Modulo di **LABORATORIO** del corso di **FISICA DELLE RADIAZIONI APPLICATA ALLA MEDICINA**

FORMARE **GRUPPI** DA TRE

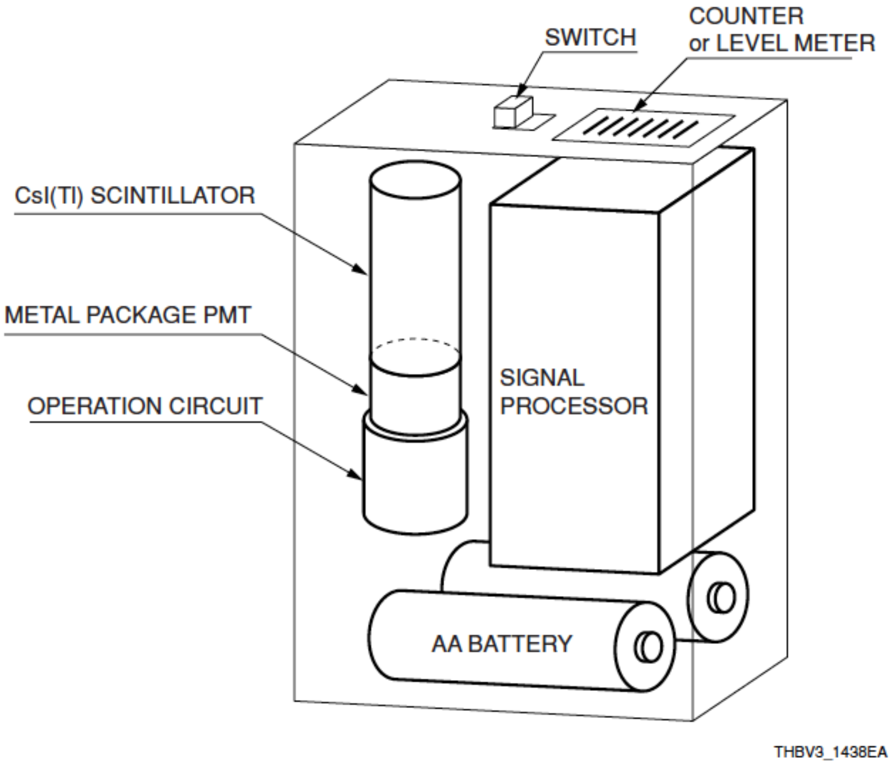
5 ESPERIENZE DI LABORATORIO DI MERCOLEDI’ **OBBLIGATORIE**

QUADERNO (logbook)

RETRO QUADERNO

ESAME

ESEMPIO



DOSIMETRO

Foto estratta dalle note applicative, capitolo 14

http://www.**hamamatsu.com/resources/pdf/etd/PMT_handbook_v3aE.pdf**

Quanti raggi cosmici attraversano nell'arco di un'ora l'elemento sensibile (scintillatore) di un dosimetro?

Lo strumento viene attivato e dopo un minuto segnala che è stato attraversato da 6 raggi cosmici. Cioè una frequenza di 6 eventi/60 secondi → f = 0,1 hertz

Quindi i conteggi attesi in un'ora saranno: 3600 s x 0,1 Hz = 360 conteggi.

Ma il passaggio nel sensore di un raggio cosmico non è correlato con quello di un altro raggio proveniente da un altro punto dello spazio: il fenomeno non è periodico con periodo T = 1/f = 10 s.

Se analizzassimo un altro intervallo di un minuto potremmo ottenere ancora 6 conteggi ma anche 5 o 7 o…:
non si è in grado di prevedere con certezza cosa succederebbe ma ci aspettiamo un risultato non molto diverso da 6.

MISURA <-> STATISTICA (DATO CERTO)
PREVISIONE <-> INFERENZA STATISTICA (PROBABILITA')

1) si assume che esista una ben determinata legge probabilistica (distribuzione di probabilità) in base alla quale il numero di raggi cosmici in un minuto (variabile aleatoria k) assume dei valori (4,5,6,7...) il cui valor medio è m = 6

2) si prevede che in un intervallo di un'ora il numero di conteggi sia 360 perché il valor medio 6 non varia (anche se k fluttua intorno a m)

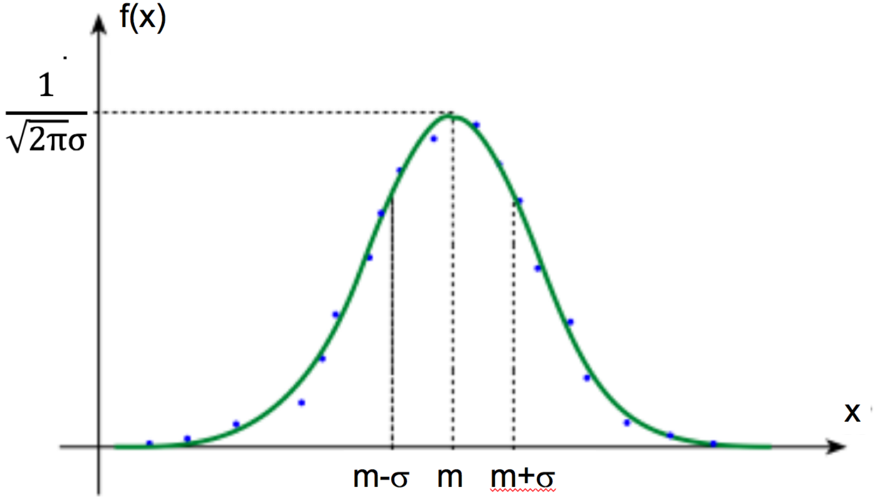
3) meglio si determina m e maggiore è il livello di confidenza nella previsione

Il problema di base in ogni misurazione consiste nel determinare quale sia la legge probabilistica in base alla quale vengono generate le misure ottenute.

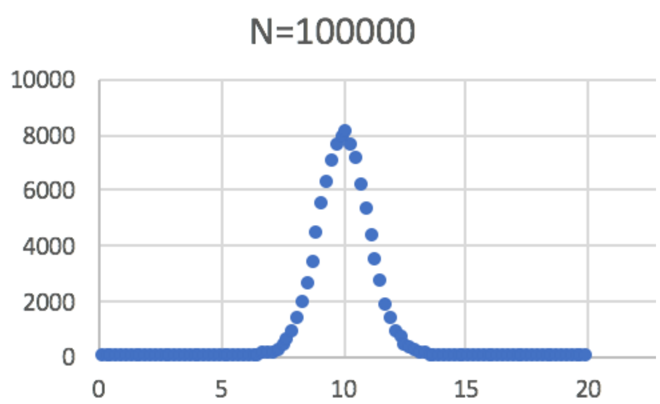
Con quanto dettaglio serve conoscere la legge probabilistica relativa al fenomeno in esame?
Ottenere le informazioni necessarie implica una campagna di misure tanto più vasta (e costosa) quanto meglio si vogliono conoscerne i particolari

Come esempio consideriamo il caso frequentissimo di una misura x in cui le fluttuazioni seguono l'andamento della curva di Gauss:
(la studieremo più avanti)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

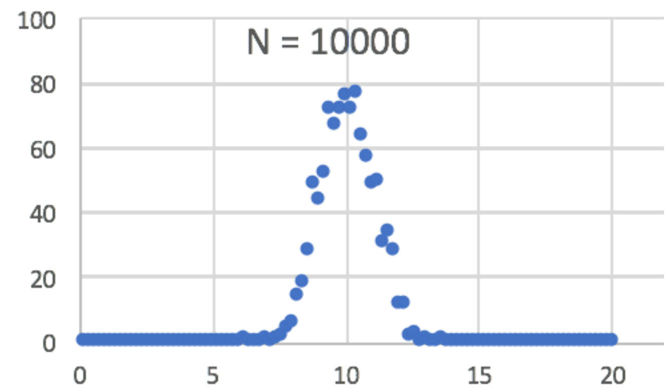


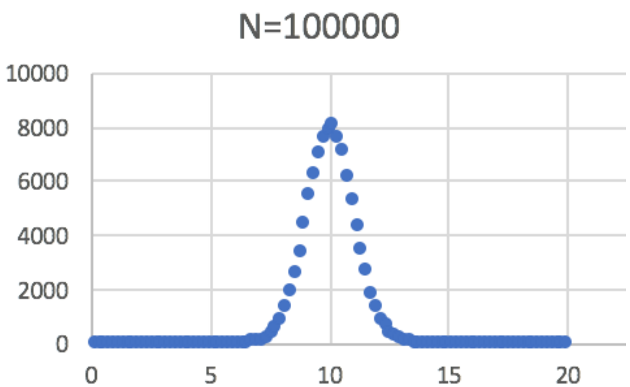
Per ottenere la linea continua occorre ripetere infinite volte la misura (i puntini)

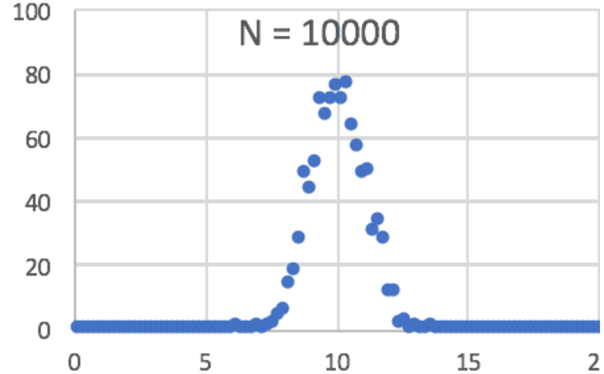


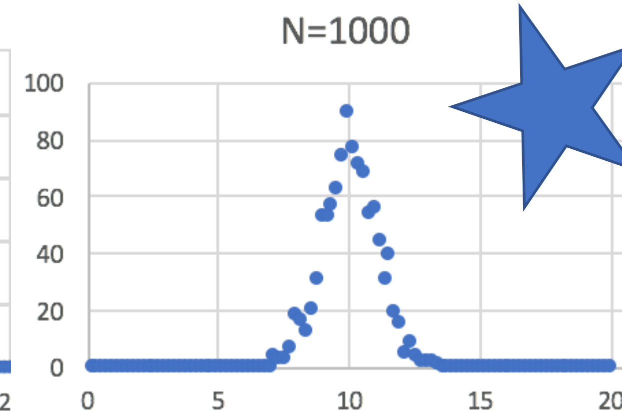
ma questo ha un costo ...

se si riduce il numero di misure...



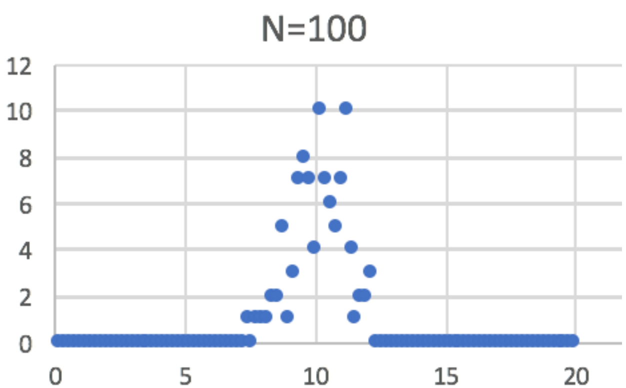


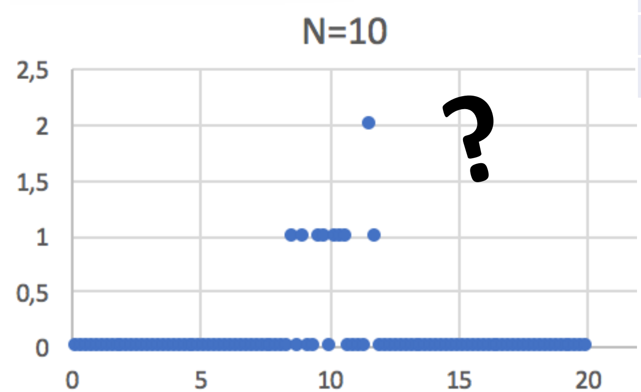




continuando a ridurre il numero di misure...

N=100000	10,0	1,0
N=10000	10,0	1,0
N=1000	10,0	1,0
N=100	9,9	1,2
N=10	10,2	1,1





quante misure servono per ricavare un andamento che permetta di fare previsioni affidabili?

è sufficiente conoscere un valore centrale (la media) e un valore legato alla dispersione dei valori intorno alla media (la varianza).

Procediamo per gradi: **COS'È LA PROBABILITÀ?**

definizione di probabilità: **grado di fiducia nel verificarsi di un evento**

- **quello strumento si guasterà entro fine anno?**
- **per quando devo programmarne la manutenzione?**
- **quanti pezzi di ricambio devo avere di scorta?**
- **quel nucleo radioattivo decadrà?**
- **quando sarò attraversato dal prossimo raggio cosmico?**

Dato un evento assegniamo una probabilità p alla possibilità che si verifichi.

Come determiniamo p?

Sono state sviluppate diverse teorie che, ovviamente, portano alla stesa determinazione

<u>definizione classica di probabilità</u> (Laplace)

Nel caso di eventi elementari *equiprobabili* la probabilità di un evento è pari al <u>rapporto</u> fra il numero di <u>casi favorevoli</u> al verificarsi dell'evento e il numero totale di <u>casi possibili</u>:

$$P = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}}$$

è evidente come sia $0 \leq P \leq 1$ (P=1 corrisponde alla certezza)

ESEMPI: consideriamo il lancio di un dado e chiediamoci

* qual è la probabilità di ottenere un numero pari?
  Sono 3 casi favorevoli (2, 4, 6) su 6 possibili; la probabilità dell'evento è 3/6 = 0,5 = 50%

* qual è la probabilità di ottenere un numero pari minore di 5?
  Sono 2 casi favorevoli (2, 4) su 6 possibili; la probabilità dell'evento è 2/6 = 0,22 = 33%

* qual è la probabilità di ottenere un numero qualsiasi? EVENTO CERTO
  Sono 6 casi favorevoli (tutti) su 6 possibili; la probabilità dell'evento è 6/6 = 1 = 100%

* qual è la probabilità di ottenere un numero maggiore di 6? EVENTO IMPOSSIBILE
  Sono 0 casi favorevoli (nessuno) su 6 possibili; la probabilità dell'evento è 0/6 = 0 = 0%

teoria assiomatica: (Kolmogorov)

la probabilità p è un numero non negativo tale che:

- p = 1 corrisponde all’evento certo

- dati due eventi tali che il verificarsi dell’uno escluda la possibilità di verificarsi dell’altro (eventi incompatibili o **mutamente esclusivi**) allora

  la probabilità che si verifichino o A o B è

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

- dati due eventi tali che il verificarsi dell’uno non alteri la probabilità di verificarsi dell’altro (eventi statisticamente **indipendenti**) allora

  la probabilità che si verifichino congiuntamente A e B è

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$

Esempio:

calcolare la probabilità che nel lancio di un dado si ottenga un 1

Poiché tale evento è incompatibile con gli altri 5 casi (2, 3 4, 5, 6) risulta

$$P(1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ o } 4 \text{ o } 5 \text{ o } 6) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

e dato che all'insieme completo corrisponde la certezza:

$$P(1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ o } 4 \text{ o } 5 \text{ o } 6) = 1 \quad \leftarrow \quad \text{PROPRIETA' DI CHIUSURA}$$

Se le singole P sono uguali (equiprobabilità) si ottiene

$$6\,P = 1 \quad \text{da cui} \quad P = 1/6.$$

- Attenzione alla definizione di eventi incompatibili e indipendenti:

- i possibili risultati di un lancio di un dado sono eventi incompatibili;

- il risultato di un lancio e il successivo sono indipendenti;

- in un dado l'uscita di un numero pari e del 3 sono eventi incompatibili;

- l'uscita di un numero pari e del numero 2 non è rappresentata né da eventi indipendenti né da eventi esclusivi (pari non esclude 2; 2 è certamente pari)

Definizione frequentista (o frequentistica):

Un metodo diverso per determinare la probabilità di realizzarsi di un evento consiste:

Attenzione al diverso significato di frequenza!!!

nell'osservare il fenomeno N volte,

contare quante volte k (frequenza) si verifica l'evento

calcolare il rapporto k/N (frequenza relativa).

- k/N è compresa fra 0 (l'evento non si verifica mai) e 1 (sempre).

Esempio: analizziamo la relazione fra p e k/N utilizzando come esempio il lancio di una moneta non truccata per cui ci aspettiamo che la probabilità che esca testa (T) sia p = 0,5 = 50%.

Studiamo quindi la frequenza relativa k = n(T)/[n(T)+n(C)]

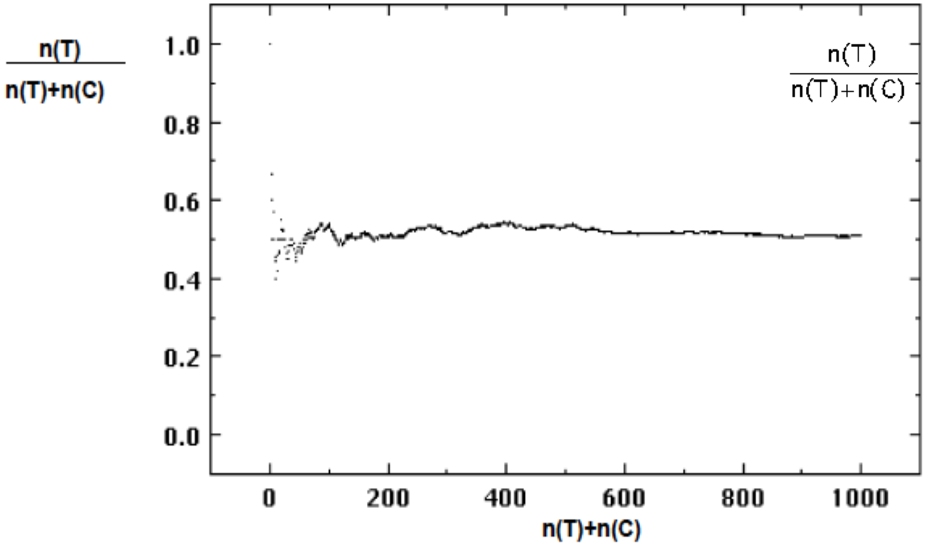
in funzione

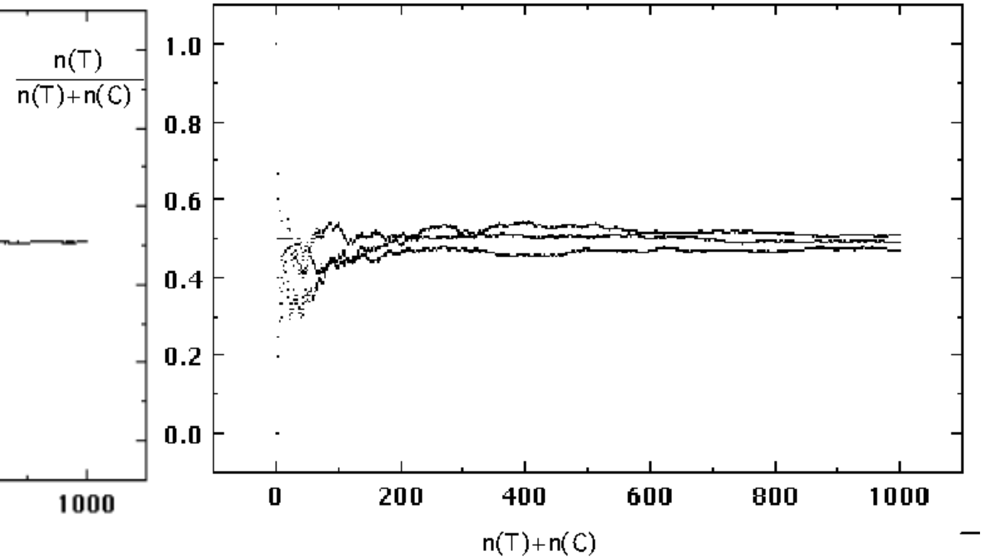
del numero totale di lanci N = n(T)+n(C)

Cosa succede al crescere del numero N di lanci?
Per esempio: la sequenza TTCTCTCCT produce le frequenze relative:

N=n(T)+n(C)		k=n(T)	k/N	k/N
1	T	1	1/1	1,00
2	T	2	2/2	1,00
3	C	2	2/3	0,67
4	T	3	3/4	0,75
5	C	3	3/5	0,60
6	T	4	4/6	0,66
7	C	4	4/7	0,57
8	C	4	4/8	0,50
9	T	5	5/9	0,56

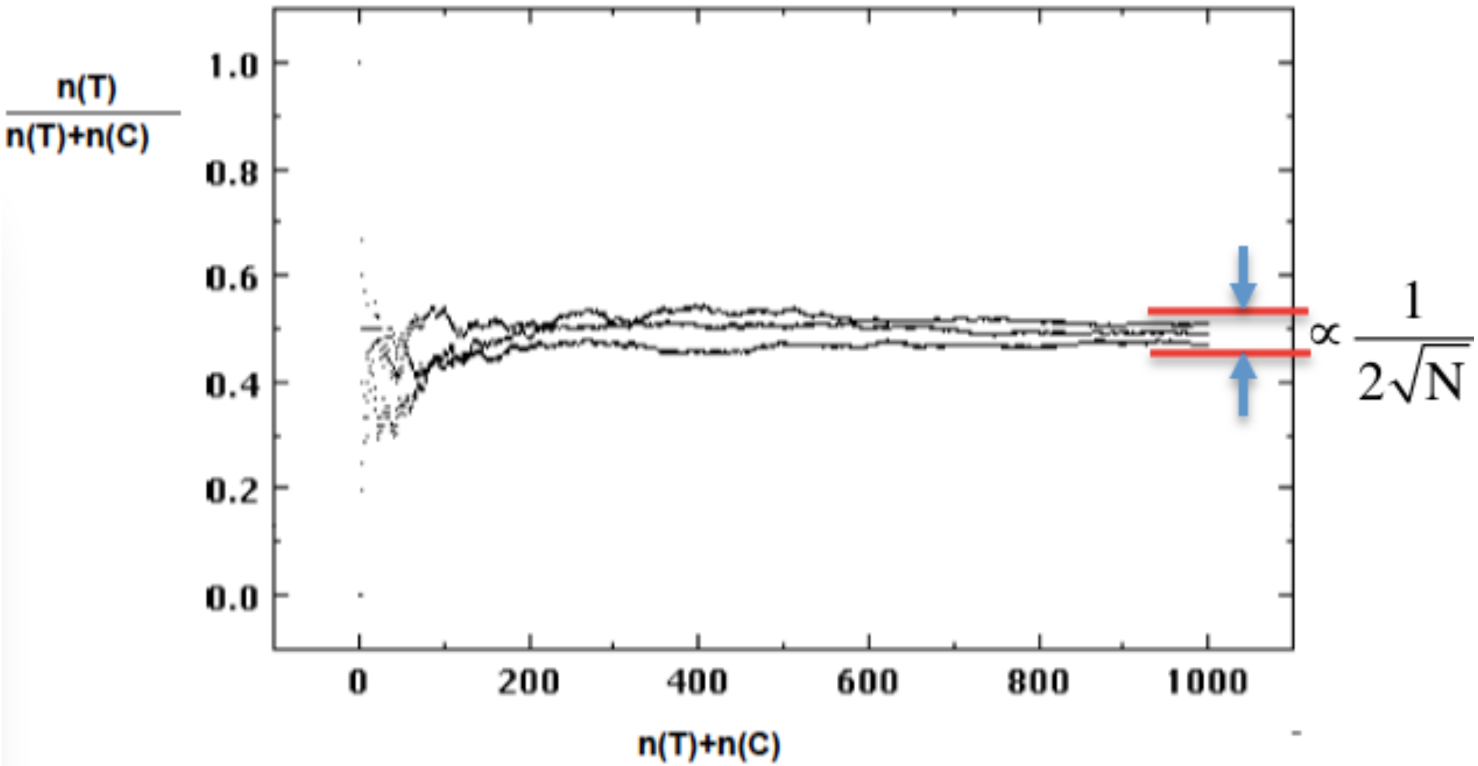
Al crescere di N la frequenza relativa tende a 0,5 ma non in modo monotono.





Le variazioni casuali intorno a 0,5 vengono dette **fluttuazioni statistiche**

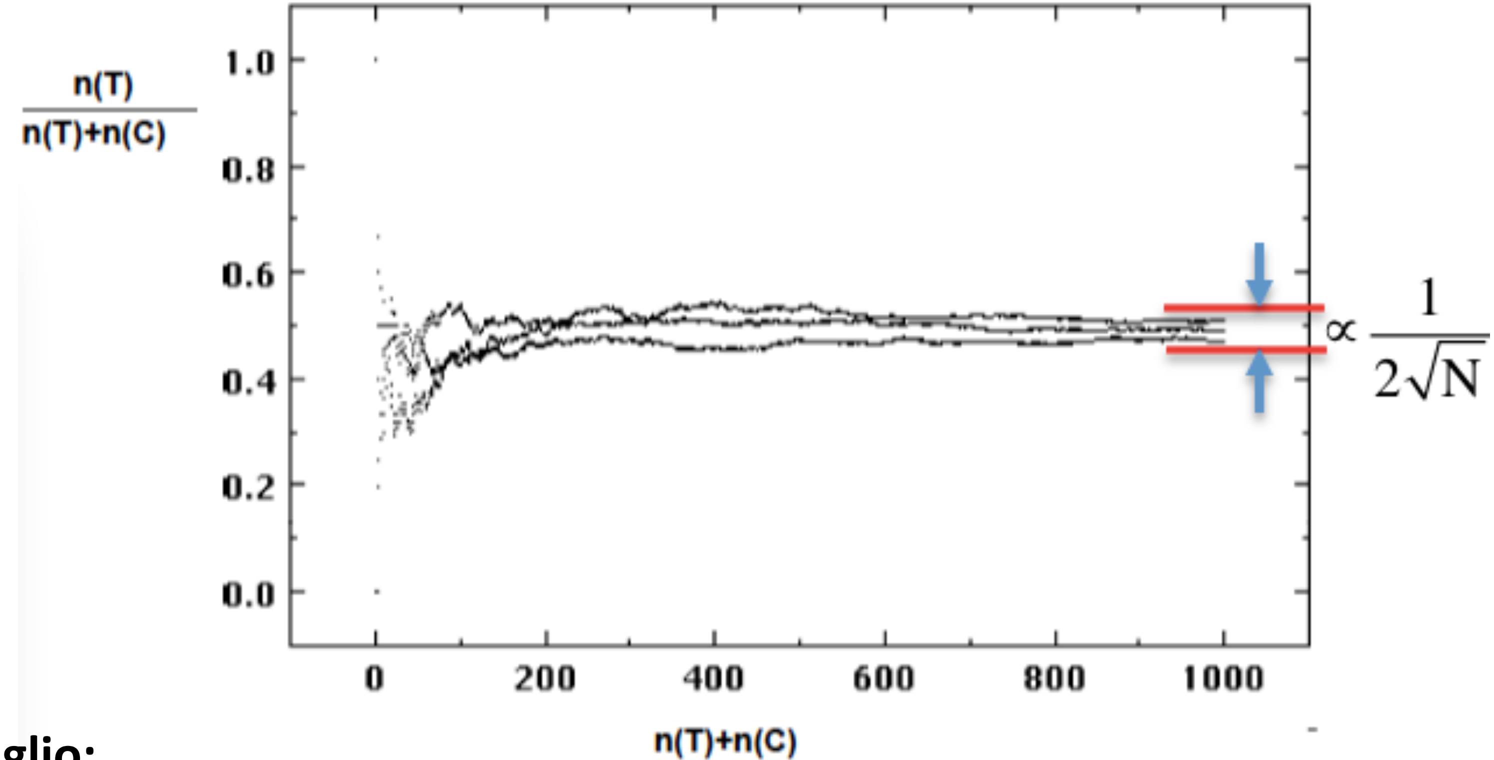
Se l'osservazione venisse ripetuta altre volte, si avrebbero andamenti simili ma non identici



Al crescere di N l'ampiezza delle fluttuazioni si riduce e la frequenza relativa tende a p:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{k}{N} = p \xrightarrow{N \text{ "grande"}} \frac{k}{N} \approx p$$

Questa relazione (legge forte dei grandi numeri) sottintende che le prove siano **indipendenti, cioè che l'esito di una prova non influenzi l'esito delle prove successive**



O meglio:

al crescere di N l’ampiezza delle fluttuazioni si riduce e la frequenza relativa tende a:

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\left|p - \frac{k}{N}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

il caso non ha memoria – da ricordare se al gioco del Lotto si vuole puntare sull’uscita dei numeri ritardatari: dopo N lanci la probabilità è sempre p!!!

VARIABILI ALEATORIE (v.a.) DISCRETE

Ma cosa sono la frequenza k, il numero n(T) o il valore del lancio di un dado? Sono variabili che assumono un particolare valore non in modo predeterminato ma in base al caso (variabili aleatorie)

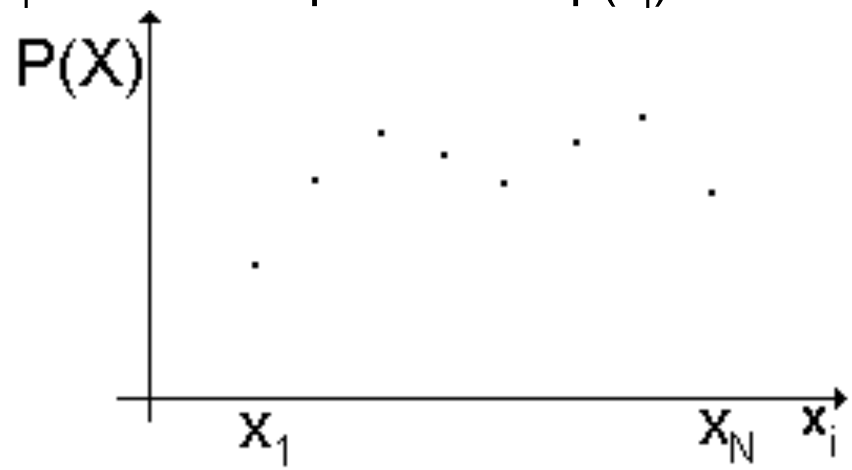
Data una v.a. $X=\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ è definibile la funzione $P(X)$ (distribuzione di probabilità) che associa ad ogni valore x_i di X la sua probabilità $p(x_i)$

Essendo una probabilità:

per ogni x_i risulta $1 \geq P(x_i) \geq 0$

$P(x_1)+P(x_2)+...+P(x_N) = \sum_{i=1,N} P(x_i) = 1$

(<u>proprietà di chiusura</u>)



Infatti, poiché gli N valori x_i costituiscono un insieme completo (sono N in tutto) di valori incompatibili (se $X = x_i$ allora $X \neq x_j$),

$$P(x_1 \text{ o } x_2 \text{ o } ... \; x_N) = P(x_1) + P(x_2) + ... + P(x_N) = 1$$

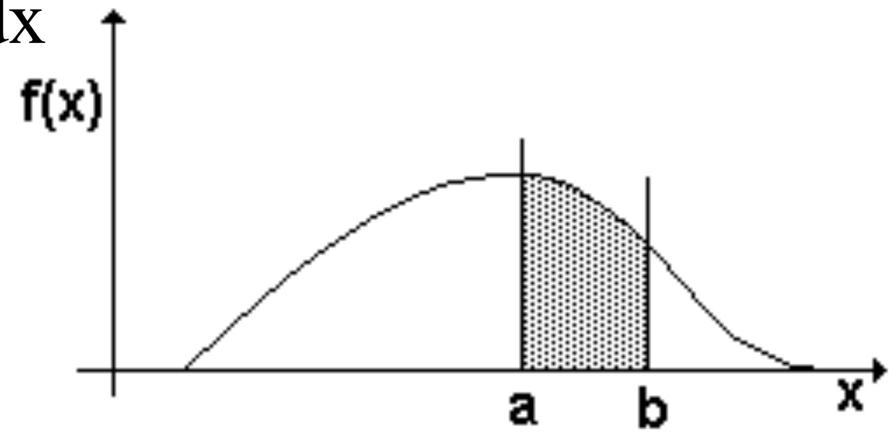
VARIABILI ALEATORIE (v.a.) CONTINUE

Se la v.a X può assumere, anche con probabilità diverse, tutti i valori compresi in un intervallo viene definita continua.

In questo caso P(x) = 0 dato che è un caso favorevole (X = x) su infiniti casi possibili

ma si può definire la probabilità infinitesima che X assuma un valore compreso fra x e x+dx: $dP(x) = P(x \leq X < x+dx) = f(x)\,dx$ con $f(x) \geq 0$

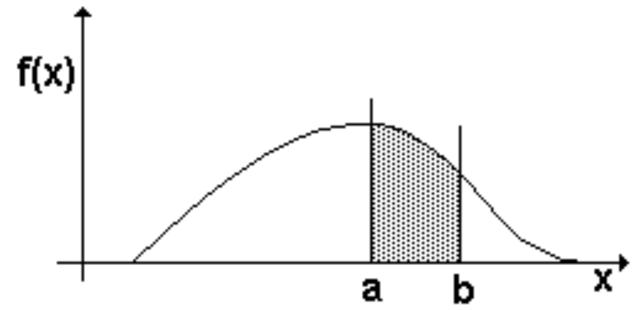
Si introduce allora la $f(x) = \dfrac{dP(x)}{dx}$ <u>densità di probabilità o funzione di distribuzione</u>



VARIABILI ALEATORIE (v.a.) CONTINUE

Essendo dP(x) = f(x) dx, la probabilità che X assuma un valore compreso fra **a** e **b** è quindi:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



Per la proprietà di chiusura $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ = P(qualsiasi valore x) = 1

RIASSUNTI DI UNA DISTRIBUZIONE

Spesso di una distribuzione è sufficiente conoscere alcuni valori caratteristici che ne riassumono l'andamento: il valore più probabile, un valore che indichi quanto la distribuzione sia simmetrica rispetto ad un valore centrale, ecc.).

VALORE MEDIO

Si definisce valore atteso o speranza matematica o valore medio o media (da non confondersi con la media aritmetica) della v.a. X la quantità:

$$\sum_{i=1,N} x_i P(x_i) \quad \text{(v.a. discreta)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \quad \text{(v.a. continua)}$$

Il significato è quello di una media effettuata pesando ogni valore della v.a. X con la probabilità che essa assuma quel valore (analogia con il baricentro in meccanica dove le distanze vengono pesate con le masse).

Simbolicamente l'operazione di media si indica con E(X) (Expectation value).

Indicheremo con m il valore atteso di una distribuzione: E(X) = m

VARIANZA

Si definisce varianza della variabile aleatoria X il valore atteso del quadrato dello scarto dalla media:

$$\sigma^2(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E[(X - m)^2]$$

essa quantifica la larghezza di un distribuzione: più i valori probabili sono vicini alla media e più $\sigma^2(X)$ è piccola; più ne sono distanti e più è grande.

Indicheremo con σ^2 la varianza di una distribuzione: $\sigma^2(X) = \sigma^2$.

DEVIAZIONE STANDARD

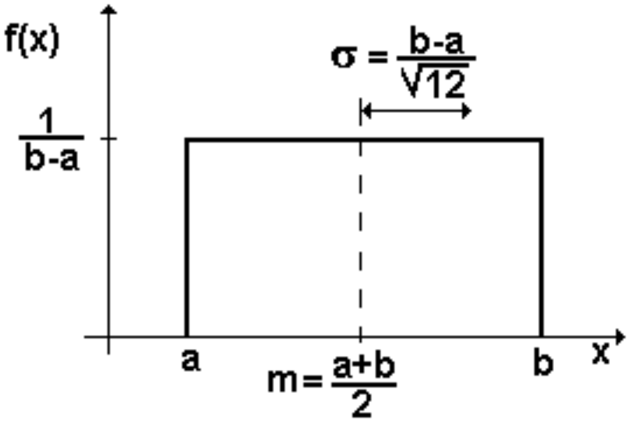
Si definisce deviazione standard o scarto quadratico medio la quantità

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

che ha le stesse dimensioni fisiche della variabile aleatoria X.

ESEMPIO: DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA fra a e b:

si utilizza nei casi in cui nessun valore all'interno di un intervallo è preferito:



f(x) = K

dalla proprietà di chiusura: $\int_a^b K\,dx = 1$ segue $K = \frac{1}{b-a}$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 0{,}29\,(b-a)$$

$$P(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{\sqrt{12}}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\sqrt{12}}} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{2}{\sqrt{12}} = 57{,}7\%$$

PROBABILITA' **STATISTICA**

$$p \approx k/N$$

$$m = E(X) \approx \overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \approx \sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{N-1}}$$

Dal calcolo delle probabilità deriva $\sigma_s(\overline{X}) = \dfrac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$

Il risultato di una misura viene riportato esprimendo la migliore stima del valore vero **m** con la media aritmetica di N misure

e indicando un **intervallo di confidenza** (una o più deviazioni standard) in cui si ha un elevato livello di confidenza nel fatto che includa il valore vero m

$$\overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X}) \Longleftrightarrow \overline{X} - \frac{\sigma_s}{\sqrt{N}} \leq m \leq \overline{X} + \frac{\sigma_s}{\sqrt{N}}$$

una deviazione standard della media corrisponde a un livello di circa il 70%

Dal calcolo delle probabilità deriva la formula della **propagazione delle incertezze**:

se una misura Y indiretta viene determinata a partire dalle misure dirette di N grandezze fisiche $X_1, X_2, \ldots, X_N$, cioè $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 \sigma(X_i)^2}$$

$$\sigma(aX + bY) = \sqrt{a^2\sigma(X)^2 + b^2\sigma(Y)^2}$$

$$\sigma(X \pm Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

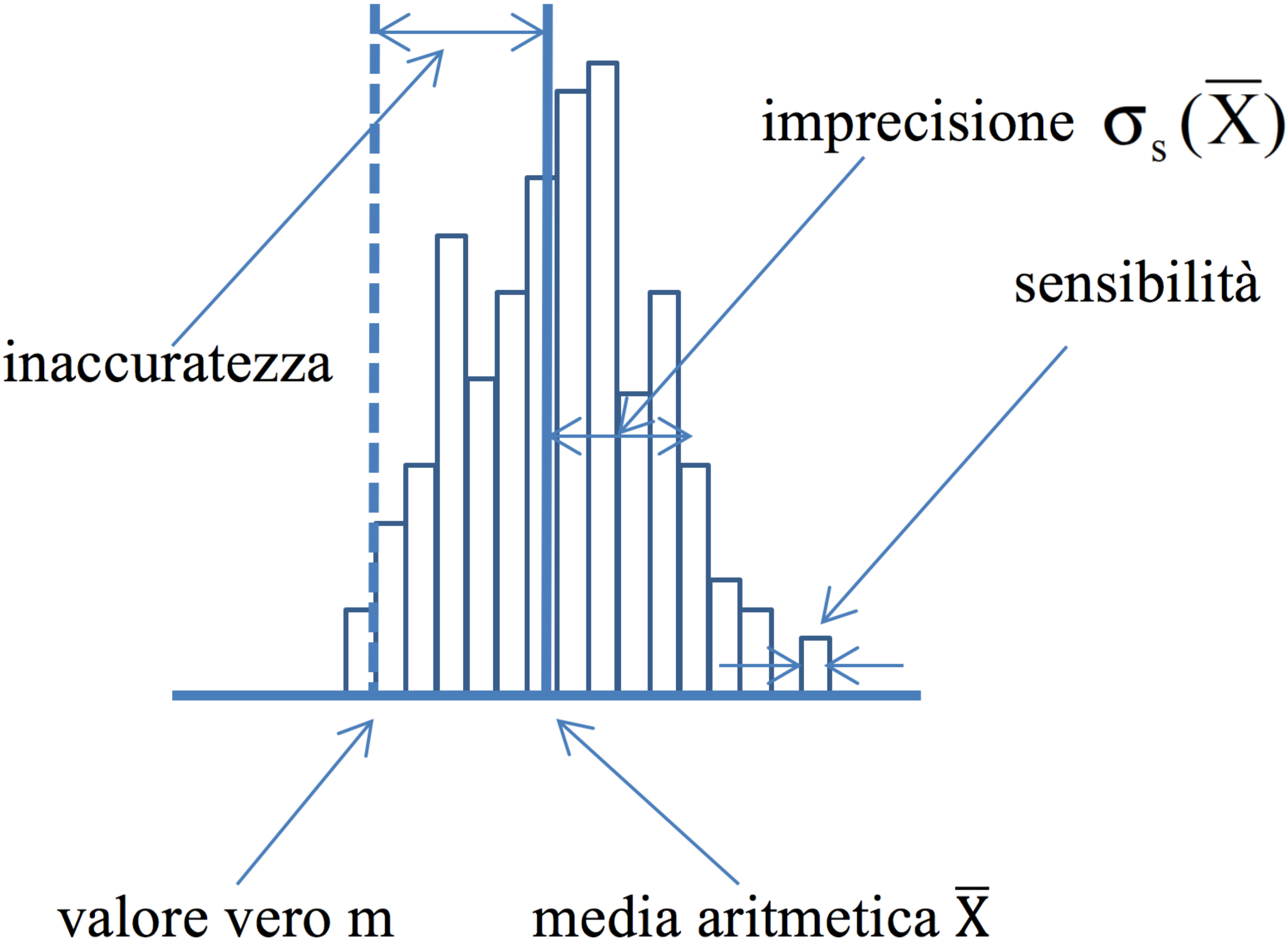
e se la misura indiretta di Y è espressa da un monomio delle grandezze fisiche $X_1, X_2, ..., X_N$, cioè $Y = c\, X_1^{p1}\, X_2^{p2} \ldots X_N^{pN}$

$$\frac{\sigma(Y)}{|Y|} = \sqrt{\sum_{i=1,N} p_i^2 \left(\frac{\sigma(X_i)}{X_i}\right)^2}$$

dove $\dfrac{\sigma(X)}{|X|}$ è detta incertezza relativa

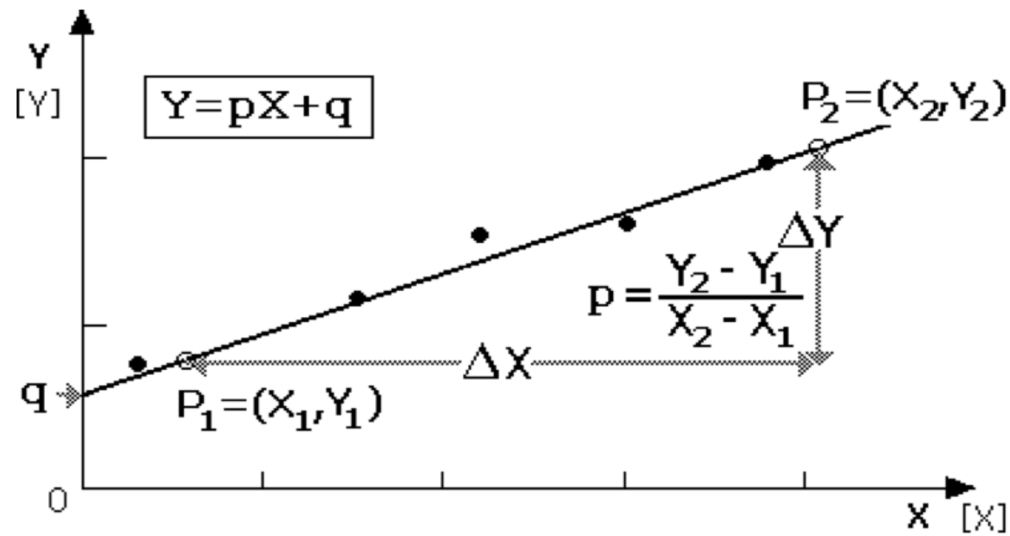
$$\rho = \frac{M}{L^3} \rightarrow \frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(M)}{M}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma(L)}{L}\right)^2}$$

$$G = k\, V^n \rightarrow \frac{\sigma(G)}{G} = n\, \frac{\sigma(V)}{V}$$


imprecisione $\sigma_s(\overline{X})$
sensibilità
inaccuratezza
valore vero m
media aritmetica $\overline{X}$

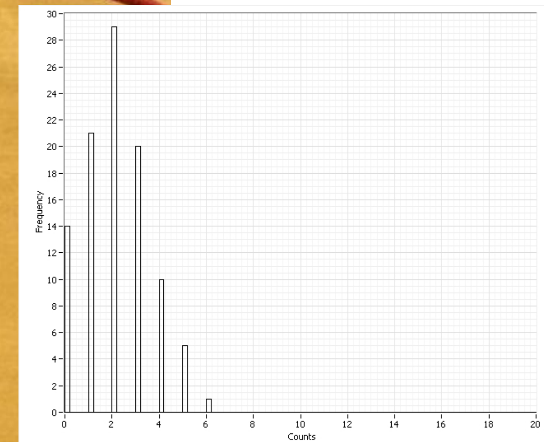
Avremo spesso bisogno di studiare la dipendenza di una grandezza fisica Y da un'altra grandezza X a partire da una serie di N coppie di misure X_i, Y_i.
Se l'andamento è di tipo lineare è banale ricavare da un grafico Y vs X i valori dei parametri della retta Y = p X + q in cui
p è la pendenza (non adimensionale) della retta
q è l'intercetta con l'asse delle Y

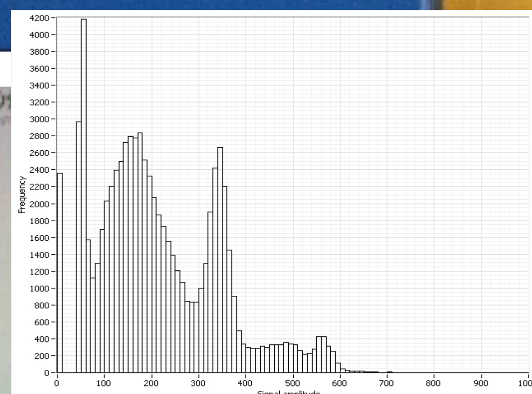
$Y_1 = p\,X_1 + q$
$Y_2 = p\,X_2 + q$
$Y_2 - Y_1 = p\,(X_2 - X_1)$
$q = Y(X=0)$

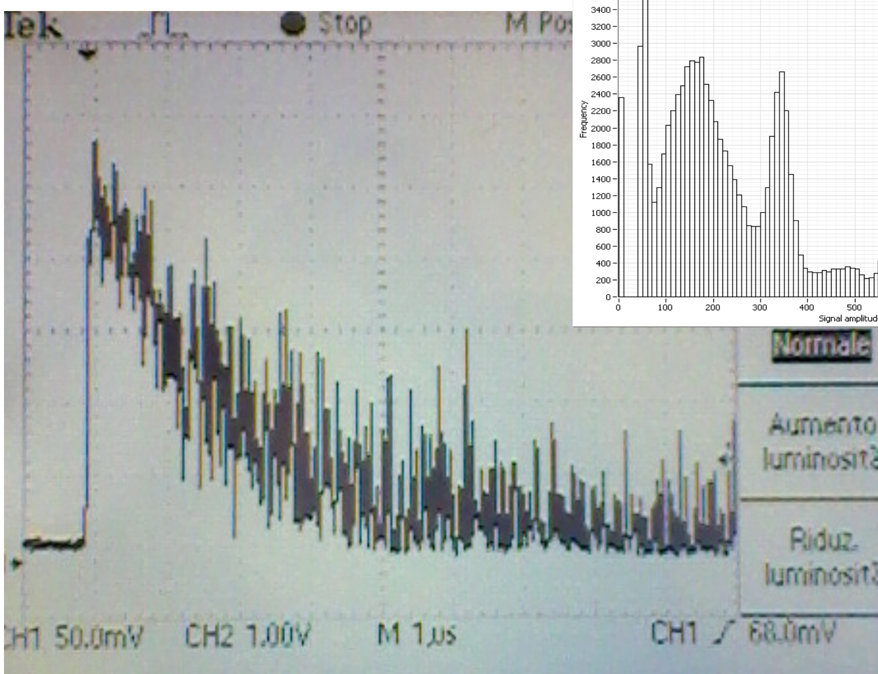


In laboratorio l'elaborazione statistica delle N coppie di misure verrà effettuata tramite il **metodo dei minimi quadrati** che consiste nel determinare i parametri che minimizzano globalmente le distanze (al quadrato) dei punti sperimentali dalla retta


USB
+/- 12V
LV/ON
ANALOG
ON HV
RESET
THRESHOLD
GATE
WIDTH
DIGITAL
HV OUT
LABORATORIO DIDATTICO DI FISICA
FACOLTA' di INGEGNERIA
Università di Roma La Sapienza


Frequency
Counts


Frequency
Signal amplitude


Tek
Stop
Normale
Aumento luminosità
Riduz. luminosità
CH1 50.0mV
CH2 1.00V
M 1.µs
CH1 68.0mV


+/- 12V
LV/ON
ANALOG
ON HV
RESET
THRESHOLD
GATE
WIDTH
DIGITAL
LABORATORI NAZIONALI DI FRASCATI