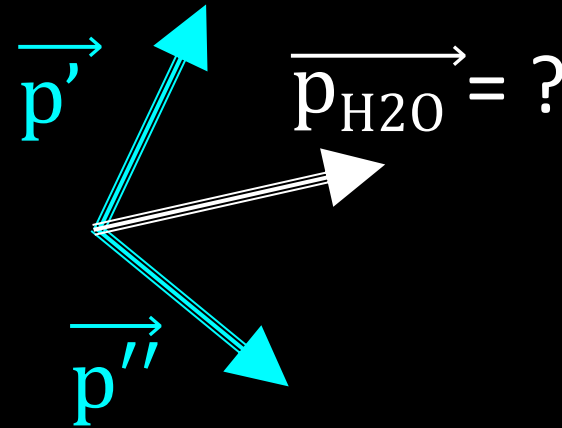
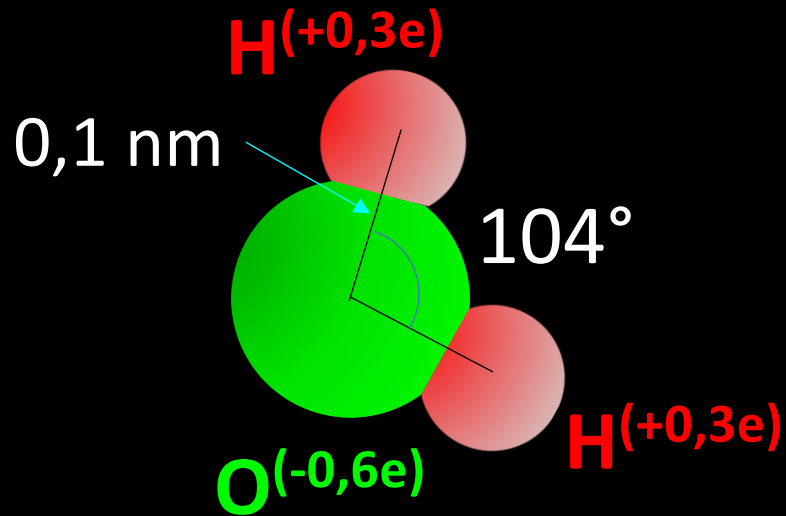


1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

sviluppo in multipoli

calcolare il momento di dipolo elettrico della molecola H_2O

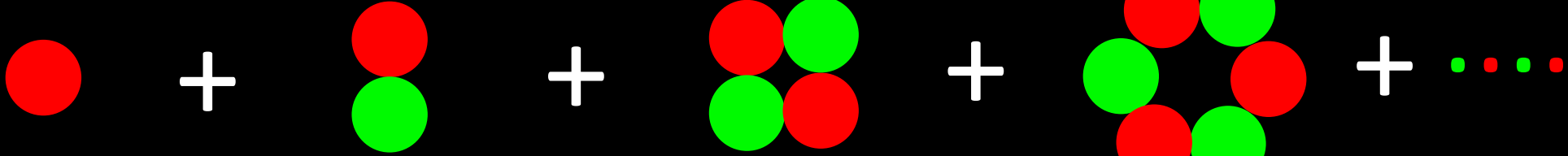


$$p' = p'' = 0,3 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \times 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 4,8 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$$
$$p = 2 p' \cos 52^\circ = 5,9 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

sviluppo in multipoli

a grande distanza qualsiasi distribuzione di carica può essere scomposta in serie di multipoli



monopolo

$$V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$$

dipolo

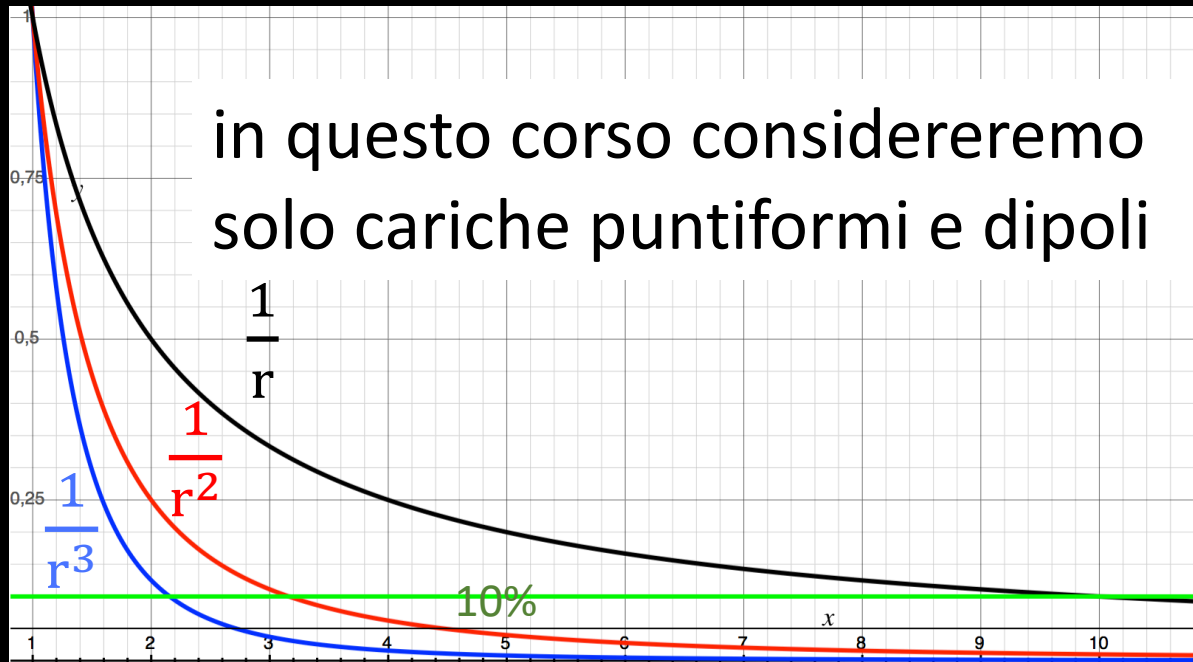
$$V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^2}$$

quadrupolo

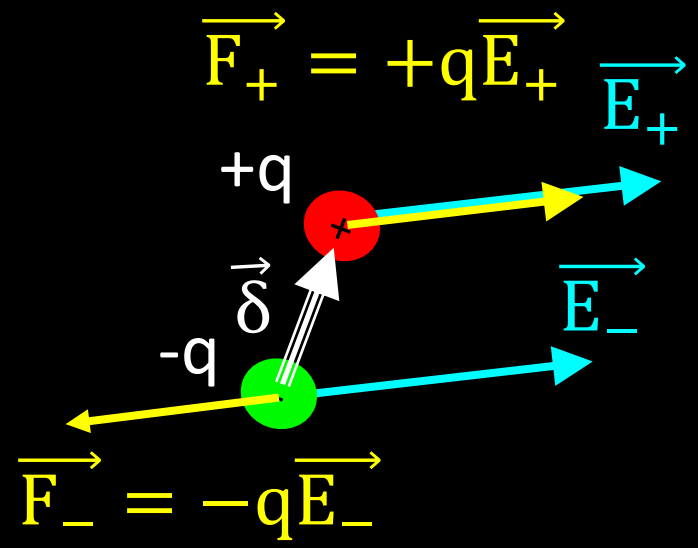
$$V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^3}$$

sestupolo

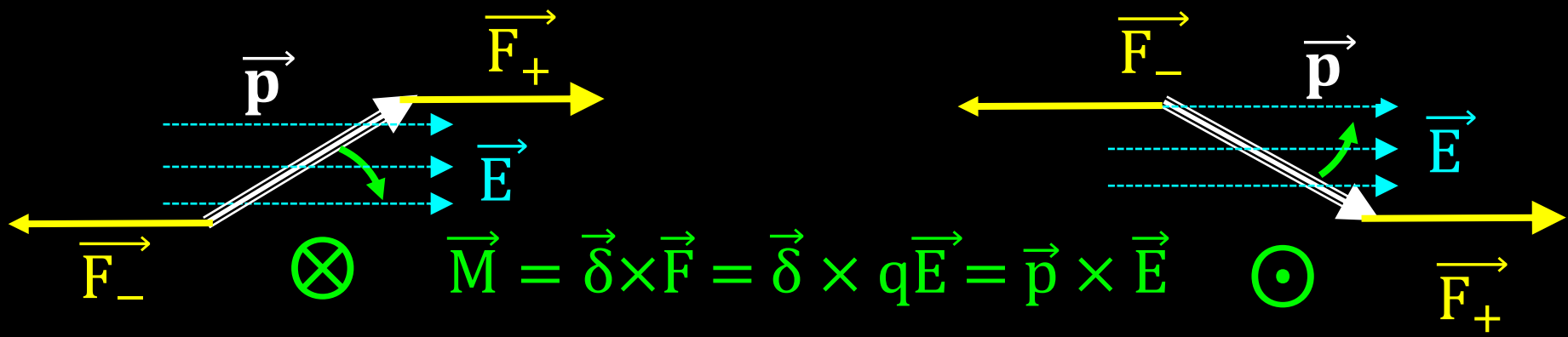
$$V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO azioni meccaniche su dipolo



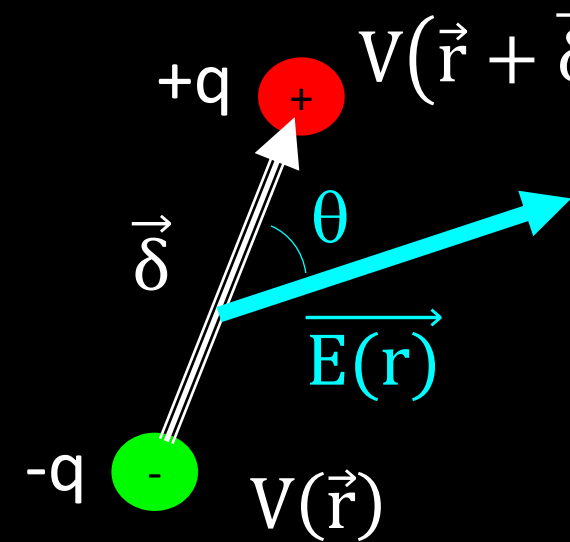
se il campo è uniforme ($\vec{E}_+ = \vec{E}_-$)
 $\vec{F}_+ = -\vec{F}_- \rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$
 (coppia di forze)



il momento meccanico (torcente) tende a far allineare il dipolo al campo

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO azioni meccaniche su dipolo

energia del dipolo in campo elettrico



$$\vec{\delta} = \hat{i} \delta_x + \hat{j} \delta_y + \hat{k} \delta_z$$

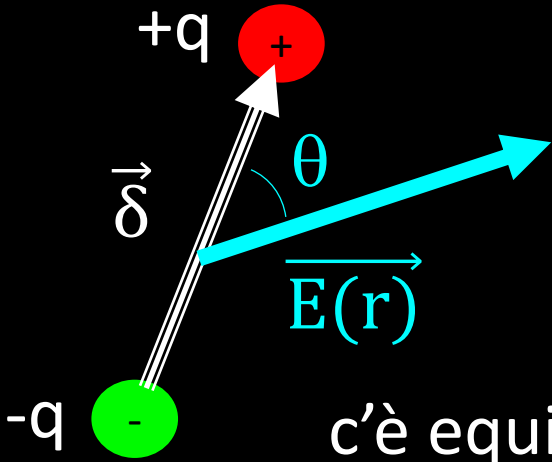
$$V(\vec{r} + \vec{\delta}) = V(\vec{r}) + \frac{\partial V}{\partial x} \delta_x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta_y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta_z$$
$$= V(\vec{r}) + \overrightarrow{\text{grad}}(V) \vec{\delta}$$

$$U = qV(\vec{r} + \vec{\delta}) + (-qV(\vec{r})) = q[V(\vec{r} + \vec{\delta}) - V(\vec{r})]$$

$$= q[\overrightarrow{\text{grad}}(V) \vec{\delta}] = \vec{p} \overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\vec{p} \vec{E} = -p E \cos\theta$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO azioni meccaniche su dipolo

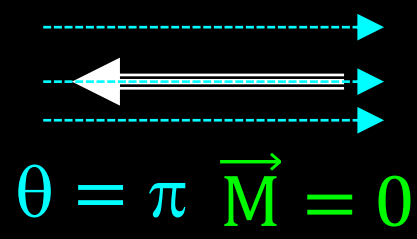
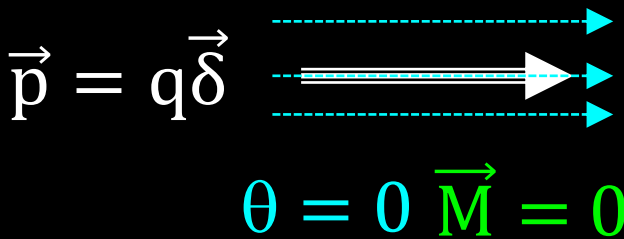
equilibrio del dipolo in campo elettrico



$$U = \vec{p} \cdot \text{grad}(V) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos\theta$$

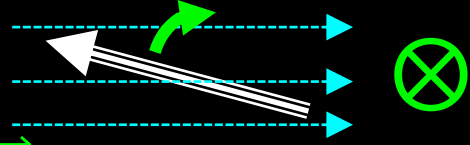
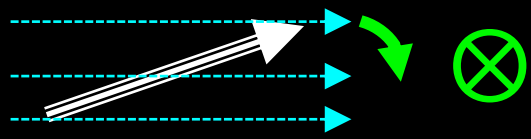
c'è equilibrio rotazionale se il momento $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$

$$M = p E \sin(\theta)$$



$U = -p E < 0$ eq. stabile

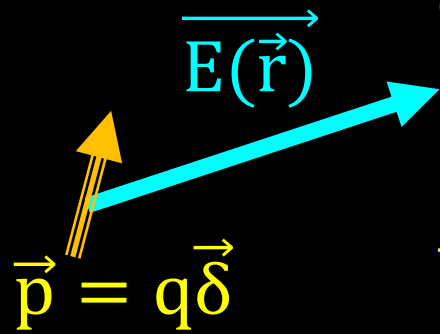
$U = +p E > 0$ eq. instabile



$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

azioni meccaniche su dipolo
dipolo puntiforme in campo elettrico non uniforme



$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) = -\overrightarrow{\text{grad}}(-\vec{p} \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

sul dipolo agisce una forza nella direzione e verso in cui diminuisce l'energia

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

sul dipolo agisce una forza nella direzione e verso in cui aumenta la quantità $p E \cos(\theta)$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio dipolo + carica

dipolo nel campo di una carica puntiforme



Un cubo di H_2O ($p = 6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$) di 0,1 mm di lato ha una massa di $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (10^{-4} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ kg} = 10^{-6} \text{ g}$

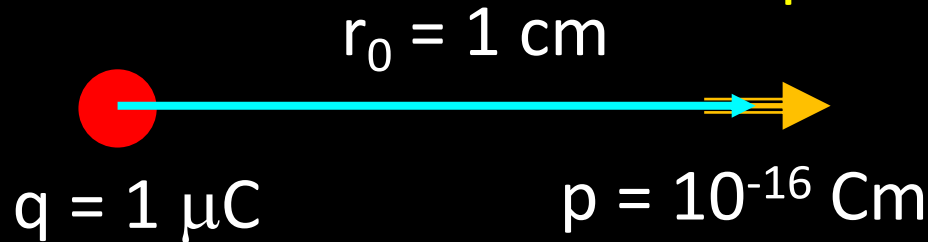
$$\rightarrow \frac{10^{-6} \text{ g}}{18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \times 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecole}}{\text{mol}} \sim 3 \cdot 10^{16} \text{ molecole}$$

Se si allineassero tutte si avrebbe un momento di dipolo $p_{\text{tot}} = 3 \cdot 10^{16} \times 6 \cdot 10^{-30} = 1,8 \cdot 10^{-15} \text{ Cm}$.

Se se ne allineasse solo il 5% si avrebbe un momento di dipolo $p_{\text{tot}} = 1,8 \cdot 10^{-15} \times 0,05 \sim 10^{-16} \text{ Cm}$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio **dipolo + carica**

dipolo nel campo di una carica puntiforme



F = ?

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(p \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}\right) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \hat{i}\left(\frac{0 - 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\right) + \hat{j}(\dots) + \hat{k}(\dots) = -2 \frac{\vec{r}}{r^4}$$

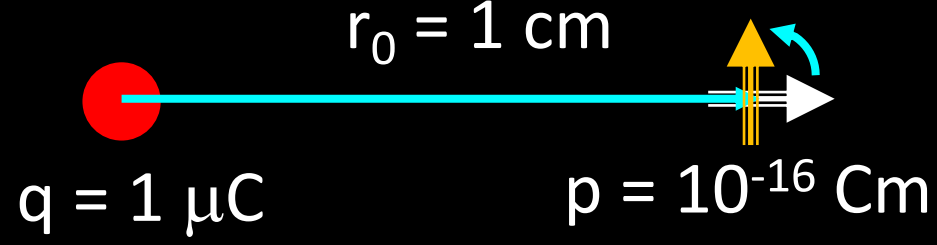
$$\vec{F} = -2 \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^3} \quad \text{attrattiva} \quad \text{+} \quad - \implies +$$

$$F(r_0) = -2 \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r_0^3} = -2 \times 9 \times 10^9 \times 10^{-16} \times 10^{-6} / 10^{-6} = -1,8 \mu\text{N}$$

$$a = \frac{-1,8 \mu\text{N}}{10^{-9} \text{ kg}} = -1,8 \times 10^3 \text{ m/s}^2 \text{ !!!}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio carica + dipolo

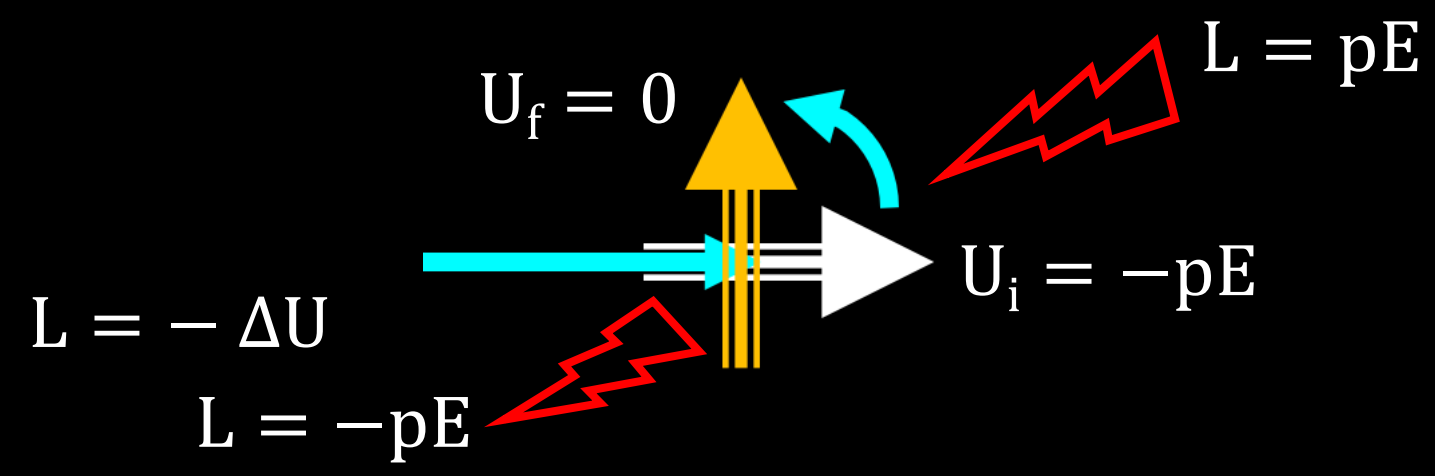
dipolo nel campo di una carica puntiforme



quanto lavoro per ruotarlo di 90°?

$$\Delta U = U_f - U_i = (-\vec{p}_f \cdot \vec{E}) - (-\vec{p}_i \cdot \vec{E}) = 0 + pE =$$

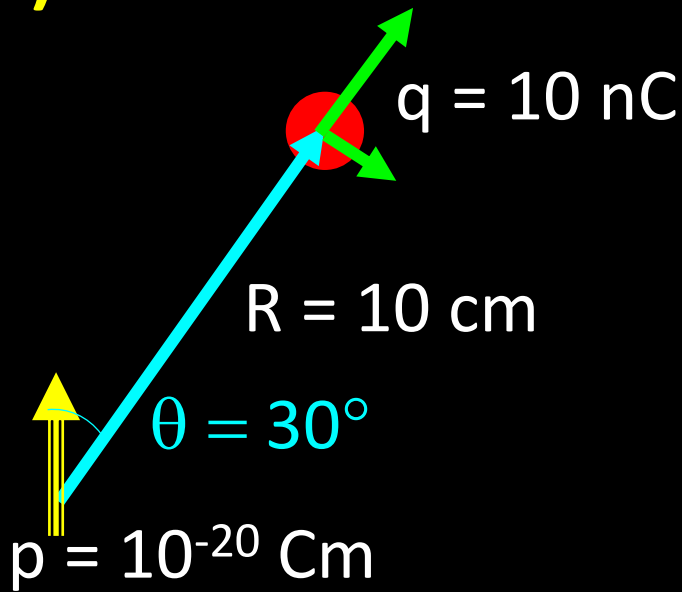
$$= p \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 10^{-16} \times 9 \times 10^9 \times 10^{-6} / 10^{-4} = 9 \times 10^{-9} \text{ J} = 9 \text{ nJ}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio **dipolo + carica**

carica nel campo di un dipolo

quanta forza agisce sulla carica?



$$E_r(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sqrt{3}}{R^3}$$

$$E_n(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p/2}{R^3}$$

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\sqrt{13}/2}{R^3}$$

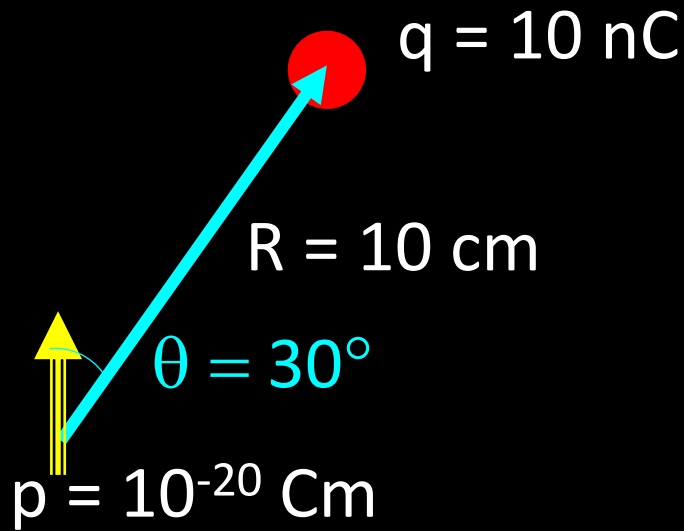
$$E_r(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}$$

$$E_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp \sqrt{13}/2}{R^3} = 1,6 \text{ fN}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio **dipolo + carica**

carica nel campo di un dipolo



quanto lavoro occorre per allontanarla indefinitivamente?

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

se $L = -\Delta U$

$$L = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sqrt{3}/2}{R^2} = 8 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 500 \text{ eV}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO dielettroforesi applicazioni

per separare micro-particelle biologiche neutre si applicano campi elettrici non uniformi in grado di indurre un momento di dipolo elettrico e quindi di generare forze in grado di spostare il materiale biologico (**dielettroforesi**)

L'intensità del momento di dipolo indotto dipende sia dal campo applicato ($\vec{p} = \alpha \vec{E}$) che dal tipo di particella. In questo modo si riescono a separare miscele di proteine o cellule differenti.

Determinare l'esponente n del campo $\vec{E} = \hat{c} x^n$ per cui la forza prodotta in una cellula è costante.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha E^2) = \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha c^2 x^{2n}) = \\ &= \hat{i} 2n \alpha c^2 x^{2n-1} \rightarrow 2n-1 = 0 \rightarrow n = 1/2 \rightarrow \vec{E} = \hat{i} c \sqrt{x}\end{aligned}$$