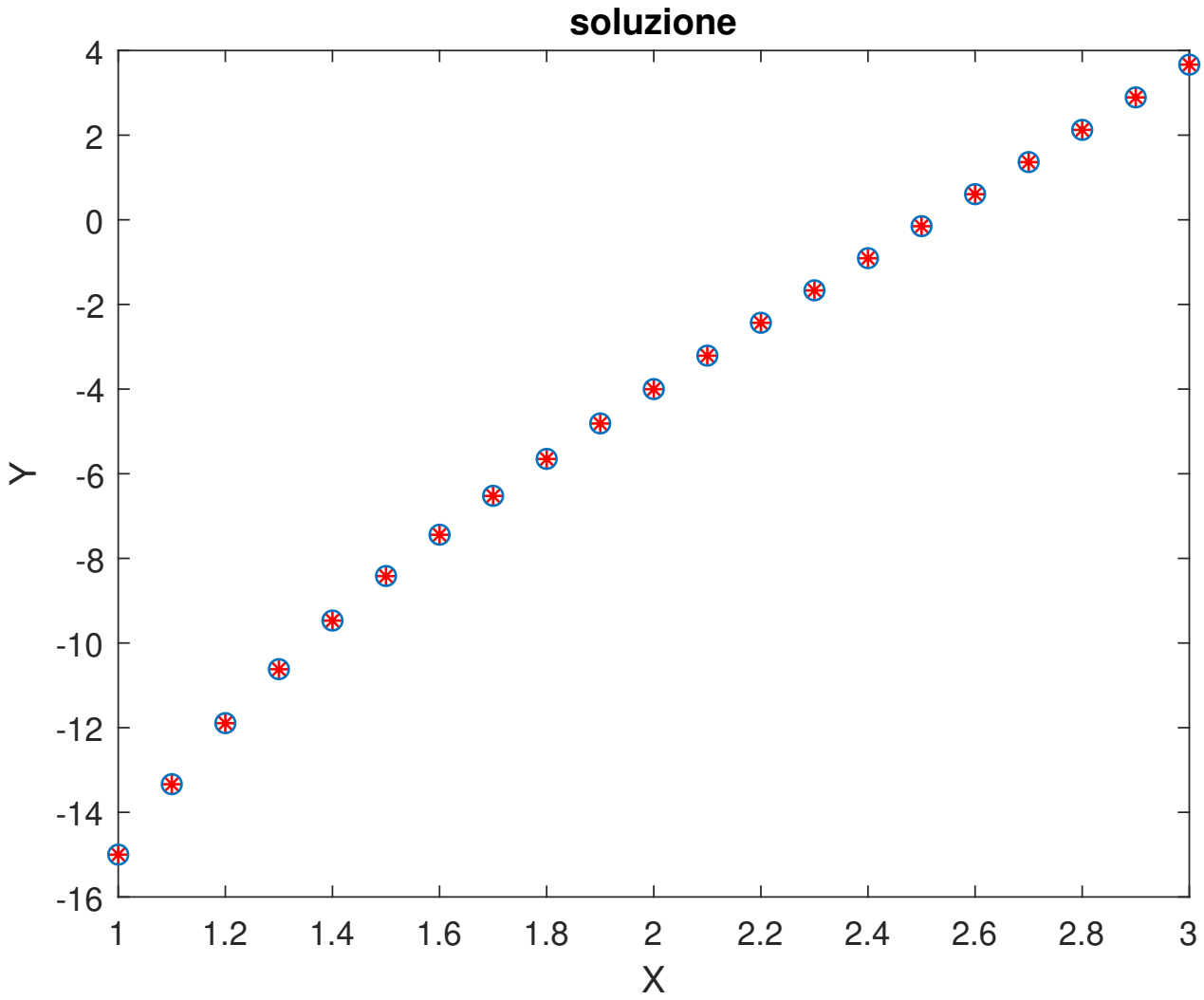
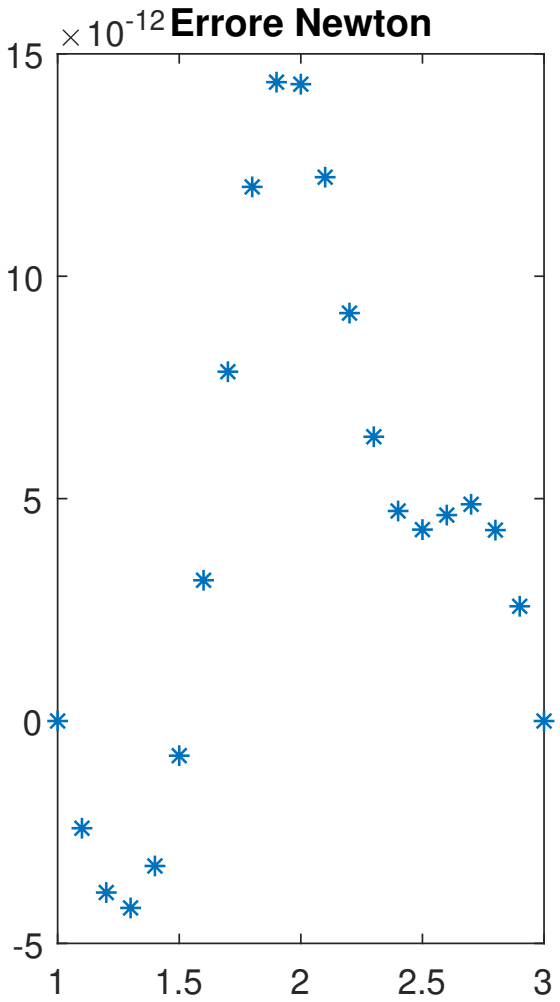
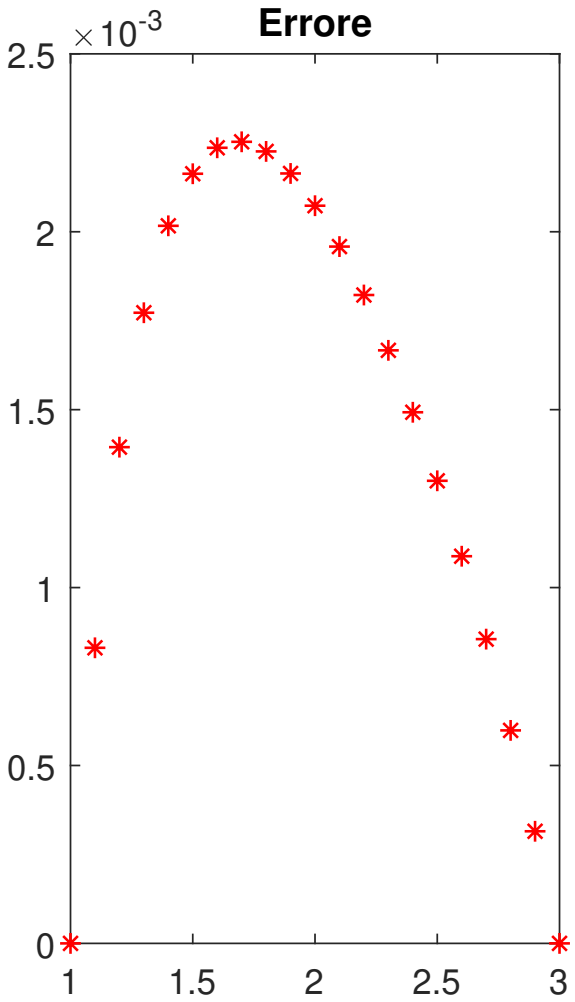


grafico degli errori





FINE

Slide di approfondimento

Approfondimento: equazioni differenziali

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}^{n+2} \to \mathbb{C}$ con $\Omega \neq \varnothing$ un insieme aperto e connesso e $n \in \mathbb{N}$.

Un'**equazione differenziale ordinaria** di ordine n é una relazione del tipo:

$$F\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0$$

dove $u^{(i)}(x)$ si indica la derivata $i-$esima della funzione $u(x)$.

Se F é definita in una regione Ω dello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n+2}$, allora si considerano piú propriamente equazioni differenziali ordinarie nel campo reale, a valori reali se F é a valori in $\mathbb{R}$.

L'ordine di un'equazione é l'ordine massimo di derivazione.

L'aggettivo ordinario si riferisce al fatto che l'incognita é una funzione di una sola variabile.

Nota: Nel caso l'incognita dipenda da piú variabili si ha un'equazione differenziale alle derivate parziali.

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Si definisce soluzione o integrale dell'equazione differenziale ordinaria una funzione $\varphi = \varphi(x)$ tale che:

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}^n(I) \qquad F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale ordinaria si dice autonoma se F non dipende esplicitamente da x.

Un'equazione differenziale ordinaria si dice scritta in forma normale se puó essere esplicitata rispetto $u^{(n)}(x)$:

$$u^{(n)}(x) = G\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right)$$

Si dice inoltre lineare se F é una combinazione lineare di $u, u', \ldots, u^{(n)}$, ovvero:

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = s(x) + b_0(x)u + b_1(x)u' + \ldots + b_n(x)u^{(n)}$$

o, in modo equivalente:

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) u^{(i)} + r(x)$$

dove:

$$r(x), a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x) \in C^0(I)$$

Il termine $r(x)$ é detto sorgente o forzante, e se é nullo l'equazione differenziale lineare si dice omogenea.

Un'equazione ordinaria possiede soluzioni linearmente indipendenti in numero pari al grado dell'equazione, ed ogni loro combinazione lineare é a sua volta soluzione.

Per un'equazione differenziale ordinaria, se si conosce una soluzione generale dell'equazione omogenea ad essa associata allora é possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione "completa".

Esistono diverse procedure, tra cui il metodo delle variazioni delle costanti e l'utilizzo della Trasformata di Laplace.

Per i casi piú semplici vi sono inoltre alcune teorie: ad esempio, per le equazioni di primo grado é possibile cercare un opportuno fattore di integrazione, per quelle di secondo vi é la teoria di Sturm-Liouville.

In generale, tuttavia, di solito l'unico modo possibile per studiare sempre la soluzione é l'utilizzo di un metodo di soluzione numerica. $\oplus$

Modello preda-predatore di Lotka-Volterra

Sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine non-lineari, che descrive la generalizzazione al caso di due popolazioni in competizione.

$y_1(t)$ rappresenta il numero di prede e $y_2(t)$ rappresenta il numero di predatori.

$$\begin{cases} y_1'(t) = C_1 y_1 \left(1 - b_1 y_1(t) - d_1 y_2(t)\right) \\ y_2'(t) = -C_2 y_2 \left(1 - b_2 y_2(t) - d_2 y_1(t)\right) \end{cases}$$

dove C_1, C_2 sono i **fattori di crescita**, d_1, d_2 sono i coefficienti che governano il tipo di **interazione tra le due popolazioni** mentre b_1, b_2 sono legati alla **disponibilitá di nutrienti**.

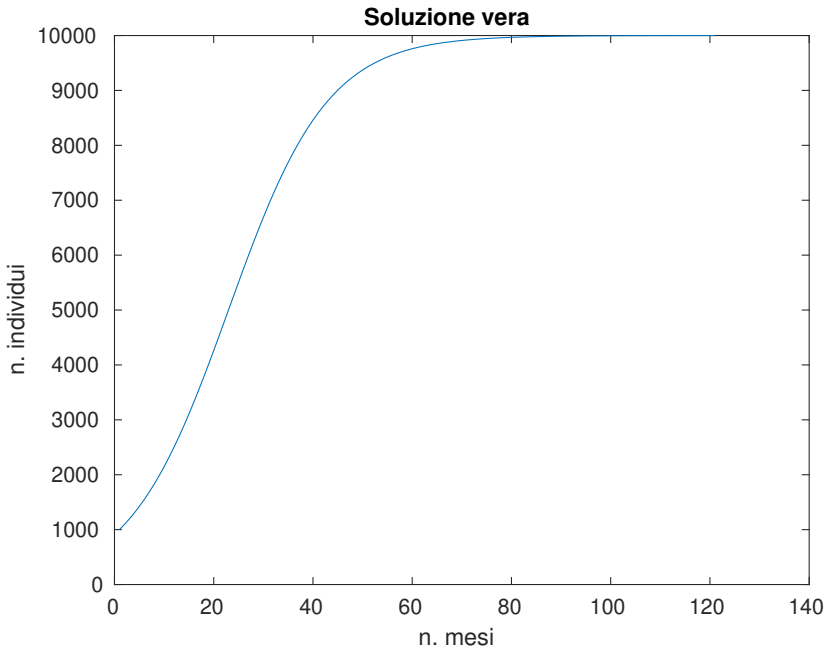
Nota: In assenza di predatori le prede crescono in modo esponenziale; i predatori invece, in assenza di prede, muoiono rapidamente. ⊕ ▽

Approfondimento

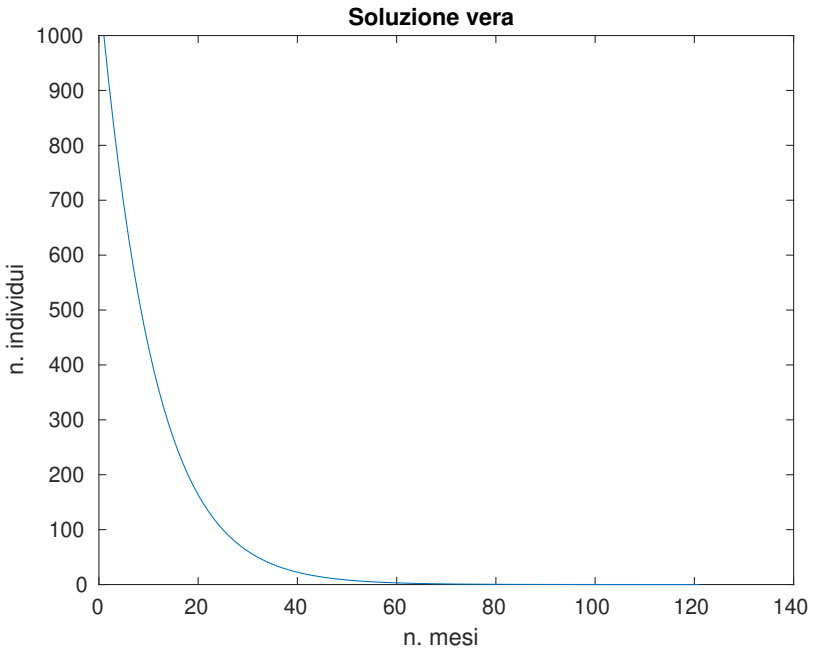
$$y(t) = \frac{Be^{Ct+k^*}}{1 + e^{Ct+k^*}} \qquad k^* = \log\left(\frac{y(0)}{B - y(0)}\right)$$

con $B = 10000$, $C = .1$(left), $C = -.1$(right) e

$$y(0) = 1000 \textbf{ (condizione di Cauchy)}$$



MATLAB



MATLAB ⊕

MATLAB

```
clear
close all
C = .1;
B = 10000;
Nu = 1000;
h = 1;
t = (0:h:120);
%disegna la soluzione vera

kstar = log(Nu/(B-Nu));

y_true = @(t)[B*exp(C*t+kstar)./(1+exp(C*t+kstar))];

 figure
 plot(y_true(t))
 xlabel('n. mesi'), ylabel('n. individui')
 title('Soluzione vera')
```

MATLAB

```
clear
close all
C = -.1;
B = 10000;
Nu = 1000;
h = 1;
t = (0:h:120);
% disegna la soluzione vera

kstar = log(Nu/(B-Nu));

y_true = @(t)[B*exp(C*t+kstar)./(1+exp(C*t+kstar))];

 figure
 plot(y_true(t))
 xlabel('n. mesi'), ylabel('n. individui')
 title('Soluzione vera')
```

Per determinare i valori dei parametri a_1, a_2, λ che definiscono un metodo del secondo ordine, è necessario osservare che:

1. **Sviluppo in serie di Taylor** Confrontando l'equazione generale (*) con lo sviluppo in serie di Taylor di y attorno al punto x, si ha

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x)\,h + \frac{1}{2}y''(x)\,h^2 + 0(h^3) = \\ &= y(x) + \underbrace{f(x,y)\,h + \frac{1}{2}\Big(f_x(x,y) + f_y(x,y)\,f(x,y)\Big)\,h^2}_{h\Phi(x;y;h;f)} + O(h^3) \end{aligned}$$

   La funzione incremento così definita dipende anche da f_x e f_y.

2. Poichè $f(x,y) + f_x(x,y)\lambda h + f_y(x,y)\,\lambda h f(x,y)$ è lo sviluppo in serie di Taylor attorno al punto (x,y) della funzione $f(x+\lambda h, y+\lambda h f(x,y))$, si ha

$$k_2(x,y) = f(x,y) + f_x(x,y)\,\lambda\,h + f_y(x,y)\,\lambda\,h\,f(x,y) + O(h^2)$$

Ne segue che

$$R(x,y;h;f) = \underbrace{y(x+h)-y(x)}_{Osservazione1} - h \underbrace{\Phi(x,y;h;f)}_{(**)\ e\ Osservazione2} =$$

$$= h\,f(x,y) + \frac{h^2}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\,f(x,y)\right) + O(h^3) -$$

$$-h\left(a_1 f(x,y) +\right.$$

$$\left. a_2\left(f(x,y) + f_x(x,y)\,\lambda\,h + f_y(x,y)\,\lambda\,h\,f(x,y) + O(h^2)\right)\right) =$$

$$= hf(x,y)[1 - a_1 - a_2] + h^2 f_x(x,y)\left(\tfrac{1}{2} - a_2\lambda\right) +$$

$$+h^2 f_y(x,y)f(x,y)\left(\tfrac{1}{2} - a_2\lambda\right) + O(h^3)$$

Affinchè il metodo sia del **secondo ordine** devono essere **nulli** i termini in h e h^2, cioè

$$\begin{cases} 1 - a_1 - a_2 = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} - a_2 \lambda = 0 \end{cases}$$

che è un **sistema di 2 equazioni in 3 incognite** $\Rightarrow$ ammette **infinite soluzioni**

$\bigtriangledown$