

Metodi Matematici per l'Ingegneria (A.A. 2019-2020)

Sistemi lineari

Metodi diretti

Docente: Domenico Vitulano

Email: domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 11

Tel. 06 49766555

Ricevimento: consultare la pagina web dedicata al corso

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sui siti:

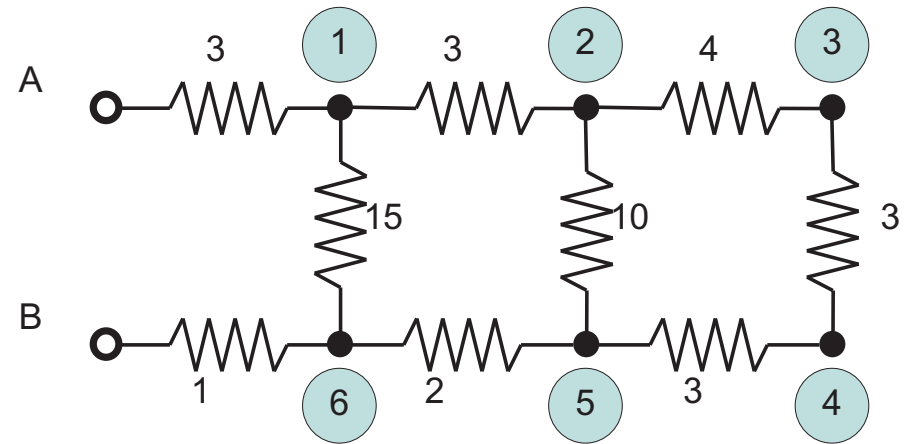
<https://www.sbai.uniroma1.it/vitulano-domenico/analisi-numerica/2019-2020>

<https://elearning.uniroma1.it/enrol/index.php?id=7967>

Sistemi di equazioni lineari

Esempio 1: Elettrotecnica

Determinare i potenziali nei nodi 1 – 6 del circuito sapendo che tra A e B è applicata una differenza di potenziale pari a 100V (le resistenze sono misurate in *Ohm*)



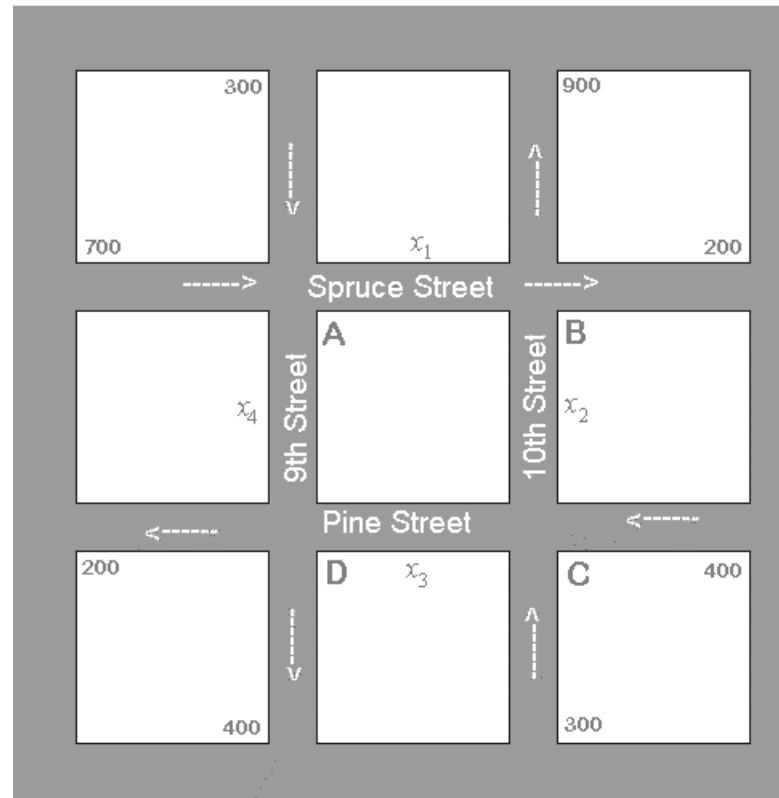
Soluzione

Applicando la **legge di Ohm** $\Delta V = RI$ e la **legge di Kirchhoff** $\sum_i I_i = 0$ in ogni nodo si **ottiene il sistema lineare**

$$\left\{ \begin{array}{cccccccl} 11v_1 & -5v_2 & & & & -v_6 & = & 500 \\ -20v_1 & +41v_2 & -15v_3 & & & -6v_5 & = & 0 \\ & -3v_2 & +7v_3 & -4v_4 & & & = & 0 \\ & & -v_3 & +2v_4 & -v_5 & & = & 0 \\ & -3v_2 & & -10v_4 & +28v_5 & -15v_6 & = & 0 \\ -2v_1 & & & & -15v_5 & +47v_6 & = & 0 \end{array} \right.$$

Esempio 2: Trasporti e logistica

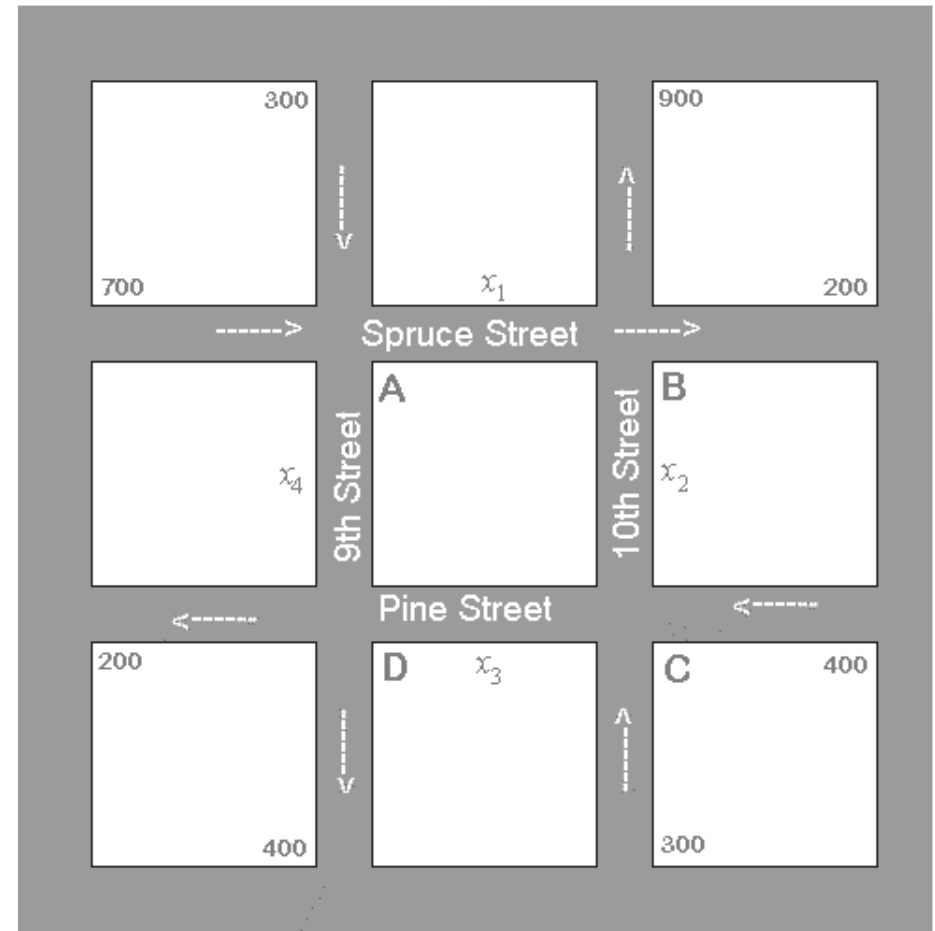
Nelle ore di punta il **traffico è congestionato** in corrispondenza degli incroci rappresentati in figura:



Nota: Tutte le strade sono a senso unico e la direzione di circolazione è indicata dalle frecce.

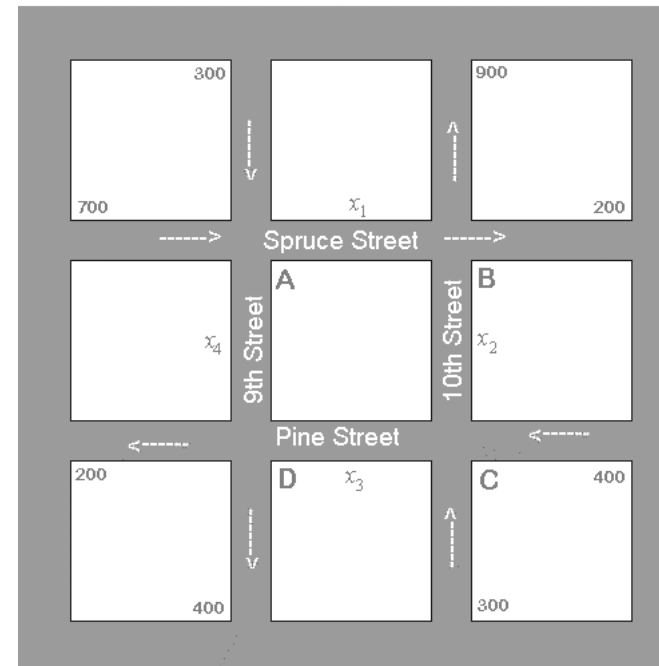
Inoltre:

1. **Incrocio A**: **700** macchine ogni ora provengono da Spruce Street mentre **300** provengono da 9th Street
2. **Incrocio B**: **200** macchine ogni ora attraversano l'incrocio B provengono da Spruce Street mentre **900** provengono da 10th Street.
3. **Incrocio C**: **400** macchine ogni ora entrano in Pine Street attraverso l'incrocio C mentre **300** provengono da 10th Street.
4. **Incrocio D**: **200** macchine ogni ora lasciano l'incrocio D in direzione Pine Street mentre **400** in direzione 9th Street fino all'incrocio A.



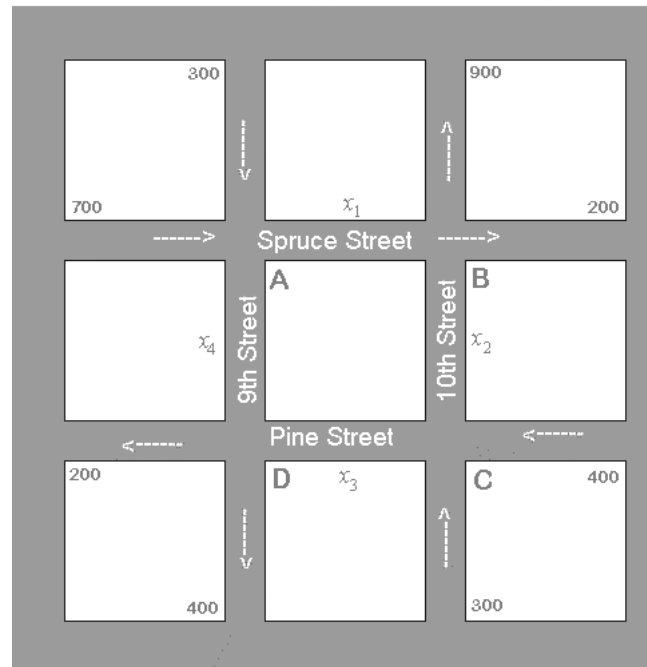
Indicando con:

- x_1 il numero di macchine che lascia l'incrocio A percorrendo Spruce Street verso l'incrocio B ;
- x_2 il numero di macchine che arriva all'incrocio B percorrendo 10th Street dall'incrocio C;
- x_3 il numero di macchine che lascia l'incrocio C percorrendo Pine Street verso l'incrocio D;
- x_4 il numero di macchine che arriva all'incrocio D percorrendo 9th Street dall'incrocio A.



Assumendo che:

1. per velocizzare il flusso del traffico ogni macchina che arriva ad un certo incrocio deve anche lasciarlo;
2. tutte le strade sono a senso unico
3. x_1, x_2, x_3 e x_4 sono numeri positivi



Si ha:

Incrocio A

$$x_1 + x_4 = 700 + 300$$

Incrocio B

$$x_1 + x_2 = 900 + 200$$

Incrocio C

$$x_2 + x_3 = 400 + 300$$

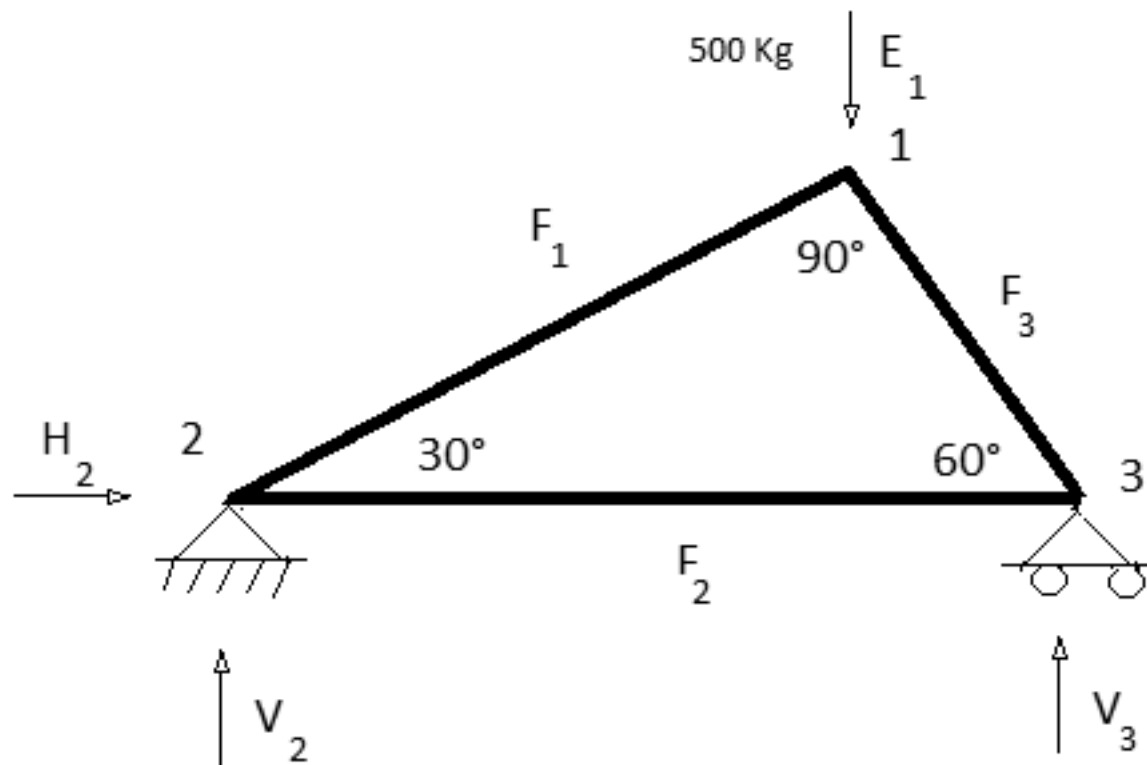
Incrocio D

$$x_3 + x_4 = 400 + 200$$

Cioè è necessario risolvere il seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & & x_4 & = & 1000 \\ x_1 & + & x_2 & & = & 1100 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 700 \\ & & & x_3 & + & x_4 & = & 600 \end{array} \right.$$

Esempio 3: Analisi di strutture



Nel telaio (*struttura statica bidimensionale*) rappresentato in figura, le forze F_i , $i = 1, 2, 3$ rappresentano le tensioni e compressioni che agiscono sulle aste della struttura, H_2 , V_2 , V_3 sono le forze relative all'interazione con il supporto; le forze E_i , $i = 1, 2, 3$ sono le forze esterne applicate ai nodi della struttura. Nell'esempio considerato, E_2, E_3 sono nulle, il nodo 2 è vincolato mentre il nodo 3 può scivolare.

In condizioni statiche, all' equilibrio si ha

$$\begin{cases} -F_1 \cos(30) + F_3 \cos(60) + E_{1,h} = 0 \\ -F_1 \sin(30) - F_3 \sin(60) + E_{1,v} = 0 \\ F_1 \cos(30) + F_2 + H_2 + E_{2,h} = 0 \\ F_1 \sin(30) + V_2 + E_{2,v} = 0 \\ -F_2 - F_3 \cos(60) + E_{3,h} = 0 \\ F_3 \sin(60) + V_3 + E_{3,v} = 0 \end{cases}$$

in cui $E_{1,h} = E_{2,h} = E_{2,v} = E_{3,h} = E_{3,v} = 0$ e $E_{1,v} = -500$.

Si tratta dunque di risolvere un sistema lineare di 6 equazioni nelle incognite

$$F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3,$$

ovvero

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

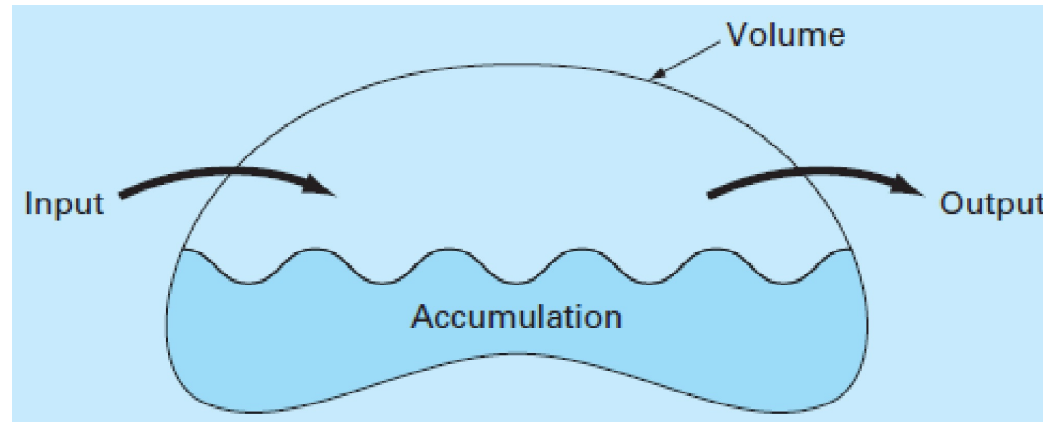
con $\mathbf{X} = [F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3]^T$, $\mathbf{B} = [0, 500, 0, 0, 0, 0]^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\cos(30) & 0 & \cos(60) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(30) & 0 & -\sin(60) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(30) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(30) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos(60) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(60) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\det(\mathbf{A}) = 1$

$\mathbf{A}$ è la *matrice di stiffness* mentre $\mathbf{B}$ rappresenta il *carico delle forze esterne*.

Esempio 4: Chimica e Bio-ingegneria

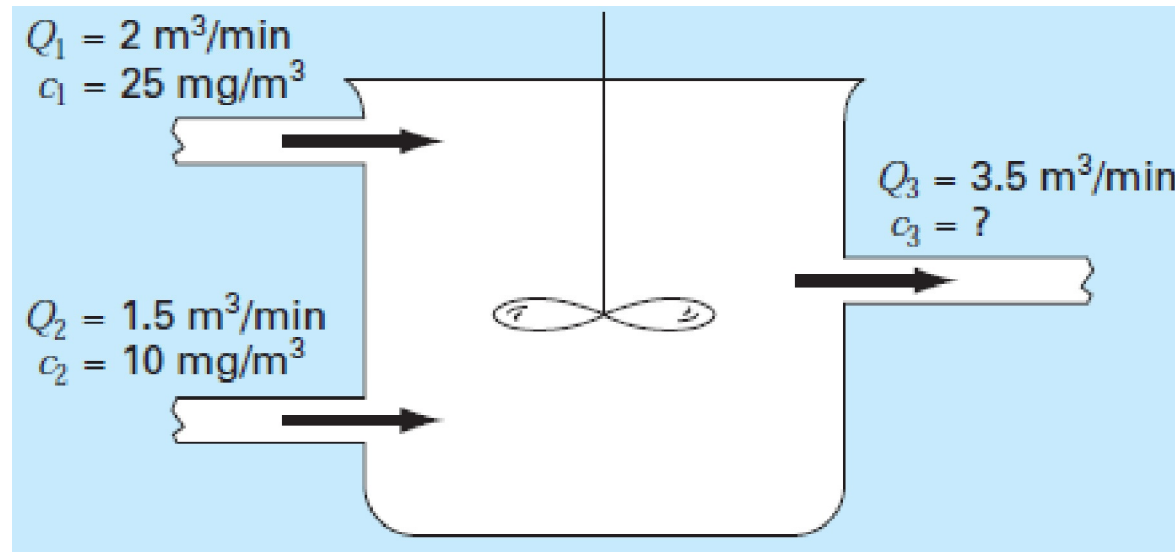


Uno dei principi fondamentali in ingegneria bio-chimica é il **bilanciamento della massa**:

$$\text{Accumulation} = \text{inputs} - \text{outputs}$$

(**inputs = outputs**, allo stato di equilibrio)

Caso di un singolo reattore

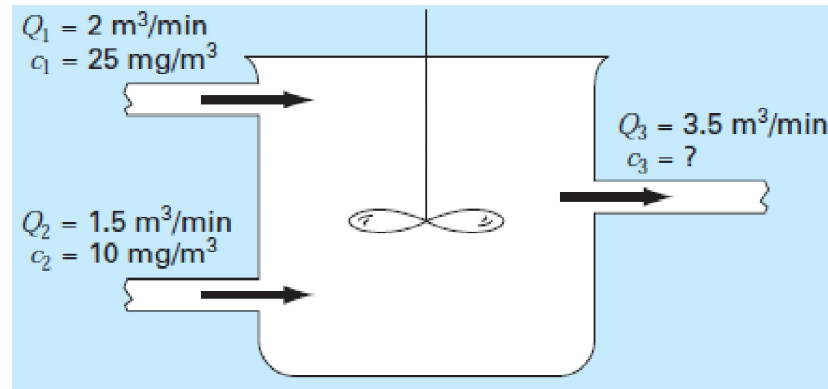


Ipotesi: Stato di equilibrio,

sostanza conservativa (non cresce o decresce durante la reazione chimica),

reattore ben miscelato (ipotesi importante nella progettazione in ambito chimico e petrolifero)

Q é il **flusso** (m^3/min) c é la **concentrazione** (mg/m^3)



Nel condotto 1: $Q_1 = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ e $c_1 = 25 \text{ mg/m}^3$

e quindi il flusso di massa :

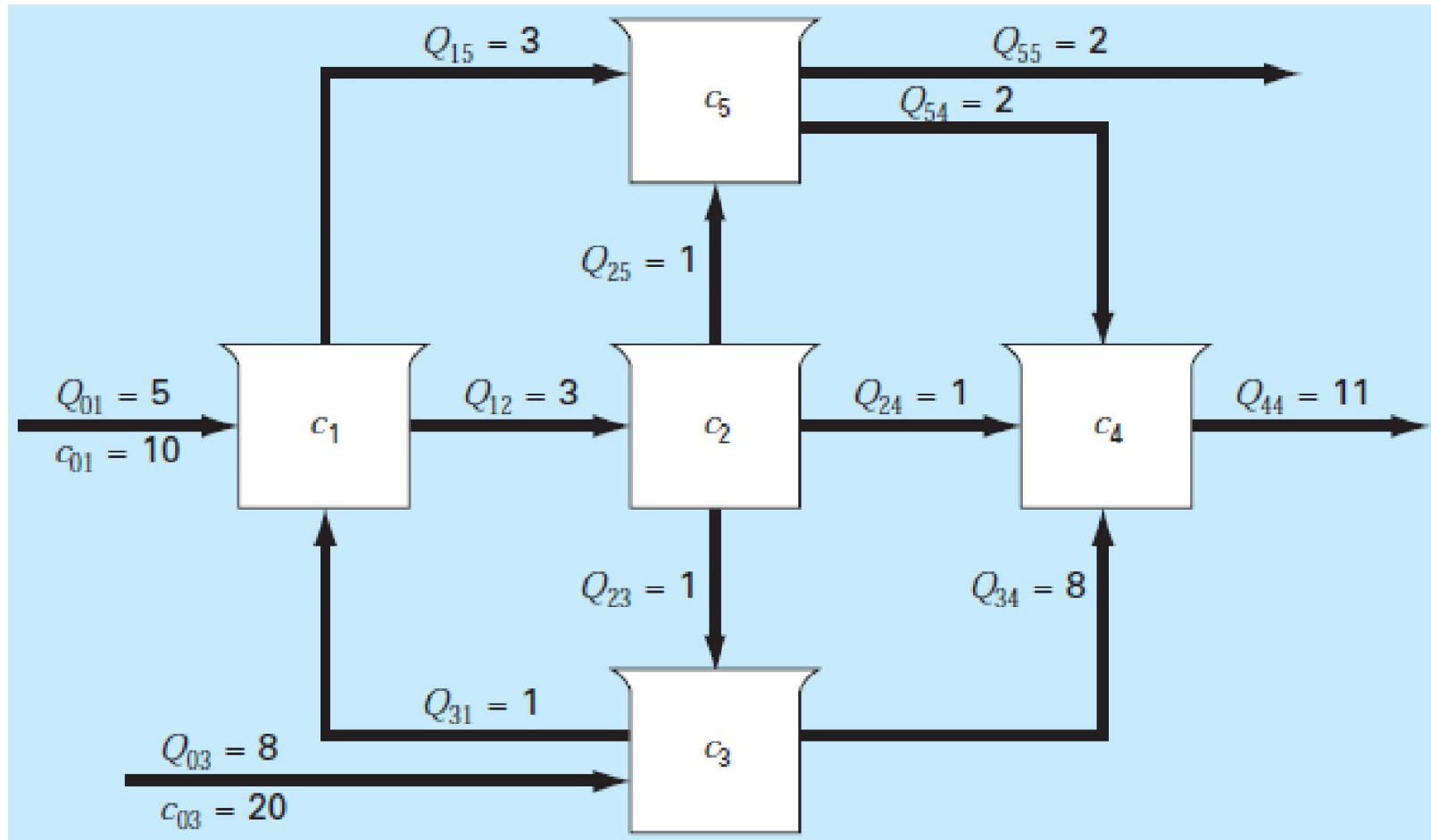
$$Q_1 c_1 = (2 \text{ m}^3/\text{min})(25 \text{ mg/m}^3) = 50 \text{ mg/min}.$$

Nel condotto 2: $Q_2 c_2 = (1.5 \text{ m}^3/\text{min})(10 \text{ mg/m}^3) = 15 \text{ mg/min}$

Sapendo che:

$$Q_1 c_1 + Q_2 c_2 = Q_3 c_3 \Rightarrow 50 + 15 = 3.5 c_3 \Rightarrow c_3 = 18.6 \text{ mg/m}^3.$$

Caso di reattori accoppiati



Reattore 1 Input: $5(10) + Q_{31}c_3$ Output: $Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$

$$5(10) + Q_{31}c_3 = Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

$$6c_1 - c_3 = 50$$

Facendo lo stesso per gli altri, si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 6c_1 - c_3 = 50 \\ -3c_1 + 3c_2 = 0 \\ -c_2 + 9c_3 = 160 \\ -c_2 - 8c_3 + 11c_4 - 2c_5 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + 4c_5 = 0 \end{cases}$$

Per la soluzione si può (si deve, nel caso di molte equazioni) usare **un metodo numerico**.

(**Soluzione:** $C^T = \{11.51 \quad 11.51 \quad 19.06 \quad 17.00 \quad 11.51\}$)

Metodi diretti per la soluzione di sistemi lineari

Sistema lineare: $AX = B$

A = matrice dei coefficienti X = vettore delle incognite

B = vettore dei termini noti

- I **metodi diretti** sono basati sulla **trasformazione** del sistema di partenza in uno **equivalente** che abbia una struttura particolarmente **semplice**, per cui è facile calcolarne la soluzione.
- La **soluzione numerica** viene calcolata in un **numero finito** di passi e, se non vi fossero errori di arrotondamento nei dati o durante i calcoli, la soluzione numerica sarebbe **esatta**.
- Data l'**occupazione di memoria** (RAM) richiesta nei passaggi dell'algoritmo, vengono utilizzati quando la **matrice dei coefficienti ha dimensione non "troppo" elevata**.

Costo computazionale di un algoritmo

Prima di implementare un algoritmo bisogna stimare il suo **costo computazionale**, cioè il numero di **operazioni pesanti** (moltiplicazioni o divisioni) necessarie per calcolare **numericamente** la soluzione.

Costo computazionale:

$C_c \approx$ numero di moltiplicazioni o divisioni

Metodo di Cramer

Dall'**Algebra** sappiamo che la soluzione **esatta** di un sistema lineare si può ottenere con il **metodo di Cramer**.

Se A è **regolare**, attraverso l'**inversa**, si ha:

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{D_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove D_i è il **determinante** della matrice ottenuta da A sostituendo alla colonna i -esima il vettore B .

Esempio: Calcolare la soluzione del sistema $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27 \neq 0$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 24 - 30 - 48 = -54 \quad x_1 = \frac{D_1}{\det(A)} = \frac{-54}{27} = -2$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 42 + 24 - 12 = 54 \quad x_2 = \frac{D_2}{\det(A)} = \frac{54}{27} = 2$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 10 + 32 - 35 - 16 = -9 \quad x_3 = \frac{D_3}{\det(A)} = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{e quindi } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Costo computazionale del metodo di Cramer

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $n + 1$ **determinanti** (D_i , $i = 1, \dots, n$ e $\det A$)
- $n!$ **prodotti** per ciascun determinante
- $n - 1$ **moltiplicazioni** per ciascun prodotto
- $+ n$ **divisioni** (trascurabili)

Costo computazionale: $C_c = (n + 1)n!(n - 1) + n \simeq (n + 1)n!(n - 1)$

$n = 15 \rightarrow C_c \simeq 3 \cdot 10^{14}$ moltiplicazioni $\rightarrow 3$ giorni
 $n = 20 \rightarrow C_c \simeq 3 \cdot 10^{21}$ moltiplicazioni $\rightarrow 3 \cdot 10^5$ anni

Inutilizzabile!!

(supponendo 10^{-9} secondi per operazione)

Metodo di eliminazione di Gauss

Il **metodo di eliminazione di Gauss** trasforma, in $n-1$ passi, il sistema lineare

$$AX = B \quad X, B \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

con matrice dei coefficienti A "**piena**", nel sistema **equivalente**

$$UX = \tilde{B} \quad X, \tilde{B} \in \mathbb{R}^n \quad U \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

con matrice dei coefficienti U **triangolare superiore**.

Il metodo utilizza le seguenti **operazioni** "*lecite*":

- **scambio** di 2 equazioni
- **somma** di due equazioni di cui una è **moltiplicata** per una costante

Soluzione di sistemi triangolari

Sistemi triangolari superiori

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccl} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \cdots & + & u_{1k}x_k & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \cdots & + & u_{2k}x_k & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & u_{kk}x_k & + & \cdots & + & u_{kn}x_n & = & b_k \\ & & & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$UX = B \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_k = \left(b_k - \sum_{i=k+1}^n u_{ki}x_i \right) \frac{1}{u_{kk}}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 2, 1 \end{array} \right.$$

(**Algoritmo di sostituzione all'indietro**)

Sistemi triangolari inferiori

$$\begin{cases} l_{11}x_1 = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ l_{k1}x_1 + l_{k2}x_2 + \dots + l_{kk}x_k = b_k \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \dots + l_{nk}x_k + \dots + l_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$



$$LX = B \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \\ x_k = \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}x_i \right) \frac{1}{l_{kk}} \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(**Algoritmo di sostituzione in avanti**)

Nota: Se le matrici U e L sono **regolari**, sicuramente u_{kk} e l_{kk} sono $\neq 0$.

Costo computazionale

Algoritmo di sostituzione

Ad ogni passo ci sono

- $n - k$ **moltiplicazioni**
- 1 **divisione**

$$C_c = \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \simeq \frac{n^2}{2}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Per risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + = 2 \end{cases}$$

si considerano la matrice **A** e il termine noto **b** associati ad esso

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Si moltiplica la prima riga per 4 e si sottrae alla seconda, annullando così il secondo elemento della prima colonna di A .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Si moltiplica la prima riga per 7 e si sottrae alla terza, annullando il terzo elemento della prima colonna di A .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -5 \end{array} \right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Si moltiplica la seconda riga per $6/3$ e si sottrae alla terza, annullando il terzo elemento della seconda colonna di A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

Si ottiene un sistema equivalente a quello dato in cui la matrice dei coefficienti è triangolare superiore

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ -3x_2 - 6x_3 & = & -4 \\ -9x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Il sistema in questa forma diventa di facile soluzione.

Infatti, dal sistema ottenuto:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -4 \\ -9x_3 = 3 \end{cases}$$

partendo dall'ultima equazione, si ha:

$$\begin{aligned} x_3 &= -3/9 = -1/3 \\ x_2 &= (-4 + 6x_3)/(-3) = 2 \\ x_1 &= 1 - 3x_3 - 2x_2 = 1 + 1 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Generalizzando, se la matrice A è tale che (gli **elementi pivot**):

$$a_{ii}^{(i)} \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

I passo : annullare gli elementi della prima colonna di A al di sotto della diagonale principale

I.1 sottrarre alla seconda equazione la prima moltiplicata per $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ (**moltiplicatore**)

I.2 sottrarre alla terza equazione la prima moltiplicata per $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$

⋮

⋮

I.n-1 sottrarre alla $n - \text{esima}$ equazione la prima moltiplicata per $m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con matrice dei coefficienti

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad i = 2, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(1)} = b_i - m_{i1}b_1, \quad i = 2, \dots, n$$

II passo : annullare gli elementi della seconda colonna di $A^{(1)}$ al di sotto della diagonale principale

II.1 sottrarre alla terza equazione la seconda moltiplicata per $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

II.2 sottrarre alla quarta equazione la seconda moltiplicata per $m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

⋮

⋮

II.n-2 sottrarre alla n -esima equazione la seconda moltiplicata per $m_{n2} = \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con

matrice dei coefficienti

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)}, \quad i = 3, \dots, n \quad j = 2, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)}, \quad i = 3, \dots, n$$

:

⋮

n-1 passo : annullare gli elementi della $(n - 1) -esima$ colonna di $A^{(n-2)}$ al di sotto della diagonale principale

II.1 sottrarre alla $n-esima$ equazione la $(n - 1) -esima$ moltiplicata per $m_{n \ n-1} = \frac{a_{n \ n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1 \ n-1}^{(n-2)}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con matrice dei coefficienti

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(n-1)} = a_{ij}^{(n-2)} - m_{i \ n-1} a_{n-1 \ j}^{(n-2)}, \quad i = n \quad j = n - 1, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(n-1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(n-1)} = b_i^{(n-1)} - m_{i \ n-1} b_{n-1}^{(n-1)}, \quad i = n$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Quindi, dopo $n - 1$ passi il sistema $Ax = b$ è stato trasformato nel sistema equivalente $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$, con $A^{(n-1)}$ matrice triangolare superiore

al passo k si definiscono gli elementi

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}, \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = k, k + 1, \dots, n$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik}b_k^{(k-1)}, \quad i = k + 1, \dots, n$$

$$\text{con } m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Costo computazionale

Metodo di eliminazione di Gauss:

- triangolarizzazione $\simeq \frac{n^3}{3}$. Infatti:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}}_{\text{ognipasso}} \underbrace{\sum_{i=k+1}^n}_{\text{righe}} (\underbrace{1}_{\text{div.}} + \underbrace{n-k+2}_{\text{molt.}}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n+3-k) \simeq \frac{n^3}{3}$$

Sono state usate le seguenti identità :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- sostituzione all'indietro $\simeq \frac{n^2}{2}$

$$\Rightarrow C_c \simeq \frac{n^3}{3}$$

Fattorizzazione LU

Il **metodo di eliminazione di Gauss** può essere interpretato come la **fattorizzazione** della matrice di partenza A nel prodotto di due matrici triangolari.

Teorema. Se la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha **determinanti principali di testa** tali che

$$\det A_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

allora

$$A = LU$$

dove $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una **matrice triangolare inferiore** con elementi diagonali pari a 1 e $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una **matrice triangolare superiore**.

Infatti, riprendendo l'esempio precedente in cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Moltiplicare per 4 la prima riga e sottrarla alla seconda e moltiplicare la prima riga per 7 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a sinistra la matrice A per la matrice

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare la seconda riga della matrice ottenuta al passo precedente per 2 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a sinistra la matrice $L_1 A$ per la matrice

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Ma allora la matrice triangolare superiore U ottenuta precedentemente con il metodo di eliminazione di Gauss è tale che

$$L_2 L_1 A = U$$

e quindi

$$A = (L_2 L_1)^{-1} U = L_1^{-1} L_2^{-1} U = LU$$

Si verifica facilmente che $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Struttura delle matrici L e U

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & \vdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Nota 1: Se A non soddisfa le ipotesi $\det A_k \neq 0$, ma è comunque **regolare**, tramite **scambi di righe** può essere riportata ad una matrice che soddisfa le ipotesi e che quindi può essere **fattorizzata**.

Nota 2: il **costo computazionale** della fattorizzazione è lo stesso di

quello dell'eliminazione di Gauss $C_c \simeq \frac{n^3}{3}$.

Applicazioni della fattorizzazione

Soluzione di un sistema lineare

Consideriamo il **sistema lineare** $AX = B$ e supponiamo che la matrice dei coefficienti A possa essere **fattorizzata**.

$$AX = B \xrightarrow{A=LU} L \underbrace{UX}_Y = B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LY = B & \text{sist. triang. inf. sost. in avanti} \\ UX = Y & \text{sistema triang. sup. sost. all'indietro} \end{cases}$$

Una volta **fattorizzata** A , la soluzione del sistema si ottiene risolvendo i due sistemi triangolari con **costo computazionale** $2\frac{n^2}{2}$.

Metodo di eliminazione di Gauss

Casi critici

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

si ottiene (con $m_{21} = -1$ e $m_{31} = -1$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 0 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Scambio di righe

Metodo di eliminazione di Gauss

Casi critici

Nel **metodo di Gauss**, come anche nella **fattorizzazione LU**, si richiedono divisioni per gli elementi della diagonale principale della matrice considerata. Se questi ultimi sono prossimi allo zero, la soluzione può non essere esatta a causa della **cancellazione numerica**.

Esempio: Supponiamo di dover risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} -0.0590x_1 + 0.2372x_2 = -0.3528 \\ 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \end{cases}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss e **4 cifre significative**.

Metodo di eliminazione di Gauss

Il rapporto

$$\frac{0.1080}{-0.0590} \approx -1.830508 \approx -1.831$$

moltiplicando questa quantità con la prima equazione del sistema e sottraendo alla seconda, il secondo elemento della seconda colonna diventa

$$-0.4348 - 0.2372(-1.831) = -0.4348 + 0.4343 = -0.0005$$

Mentre il secondo elemento del termine noto è

$$0.6452 - 0.3528(-1.831) = 0.6452 - 0.6460 = -0.0008$$

Metodo di eliminazione di Gauss

e quindi

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.0590 & 0.2372 & -0.3528 \\ 0 & -0.0005 & -0.0008 \end{array} \right)$$

da cui

$$x_2 = \frac{0.0008}{0.0005} = 1.6$$

$$x_1 = \frac{-0.3528 - 1.6(0.2372)}{-0.0590} = \frac{0.7323}{0.0590} = 12.41$$

Mentre la soluzione esatta è

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 1$$

Metodo di eliminazione di Gauss: pivoting parziale

Non si ha cancellazione numerica se si **scambiano le equazioni del sistema**, cioè

$$\begin{cases} 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \\ -0.0590x_1 + 0.2372x_2 = -0.3528 \end{cases}$$

Eseguendo un passo del metodo di eliminazione di Gauss, il sistema si riduce al sistema equivalente

$$\begin{cases} 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \\ 0x_1 + 0.3296x_2 = 0.3296 \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 1$$

Pivoting parziale

Ad ogni passo k del metodo di eliminazione di Gauss si individua il valore $r \geq k$ per cui risulta

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq s \leq n} |a_{sk}^{(k)}|,$$

dove $a_{ij}^{(k)}$ sono gli elementi della matrice del sistema al passo k ,

e si scambiano le righe r e k

NOTA: Ad ogni passo ci si assicura il pivot più grande.

Condizionamento di un sistema lineare

Il **condizionamento** del problema della soluzione di un sistema lineare è indipendente dal **metodo numerico** scelto per risolverlo.

Il **condizionamento** "*misura*" quanto una **perturbazione** sui dati di input (matrice dei coefficienti e termine noto) influenzi i risultati (la soluzione).

Un **sistema lineare** si dice **ben condizionato** se a **piccole** variazioni sui dati corrispondono **piccole** variazioni sui risultati.

Viceversa, se a **piccole** variazioni sui dati corrispondono **grandi** variazioni sui risultati, si dice che il sistema è **mal condizionato**.

Quando si approssima la soluzione di un sistema lineare **mal condizionato** bisogna **ridurre** il più possibile gli **errori di arrotondamento**.

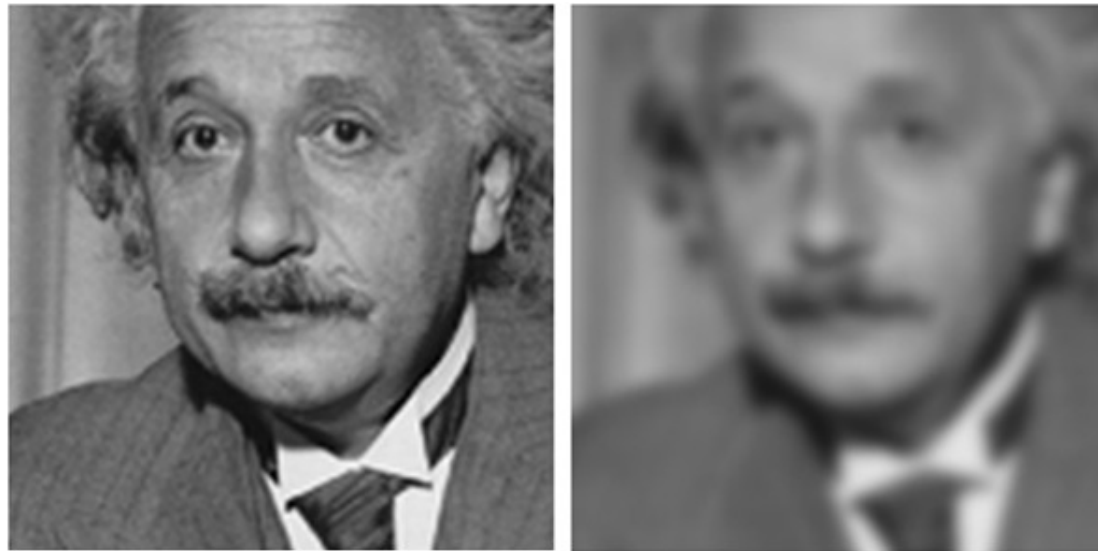
Condizionamento di un sistema lineare: Image deblurring

Un' **immagine digitale** è composta da elementi detti **pixels**. Ad ogni pixel è assegnato un valore di intensità che caratterizza il colore (livello di grigio) in una piccola porzione della scena rappresentata.

Un'immagine digitale a livelli di grigio (8 bits) è quindi una matrice i cui elementi sono numeri appartenenti all' intervallo **[0, 255]**

Piu' volte ci capita di scattare una foto e di non ottenere un' immagine nitida perchè la messa a fuoco non è stata corretta. Si ha così un' **immagine sfocata**. Una situazione molto simile si ha in diverse applicazioni come, per esempio, lo *imaging astronomico* in cui le immagini acquisite mediante telescopio possono essere disturbate dalla turbolenza dell' atmosfera.

L' **immagine sfocata** tipicamente si presenta come mostrato di seguito



Ci chiediamo se si può ricostruire l' immagine originale a partire da quella sfocata (l' unico dato a disposizione)

Nel caso di **blurring lineare**, il problema consiste nel risolvere il sistema

$$AX = B$$

In cui A è l' operatore di blurring (dipendente dalla cosiddetta *point spread function*), X è l'immagine originale e B è l'immagine osservata (sfocata)

Tuttavia, se si risolve il sistema invertendo la matrice A , che si suppone nota, il risultato non è quello aspettato

Jonathan Swift
**Vision is the
art of seeing
what is
invisible to
others.** 

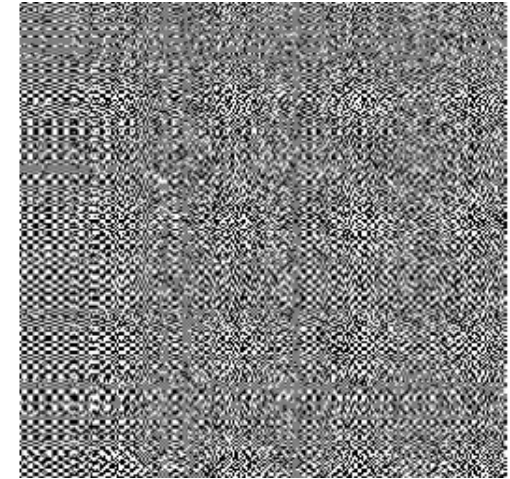


Immagine originale

Immagine sfocata

Immagine ricostruita

Cosa è accaduto???

L'inversione della matrice è molto sensibile agli errori sui dati, anche molto piccoli!

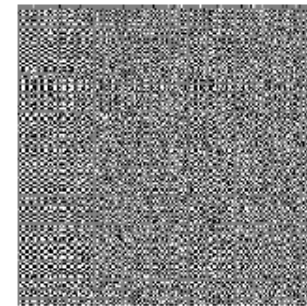
L'immagine B è sempre affetta da errori di arrotondamento che quindi possono propagarsi in maniera disastrosa sulla soluzione del sistema. In altre parole, invece di risolvere il sistema

$$AX = B$$

si risolve il sistema

$$AX = B + Err$$

e quindi nella soluzione $X = A^{-1}(B + Err) =$



il **rumore/errore** Err è molto amplificato!

Il problema si dice **mal condizionato**.

Errore sul termine noto

Supponiamo che il termine noto B sia affetto da un **errore** δB .

$$A X = B \xrightarrow{\delta B} A(X + \delta X) = B + \delta B$$

Per sottrazione si ricava

$$A \delta X = \delta B \rightarrow \boxed{\delta X = A^{-1} \delta B}$$

Per "*misurare*" la perturbazione δX indotta su X si ricorre alla norma.

$$\|\delta X\| = \|A^{-1} \delta B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta B\|$$

$$\|B\| = \|A X\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Dividendo termine a termine si trova una maggiorazione per l'**errore relativo** $\|\delta X\|/\|X\|$.

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} = K(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

Numero di condizionamento

$K(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$: **numero di condizionamento** della matrice A

$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq K(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$ Rappresenta il **coefficiente di amplificazione** dell'errore relativo sui dati

Si può dimostrare che

$$1 \leq K(A) \leq +\infty$$

Condizionamento **ottimo**
(matrici ortogonali)

Condizionamento **peggiore**
(matrici singolari)

Oss: $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = K(A)$

Esempi di matrici malcondizionate: matrici di Hilbert

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix} \quad n=2 \quad K(H) = \frac{3}{2}18 = 27$$

Errore sulla matrice dei coefficienti

Se anche la matrice A è affetta da un **errore** δA si ha

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \underbrace{\frac{K(A)}{1 - K(A)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}_{\downarrow} \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Coefficiente di amplificazione

dim. 0

Condizionamento in norma 2

Se A è (simmetrica) **definita positiva** si ha:

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

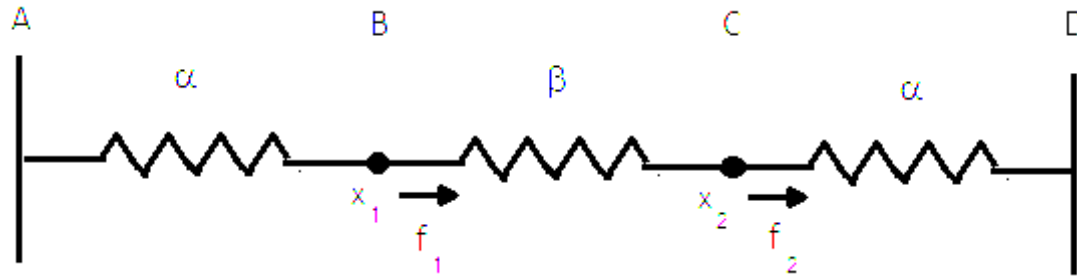
Infatti:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A) = \lambda_{max}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

Esempio

Equilibrio delle forze elastiche



Nel sistema in figura f_1 , f_2 rappresentano le forze di stress applicate in B e C, mentre x_1 , x_2 sono gli spostamenti prodotti dalle due forze. Supponendo che le forze elastiche di reazione delle molle siano lineari (legge di Hooke) e indicando con α e β i coefficienti di stiffness (costanti elastiche), il sistema è in equilibrio se

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)x_1 - \beta x_2 = f_1 \\ -\beta x_1 + (\alpha + \beta)x_2 = f_2 \end{cases}$$

Si tratta, dunque, di risolvere il sistema lineare rispetto al vettore delle incognite $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T$ avente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\beta \\ -\beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

come matrice dei coefficienti e $\mathbf{B} = [f_1, f_2]^T$ come vettore dei termini noti.

Studiamo il condizionamento del sistema lineare rispetto alla norma 1 in dipendenza delle costanti elastiche α e β (equivalente a studiare il condizionamento rispetto alla norma infinito poichè $\mathbf{A}$ è simmetrica).

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha + 2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

quindi, poichè $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$K_1(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = (\alpha + 2\beta) \frac{1}{\alpha} = 1 + 2\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ne segue che il problema non risulta ben condizionato per tutti i valori delle costanti elastiche: se la molla centrale è molto più rigida delle molle adiacenti, ovvero $\beta \gg \alpha$, il sistema risulta mal condizionato.

DIGRESSIONE IN MATLAB

Calcolo simbolico dell'inversa:

```
>> syms a b c d
```

```
>> A = [a b; c d]
```

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

```
>> B = inv(A)
```

$$B =$$
$$\begin{bmatrix} d/(a*d-b*c) & -b/(a*d-b*c) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -c/(a*d-b*c) & a/(a*d-b*c) \end{bmatrix}$$

NOTA: Si provi l'istruzione `det`.

Per esempio, se $\alpha = 1$, $\beta = 1000$ e $f_1 = f_2 = 1$, allora $K_1(\mathbf{A}) = 2001$ mentre $\mathbf{X} = [1, 1]$. Se si perturba la matrice $\mathbf{A}$ come segue

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1002 & -1000 \\ -1000 & 1002 \end{pmatrix}$$

mentre si lascia inalterato il vettore dei termini noti, si ha

$$\frac{\|\delta \mathbf{A}\|_1}{\|\mathbf{A}\|_1} = \frac{1}{2001} \approx 0.0005$$

e $\tilde{\mathbf{X}} = [.5, .5]$; quindi

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|_1}{\|\mathbf{X}\|_1} \approx \frac{1}{2} = 0.5.$$

Esercizio: Studiare il condizionamento del sistema associato all'equilibrio delle forze elastiche nella struttura in figura quando le tre molle hanno tre diversi coefficienti di stiffness.

Esercizio 1

Determinare il numero di condizionamento, rispetto alla norma infinito, della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \delta \\ 1 - \delta & 1 \end{pmatrix}$$

con $\delta > 0$.

Posto $\delta = 0.01$, sia A la matrice dei coefficienti del sistema $AX = B$, con $B = (2.01, 1.99)^T$ e si consideri il sistema perturbato $A\bar{X} = \bar{B}$, con $\bar{B} = (2, 2)^T$. Dare una stima dell'errore relativo commesso sulla soluzione X .

Soluzione Si verifica facilmente che $A^{-1} = \frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} 1 & -1-\delta \\ -1+\delta & 1 \end{pmatrix}$

e quindi $K_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2+\delta) \frac{2+\delta}{\delta^2} = \frac{(2+\delta)^2}{\delta^2}$

Si osserva che

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} K_{\infty}(A) = 1$$

mentre

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} K_{\infty}(A) = +\infty;$$

cioè per valori di δ molto piccoli, la matrice risulta malcondizionata.

Per esempio, se $\delta = 0.01$, $K_{\infty}(A) = (201^2) = 40401$, mentre se $\delta = 100$, $K_{\infty}(A) = \frac{10404}{10000} = 1.0404$.

$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq K_\infty(A) \frac{\|\delta B\|_\infty}{\|B\|_\infty}$$

e, quindi, posto $\delta = 0.01$ si ha

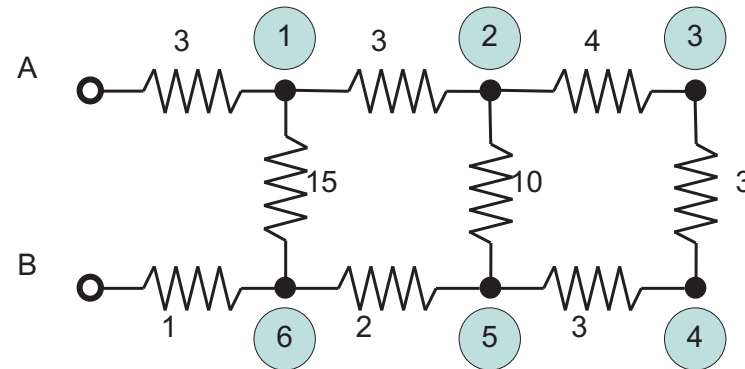
$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq 40401 \frac{\|B - \bar{B}\|_\infty}{2.01} = 40401 \frac{0.01}{2.01} = 201$$

Si verifica facilmente che la soluzione del sistema $AX = B$ è $X = (1, 1)^T$, da cui $\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq 201$

mentre $\bar{X} = (-200, 200)^T$, da cui $\|\delta X\|_\infty = 201$.

F I N E

Soluzione:



Es. per il primo nodo:

$$I_{A1} + I_{21} + I_{61} = \frac{100-v_1}{3} + \frac{v_2-v_1}{3} + \frac{v_6-v_1}{15} = 0$$

che porta a

$$11v_1 - 5v_2 - v_6 = 500$$



Calcolo dell'inversa di A

$$X = A^{-1}B$$

Si tratta di trovare la matrice M tale che

$$AM = I$$

con I la matrice identità .

Corrisponde alla soluzione di *n sistemi lineari* ognuno dei quali ha A come matrice dei coefficienti, una colonna di I come vettore dei termini noti e una colonna di M come incognita.

Per esempio, se $n = 3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dettagli sul Calcolo dell'Inversa di una matrice A

Metodo di Gauss-Jordan

- 1) Affiancare alla matrice A la matrice identità I : $A|I$
- 2) Rendere la matrice triangolare superiore mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss
- 3) Annullare gli elementi sopra i pivot, partendo dall'ultima riga (sempre con Gauss)
- 4) Rendere uguali a 1 tutti i pivot della matrice, moltiplicando per degli scalari
- 5) Si ottiene $Id_n|E$: E é l'inversa di A

Esempio

Partendo da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 0:

Si calcola il determinante: $-20 \neq 0 \Rightarrow$ la matrice é invertibile.

Passo 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Passo 2:

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per rendere A diagonale superiore (Attenzione: eseguendo le stesse operazioni sulla matrice estesa, comprensive di I), ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 & -2 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

con pivot $a_{11} = 2, a_{22} = 3, a_{33} = -10/3$.

Passo 3:

Usiamo lo stesso algoritmo per annullare i termini sopra i pivot, partendo dall'ultima riga, cioè prima a_{23} , poi a_{13} e, infine, a_{12} ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2/5 & -1/10 & 7/10 \\ 0 & 3 & 0 & 3/5 & 9/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & -10/3 & -2 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

Passo 4:

Moltiplichiamo ogni riga in modo da rendere i pivot pari a 1 (prima riga per $1/2$, seconda per $1/3$, la terza per $-3/10$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & -1/20 & 7/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/10 & -3/10 \end{array} \right)$$

L'inversa sarà quindi:

$$\left(\begin{array}{ccc} -1/5 & -1/20 & 7/10 \\ 1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 3/5 & -1/10 & -3/10 \end{array} \right)$$

Richiami sul determinante di una matrice

- Se A è una matrice di dimensione 1×1 con $a_{11} = a$, $\det(A) = a$

- Se A è una matrice di dimensione $n \times n$, allora

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

oppure $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$

con M_{ij} il determinante della matrice A di cui si trascurano la i -esima riga e la j -esima colonna

- Se A è una matrice quadrata di dimensione n :
 1. Se una riga o una colonna di A ha tutti gli elementi nulli, allora $\det(A) = 0$

2. Se A ha due righe o due colonne con gli stessi elementi, allora $\det(A) = 0$
3. Se $\tilde{A}$ è ottenuta scambiando due delle righe di A allora $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$
4. Se $\tilde{A}$ è ottenuta moltiplicando una riga di A per lo scalare λ , allora $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$
5. Se $\tilde{A}$ è ottenuta sommando ad una riga di A un'altra riga moltiplicata per lo scalare λ , allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$
6. Se B è una matrice quadrata di ordine n , allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
7. $\det(A^T) = \det(A)$
8. Se esiste A^{-1} , allora $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
9. Se A è una matrice triangolare superiore (o inferiore), allora $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

DIMOSTRAZIONE

dim: In questo caso si risolve il sistema lineare

$$(A + \delta A)(X + \delta X) = B + \delta B \quad \text{invece di} \quad AX = B$$

Sottraendo membro a membro le due identità si ha

$$(A + \delta A)(\delta X) = \delta B - \delta AX$$

da cui

$$\|\delta X\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \|\delta B - \delta AX\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| (\|\delta B\| + \|\delta A\| \|X\|),$$

Dividendo per $\|X\|$ ambo i membri

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \left(\frac{\|\delta B\|}{\|X\|} \frac{\|B\|}{\|B\|} + \|\delta A\| \right),$$

Osservando che $\frac{\|B\|}{\|X\|} = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \|A\|$, la disequazione precedente si riscrive come segue

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \|A\| \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right), \quad (*)$$

D'altra parte $(A + \delta A)^{-1} = (A(I + A^{-1}\delta A))^{-1} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$.

Inoltre, se $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, risulta

$$(A + \delta A)^{-1} = \left(I + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}\delta A)^k \right) A^{-1}$$

da cui

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|A^{-1}\delta A\|^k \right)$$

e considerando la somma della serie geometrica

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \left(1 + \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \right) \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\| \left(1 + \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \right) = \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} = \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Sostituendo l'ultima disuguaglianza in (*) si ha

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \|A\| \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right) = \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Oss: Se $\|\delta A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, allora $\frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \leq 2K(A)$