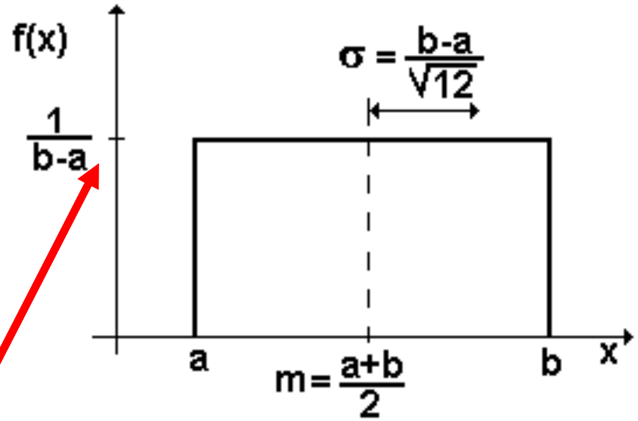
ESEMPIO: DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA fra a e b:

si utilizza nei casi in cui nessun valore all'interno di un intervallo è preferito:

f(x) = K



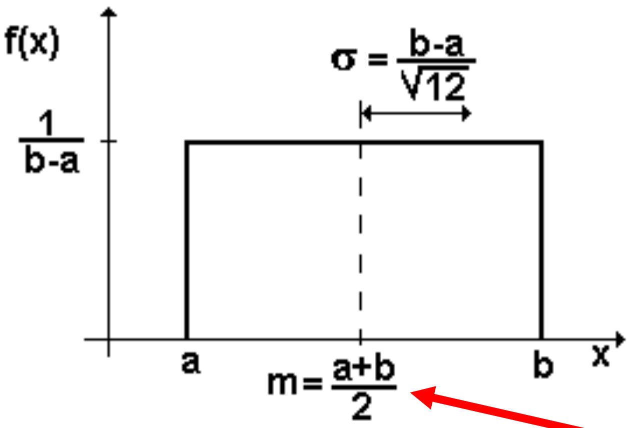
dalla proprietà di chiusura: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ cioè $\int_a^b K\,dx = 1$

segue f(x) = K = $\frac{1}{b-a}$

ESEMPIO: DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA fra a e b:

si utilizza nei casi in cui nessun valore all'interno di un intervallo è preferito:

f(x) = K

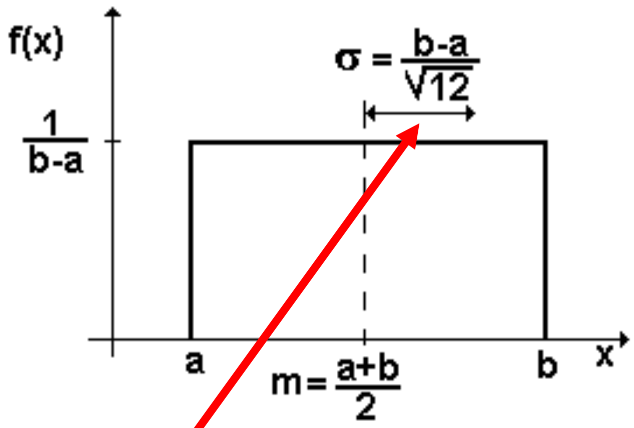


dalla definizione di media E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{a}^{b} x\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$

ESEMPIO: DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA fra a e b:

si utilizza nei casi in cui nessun valore all'interno di un intervallo è preferito:

f(x) = K



dalla definizione di varianza si ha:

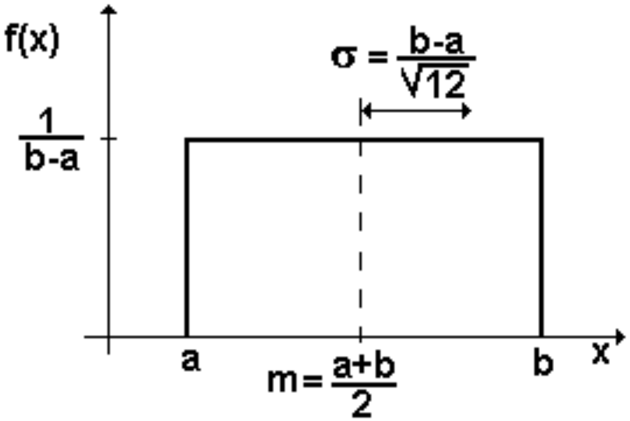
$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

e da quella della deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 0{,}29\ (b-a)$$

ESEMPIO: DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA fra a e b:

si utilizza nei casi in cui nessun valore all'interno di un intervallo è preferito:



f(x) = K

qual è la probabilità che X sia compreso fra m-σ e m+σ?

$$P(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = \int_a^b f(x)dx = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f(x)dx =$$

intervallo di confidenza

$$\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{\sqrt{12}}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\sqrt{12}}} \frac{1}{b-a}dx = \frac{2}{\sqrt{12}} = 57,7\%$$

livello di confidenza

PROBABILITA'		STATISTICA
p	$\approx$	k/N
m	$=$	$E(X) \approx \overline{X} = \dfrac{\sum x_i}{N}$
$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	$\approx$	$\sigma_s(X) = \sqrt{\dfrac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{N-1}}$

Dal calcolo delle probabilità deriva $\sigma_s(\overline{X}) = \dfrac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$

Il risultato di una misura viene riportato esprimendo la migliore stima del valore vero **m** con la media aritmetica di N misure

e indicando un **intervallo di confidenza** (una o più deviazioni standard) in cui si ha un elevato livello di confidenza nel fatto che includa il valore vero m

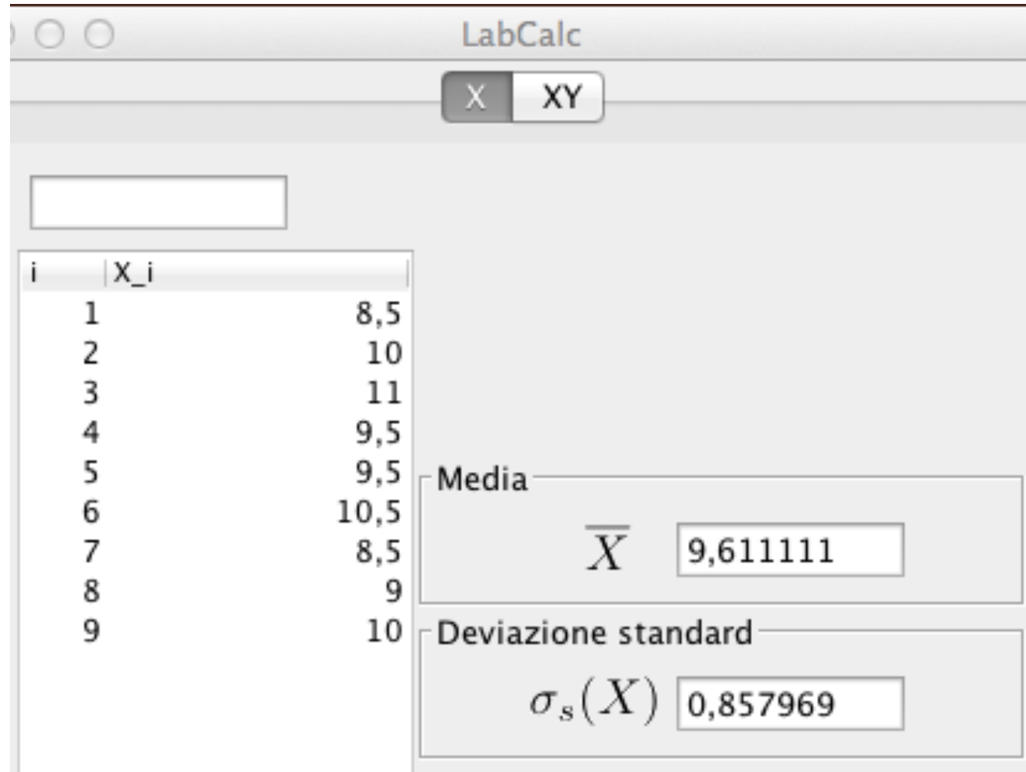
$$\overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X}) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{X} - \frac{\sigma_s}{\sqrt{N}} \leq m \leq \overline{X} + \frac{\sigma_s}{\sqrt{N}}$$

una deviazione standard della media corrisponde a un livello di circa il 70%

ESEMPIO: in una serie di 9 misure della stessa grandezza X si ottengono i seguenti risultati:

8,5 (2 volte)
9,0
9,5 (2 volte)
10,0 (2 volte)
10,5

Con una qualsiasi calcolatrice statistica si ottengono rapidamente la media aritmetica della serie di Misure (9,611) e la deviazione standard (0,858).



- Perché la migliore stima del valore vero della grandezza misurata è X = 9,61±0,29?

- Con un intervallo di confidenza di 3 deviazioni standard, perché il valore minimo che ci si può aspettare per una decima misura è 7,0?

DISTRIBUZIONE DI POISSON

È la distribuzione di probabilità di una v.a. discreta k che conta il numero di volte in cui si verifica un evento raro (cioè di piccola probabilità $p \rightarrow 0$) in una serie infinita di tentativi ($N \rightarrow \infty$) quando in media esso si presenta **m = Np** volte

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!} \quad \text{in cui } 0 \leq k < \infty$$

E' possibile dimostrare che:

$E(K) = m$

$Var(K) = m$

A prima vista il fatto che nella poissoniana risulti $\sigma^2 = m$ potrebbe far pensare ad un errore di calcolo dimensionale; in realtà la v.a. della distribuzione di Poisson è un numero puro !

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Riflessione: perché possono essere considerati eventi rari i circa 200 raggi cosmici che ogni secondo colpiscono un individuo?

Questa distribuzione è stata utilizzata per la prima volta nella conta dei globuli rossi: del numero enorme contenuto nel volume di 1 cm^3 di un prelievo standard solo una frazione irrisoria viene posta su un vetrino da microscopio con una camera di volume noto.

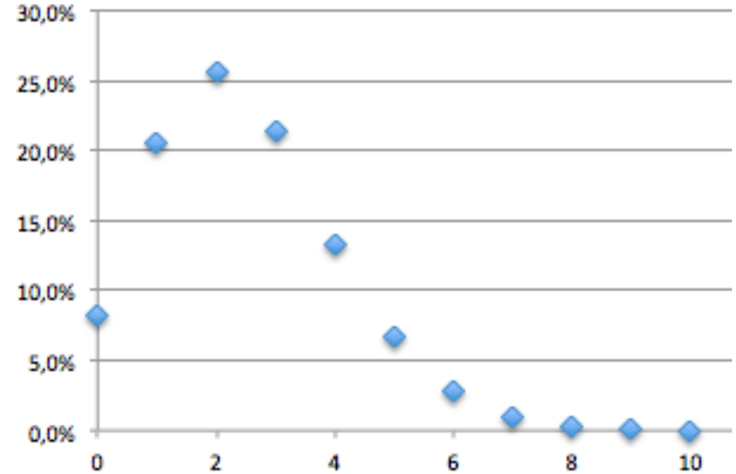
L'esito k del conteggio, limitato in questo modo a poche centinaia di globuli rossi, **è quindi soggetto a fluttuazioni statistiche: con elevata probabilità, però, il numero m cercato è compreso nell'intervallo $k - \sqrt{k} < m < k + \sqrt{k}$ → $m = k \pm \sqrt{k}$**

Per esempio $6 \pm \sqrt{6}$ raggi cosmici in un minuto (cioè 4÷8 al minuto → 240÷480 in un'ora)

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Come esempio analizziamo la distribuzione per m = 2,5

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$$



$$k = 0 \rightarrow P_{2,5}(0) = \frac{e^{-2,5} 2,5^0}{0!} = 8,2\ \%$$

$$k = 1 \rightarrow P_{2,5}(1) = \frac{e^{-2,5} 2,5^1}{1!} = 20,5\ \%$$

$$k = 2 \rightarrow P_{2,5}(2) = \frac{e^{-2,5} 2,5^2}{2!} = 25,7\ \%$$

$$k = 3 \rightarrow P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5} 2,5^3}{3!} = 21,4\ \%$$

$$k = 4 \rightarrow P_{2,5}(4) = \frac{e^{-2,5} 2,5^4}{4!} = 13,4\ \%$$

$$k = 5 \rightarrow P_{2,5}(5) = \frac{e^{-2,5} 2,5^5}{5!} = 6,7\ \%$$

$$k = 6 \rightarrow P_{2,5}(6) = \frac{e^{-2,5} 2,5^6}{6!} = 2,3\ \%$$

$$k = 7 \rightarrow P_{2,5}(7) = \frac{e^{-2,5} 2,5^7}{7!} = 1,0\ \%$$

$$k = 8 \rightarrow P_{2,5}(8) = \frac{e^{-2,5} 2,5^8}{8!} = 0,3\ \%$$

Calcoliamo la probabilità che sia $|k-m| < \sigma$ cioé $m-\sigma < k < m+\sigma$, cioè: $2,5-1,58 < k < 2,5+1,58 \rightarrow 0,92 < k < 4,08$.

Questa condizione è soddisfatta per k = 1, 2, 3, 4 che corrisponde a un livello di confidenza del 20,5 + 25,7 + 21,4 + 13,4 = 81,0 %.

DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$P_m(k) = \frac{e^{-m}m^k}{k!}$$

- Esempio: 5000 cellule vengono irraggiate. Sapendo che la loro probabilità di sopravvivenza è 0,05% qual è la probabilità di trovarne vive esattamente 3? E almeno 3?

Il valore medio è dato da Np= 5000*0,0005=2,5.

$P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5}2,5^3}{3!} = 21,4\ \%.$

La probabilità che siano almeno 3 si ottiene sommando tutte le probabilità da k = 3 fino a infinito…

Più brevemente, utilizzando la proprietà di chiusura, si può scrivere

$P_{2,5}(0) + P_{2,5}(1) + P_{2,5}(2) + P_{2,5}(3 \leq k) = 1$

e quindi

$P_{2,5}(3 \leq k) = 1 – [P_{2,5}(0) + P_{2,5}(1) + P_{2,5}(2)] = 1 - (8,2+20,5+25,7)\% = 1 - 54,4\% = 45,6\%$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$$

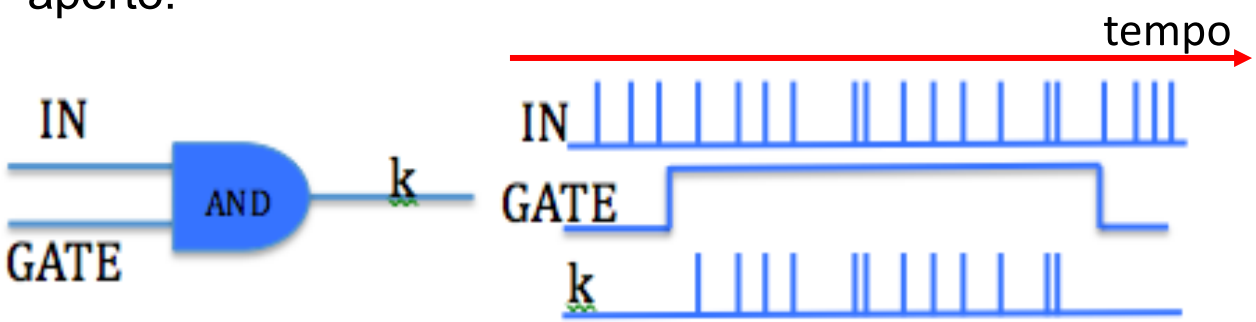
- Esempio: un particolare tipo di apparecchiatura è noto per avere un tasso di guasti di uno ogni 2 anni. Qual è la probabilità che in un anno non abbia guasti? E di averne uno o più di uno?

m = 1/2 = 0,5 → $P_{0,5}(0) = \frac{e^{-0,5} 0,5^0}{0!}$ = 60,7 %

$P_{0,5}(1 \leq k) = 1 - P_{0,5}(0) = 39,3\%$

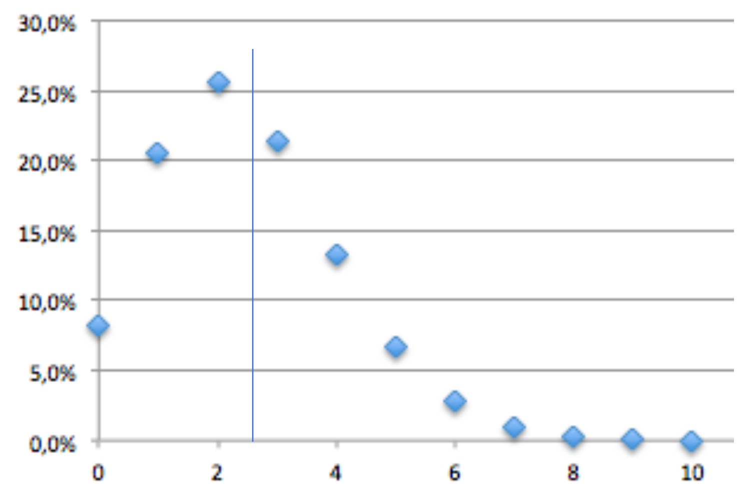
DISTRIBUZIONE DI POISSON

Durante un'esperienza di laboratorio studieremo il numero di eventi di radioattività ambientale rivelati da un contatore a scintillazione. Semplificandolo al massimo, il sistema di acquisizione dei dati ha una sezione che lascia passare al dispositivo digitale di conteggio solo gli eventi che si presentano temporalmente in coincidenza con il segnale di GATE aperto:



Supponiamo di avere una frequenza (rateo o, all'inglese *rate*) di r = 2,5 eventi al secondo. Che distribuzione del numero di conteggi ci aspettiamo se la durata del GATE è 1 s? Ovviamente m = 2,5/s x 1s = 2,5. Se gli eventi sono indipendenti ci aspettiamo la distribuzione di Poisson con m = 2,5

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$$



DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$$

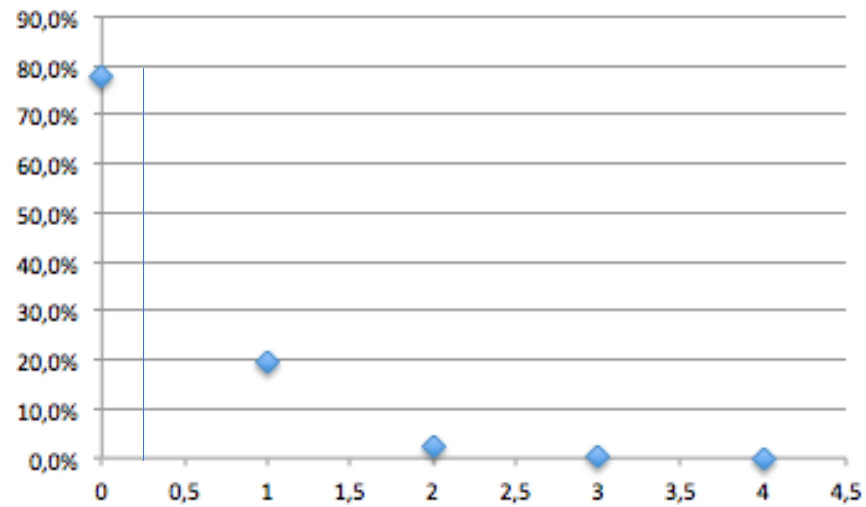
E se, invece, il GATE durasse 0,1 s?
Allora avremmo m = 2,5 x 0, 1 = 0,25.

$$k = 0 \rightarrow P_{0,25}(0) = \frac{e^{-0,25} 0,25^0}{0!} = 77,9\ \%$$

$$k = 1 \rightarrow P_{0,25}(1) = \frac{e^{-0,25} 0,25^1}{1!} = 19,5\ \%$$

$$k = 2 \rightarrow P_{0,25}(2) = \frac{e^{-0,25} 0,25^2}{2!} = 2,4\ \%$$

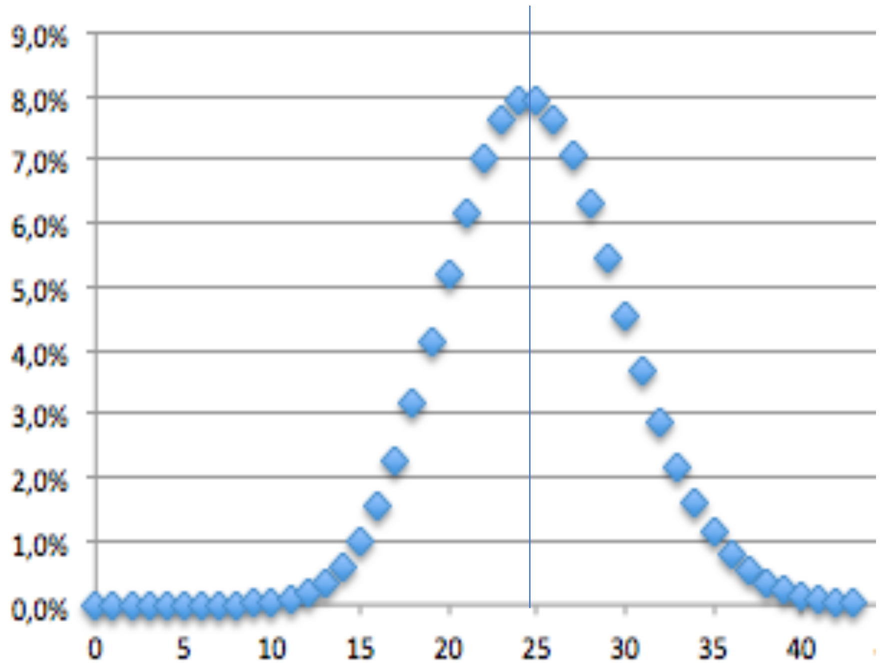
$$k = 3 \rightarrow P_{0,25}(3) = \frac{e^{-0,25} 0,25^3}{3!} = 0,2\ \%$$



DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$$

Se infine la durata del GATE fosse di 10 secondi allora si avrebbe m = 2,5/s x 10 s = 25 e la distribuzione assumerebbe una forma simmetrica "a campana" (curva di Gauss)



In questo caso particolare, trattandosi pur sempre di una poissoniana, la media e la varianza della gaussiana coincidono

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

Dal calcolo delle probabilità, considerando misure statisticamente indipendenti si ricava la formula della **propagazione delle incertezze (assolute)**:

se una misura Y indiretta viene determinata a partire dalle misure dirette di N grandezze fisiche $X_1, X_2, \ldots, X_N$, cioè $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ si ha

coefficienti di sensibilità

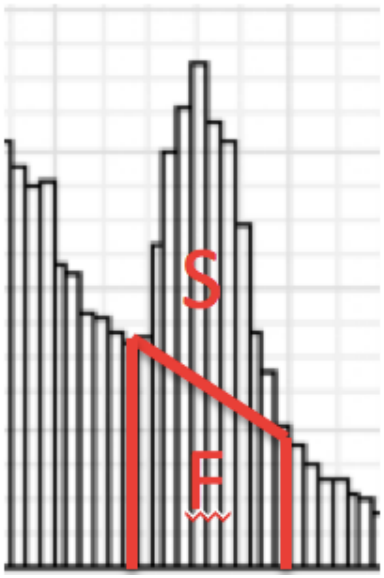
$$\sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 \sigma(X_i)^2}$$

$$\sigma(aX + bY) = \sqrt{a^2\sigma(X)^2 + b^2\sigma(Y)^2}$$

$$\sigma(X \pm Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

Quest'ultima relazione è particolarmente utile nel caso degli N conteggi dovuti alla somma di due contributi originati, per esempio, uno da eventi di radioattività e uno dal rumore di fondo elettronico del dispositivo di rivelazione.

$$\sigma(X \pm Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$



In questi casi si possono eseguire due misure:

1) il numero di conteggi F di fondo del solo rivelatore
2) il numero totale N di conteggi dato dalla radioattività (segnale S incognito da quantificare) e dal fondo: N = S + F.

Ma con quale incertezza è noto S?

$\sigma_S = \sigma_{N\text{-}F} = \sqrt{\sigma_N^2+\sigma_F^2}$ e, dato che sia N che F sono conteggi che seguono la statistica poissoniana, si ha $\sigma_N = \sqrt{N}$ e $\sigma_F = \sqrt{F}$ e quindi $\sigma_S = \sigma_{N\text{-}F} = \sqrt{N+F}$

Che corrisponde a un'incertezza relativa:

$$\frac{\sigma_S}{S} = \frac{\sqrt{N + F}}{N - F}$$

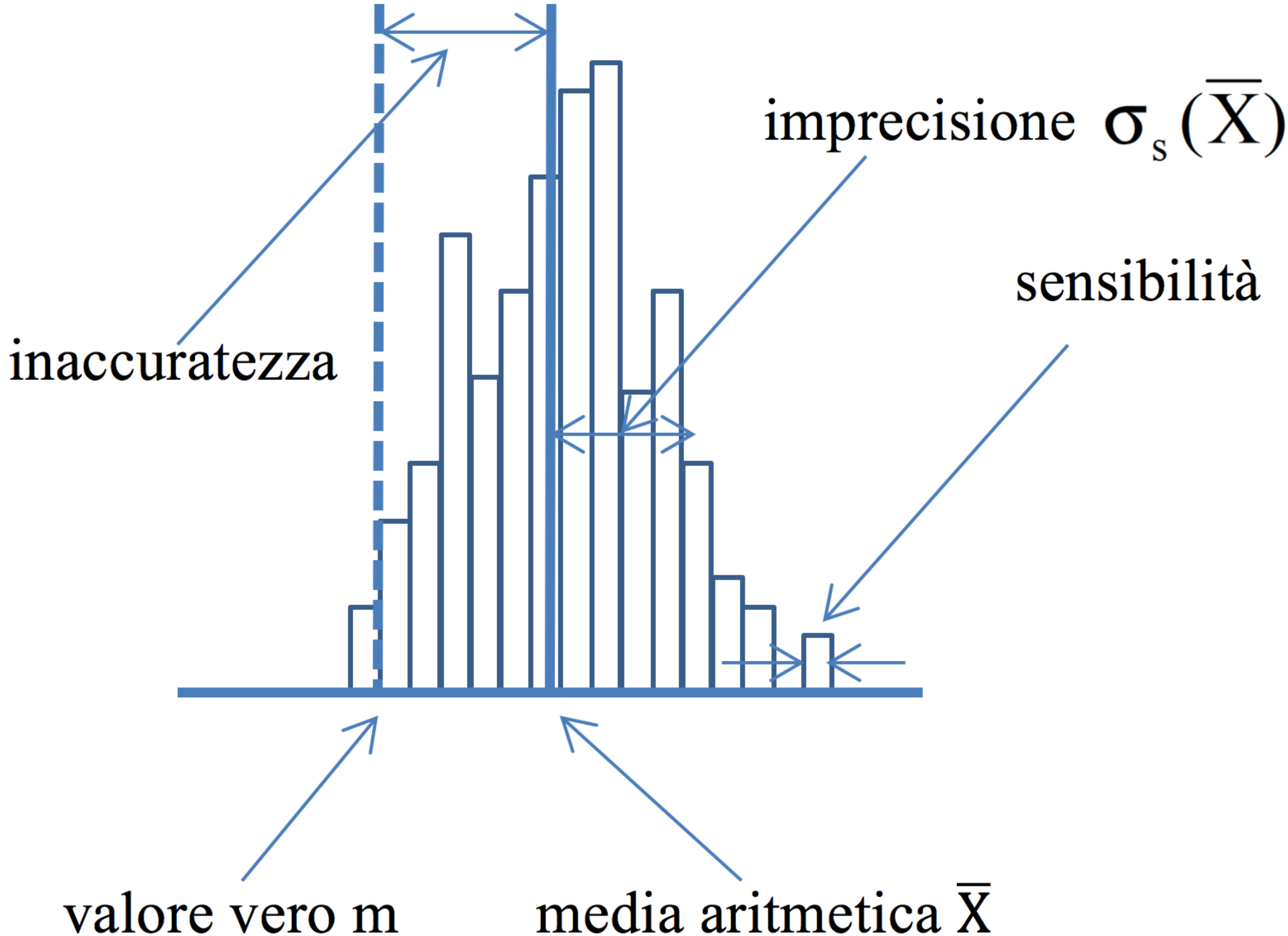
ESERCIZIO: calcolare per quanto tempo occorre acquisire eventi con frequenza di circa 10 Hz affinché tale frequenza sia nota al 5%

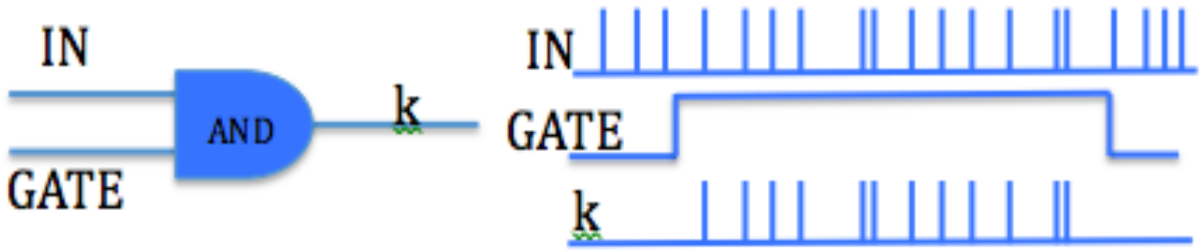
Detta r_S = 10 Hz la frequenza del segnale, il numero di conteggi di segnale è $S = r_S\ t$. Perché la frequenza sia nota al 5% occorre che sia noto al 5% il numero di conteggi S.
$\sigma_S/S = \sqrt{S}/S = 1/\sqrt{S} = 0{,}05$ → da cui S = 400 e quindi $t = 400/r_S = 40$ s

… e se oltre al segnale a 10 Hz fosse presente anche del fondo con una frequenza pari a 7,5 Hz?

Dette $r_S = 10$ Hz, $r_F = 7{,}5$ Hz e $r_N = r_S + r_F = 17{,}5$ Hz le frequenze del segnale, del fondo e totale si ha
$F = r_F\ t$ e $N = r_N\ t$ da cui:

$$0{,}05 = \frac{\sigma_S}{S} = \frac{\sqrt{N+F}}{N-F} = \frac{\sqrt{r_N t + r_F t}}{r_N t - r_F t} = \frac{\sqrt{(r_N + r_F)t}}{(r_N - r_F)t} = \frac{\sqrt{25t}}{10t} \rightarrow t = 100\ \text{s}$$


imprecisione $\sigma_s(\overline{X})$
sensibilità
inaccuratezza
valore vero m
media aritmetica $\overline{X}$



ACQUISIZIONE DI 100 GATEs da 2-4-6-8-10 ms