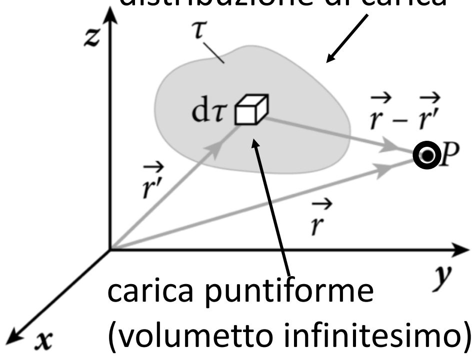
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

la lezione precedente

se le cariche non sono puntiformi

$$\overrightarrow{dE(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\overrightarrow{r'})d\tau}{(\vec{r}-\overrightarrow{r'})^2}\,\widehat{r_{\vec{r}-\overrightarrow{r'}}}$$



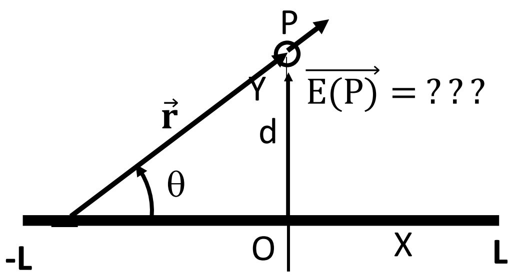
$\rho(\overrightarrow{r'})= dq(\overrightarrow{r'})/d\tau$ densità di carica di volume → $dq = \rho(\overrightarrow{r'})d\tau$

$\sigma(\overrightarrow{r'})= dq(\overrightarrow{r'})/dS$ densità di carica di superficie → $dq = \sigma(\overrightarrow{r'})\, dS$

$\lambda(\overrightarrow{r'})= dq(\overrightarrow{r'})/dl$ densità di carica lineare → $dq = \lambda(\overrightarrow{r'})\, dl$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

esercizio: filo corto non omogeneo (al centro)

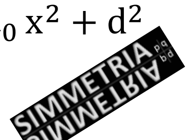


$\overrightarrow{E(P)} = ???$

$\lambda(x) = K|x|$ con $-L < x < L$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(x)\,dx}{x^2+d^2}$$

$$\mathbf{E_X = 0}$$



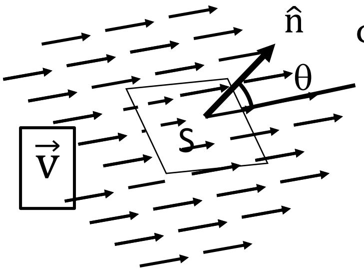
$$dE_Y = dE\sin\theta = dE\,\frac{y}{r} = dE\,\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{K|x|dx}{x^2+d^2}\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$E_Y = \int_{-L}^{0}\frac{Kd}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-x\,dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} + \int_0^L\frac{Kd}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{+x\,dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\int_0^L\frac{Kd}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\,dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} = \frac{Kd}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{L^2+d^2}} + \frac{1}{\sqrt{0^2+d^2}}\right]$$

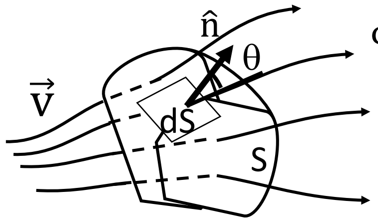
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — matematica

si definisce flusso del vettore $\vec{v}$ attraverso la superficie S:



$$\phi(\vec{v})_S = \vec{v}\,\hat{n}\,S = v\,S\cos\theta$$

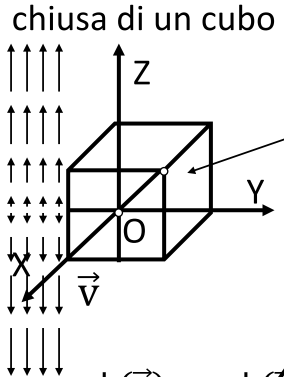
se $\vec{v}$ o $\hat{n}$ variano, la superficie S va suddivisa in elementi infinitesimi:



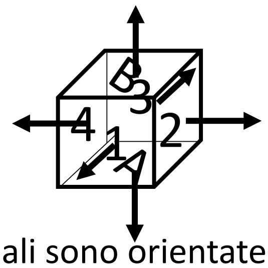
$$\phi(\vec{v})_S = \int_S \vec{v}\,\hat{n}\,dS$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio — matematica

calcolare il flusso del vettore $\vec{v} = c\,\hat{k}\,z^3$ attraverso la superficie chiusa di un cubo (vertici 0, 0, 0 e L, L, L)



$$\phi(\vec{v})_S = \int_S \vec{v}\,\hat{n}\,dS$$



le normali sono orientate verso l'esterno delle superfici chiuse

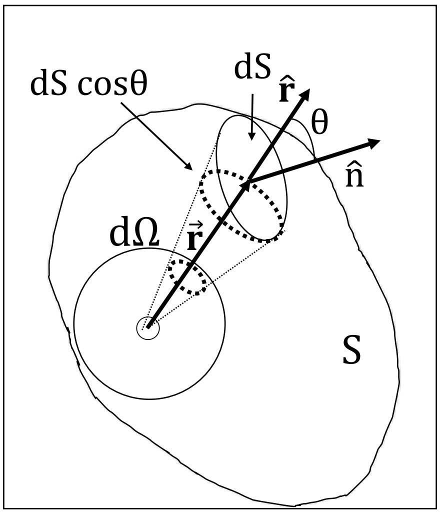
$$\phi(\vec{v})_S = \cancel{\phi(\vec{v})_1} + \cancel{\phi(\vec{v})_2} + \cancel{\phi(\vec{v})_3} + \cancel{\phi(\vec{v})_4} + \cancel{\phi(\vec{v})_A} + \phi(\vec{v})_B$$

$\vec{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{n}}$ $\qquad$ $\vec{\mathbf{v}}\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

$$\phi(\vec{v})_S = \phi(\vec{v})_B = cL^3L^2 = cL^5$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

matematica



l'ANGOLO SOLIDO sotteso dalla superficie dS è pari al rapporto fra l'area proiettata e il quadrato della distanza da O

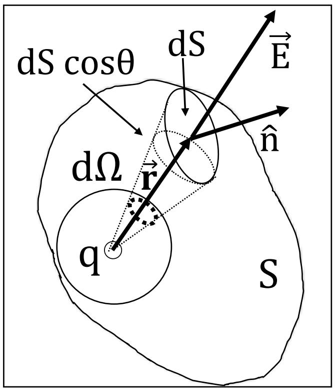
$$d\Omega = \frac{\hat{n} dS\, \hat{r}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

l'angolo solido massimo corrisponde alla superficie di una sfera ($4\pi r^2$) divisa per il quadrato del raggio: 4π srad (steradianti)

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

teorema di Gauss (I)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA che <u>racchiude</u> una carica puntiforme q è:

$$\phi(\vec{E})_S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

>>>

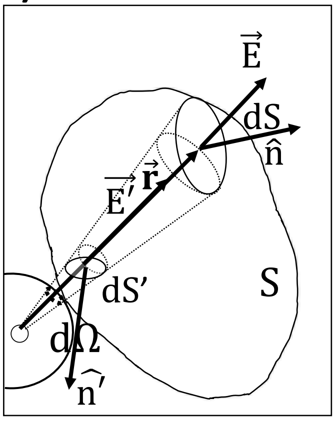
$$d\Omega = \frac{\hat{n} dS\, \hat{r}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\, \hat{n}\, ds = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\hat{r}}{r^2}\hat{n}\, ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q \int_S \frac{\hat{r}}{r^2}\hat{n}\, ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — teorema di Gauss (II)



il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA dovuto a una carica puntiforme q <u>esterna</u> è nullo:

>>>

$$d\Omega = \frac{\hat{n} dS\, \hat{r}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\Delta\Omega = \int_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\, \hat{n}\, ds = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\, \hat{r}}{r^2}\hat{n}\, ds =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_S \frac{\hat{r}}{r^2}\hat{n}\ ds + \int_{S'} \frac{\hat{r'}}{r'^2}\hat{n'}\ ds'\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_S d\Omega + \int_S -d\Omega\right] = 0$$

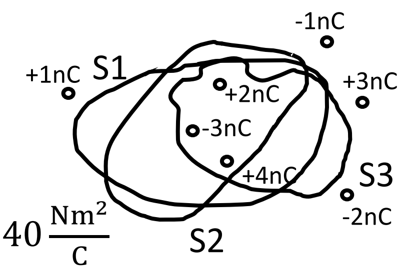
$$\cos\theta > 0 \qquad \cos\theta < 0$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — teorema di Gauss (III)

il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA dovuto a un insieme di cariche puntiformi è pari alla somma dei contributi (nulli) delle cariche esterne e di quelli ($\frac{q_i}{\varepsilon_0}$) dovuti alle cariche interne:

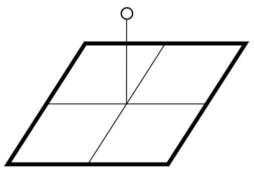
$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\, \hat{n}\, ds = \int_S \sum_{i=1,N} \vec{E_i}\hat{n}\, ds = \sum_{int} \int_S \vec{E_i}\hat{n}\, ds + \sum_{est} \int_S \vec{E_i}\hat{n}\, ds$$

$$= \sum_{int} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

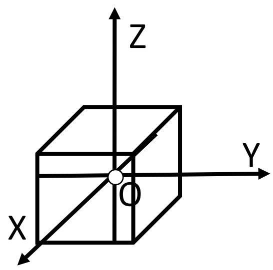


$$\phi(\vec{E})_{S1} = \phi(\vec{E})_{S2} = \phi(\vec{E})_{S3} = \frac{3\ nC}{\varepsilon_0} = 340\,\frac{Nm^2}{C}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss



calcolare il flusso del campo elettrico attraverso un quadrato di lato L generato da una carica puntiforme q posta sull'asse del quadrato a distanza L/2



Il flusso è indipendente dall'orientamento del quadrato nello spazio. Con 6 quadrati uguali è possibile costruire un cubo con la carica al centro.
Il flusso attraverso la superficie del cubo è data da 6 contributi uguali:

$$\phi(\vec{E})_S = \frac{1}{6}\phi(\vec{E})_{6S} = \frac{1}{6}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO teorema di Gauss

il teorema di Gauss consente di calcolare rapidamente il flusso del campo elettrostatico ma da questo è possibile ricavare l'espressione di E solo in quei pochi casi in cui, per ragioni di simmetria, è nota a priori la direzione del campo:

- radiale, sferica
- assiale, cilindrica
- planare

Si tratta, allora, di costruire una superficie CHIUSA costituita solo da elementi paralleli o perpendicolari alle linee di campo

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica puntiforme

Si è in resenza di una simmetria sferica: non esiste una causa per cui le linee di campo possono essere più concentrate ad un certo angolo.

Fissata una superficie sferica di raggio r (superficie di Gauss) il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti: $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,ds = E(r)\,\hat{r}\,\hat{n}\,4\pi r^2 = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica q uniformemente distribuita all'interno di una sfera di raggio R.

Data la simmetria sferica: $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ si considera una superficie sferica di raggio r (superficie di Gauss) per cui il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti:

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,ds = E(r)\,\hat{r}\,\hat{n}\,4\pi r^2 = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

se $r \geq R$ $\quad E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0}$

se $r \leq R$ …

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

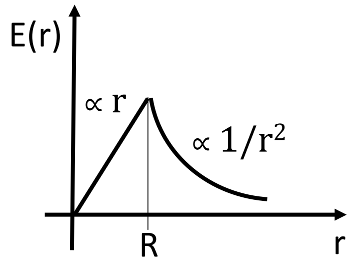
se $r \leq R$:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E}\,\hat{n}\,ds = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho \underbrace{4\pi r^2 dr}_{d\tau}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\,\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

se $r \leq R$ $\quad E(r) = \dfrac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}$

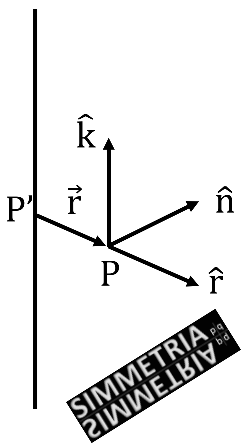
se $r \geq R$ $\quad E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da un filo indefinito uniformemente carico

i contributi al campo lungo $\hat{k}$ a distanza simmetrica rispetto a P' si annullano e non ce ne sono nella direzione $\hat{n}$: $\vec{E}$ è orientato lungo $\hat{r}$ e ha la stessa intensità a parità di distanza r: $\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$



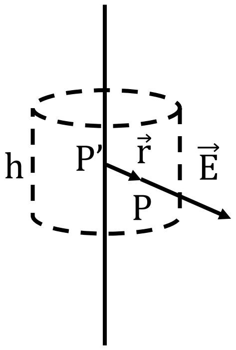
Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di raggio r con le basi distanti h: l'unico contributo al flusso del campo è attraverso la superficie laterale del cilindro dato che la normale delle basi è perpendicolare alla direzione del campo.

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da un filo indefinito uniformemente carico

$$\phi(\vec{E})_S = \int_{base1} \vec{E}\,\hat{n}_1\, ds + \int_{base2} \vec{E}\,\hat{n}_2\, ds + \int_{lat} \vec{E}\,\hat{r}\, ds =$$

$$= 2\pi r\, h\, E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, h}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di raggio r con le basi distanti h: l'unico contributo al flusso del campo è attraverso la superficie laterale del cilindro dato che la normale delle basi è perpendicolare alla direzione del campo.

LEZ 3 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

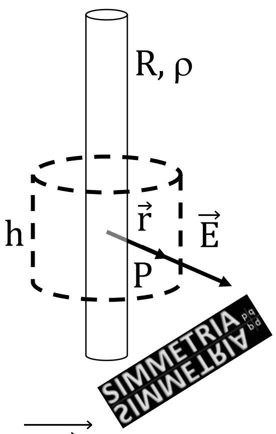
determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita all'interno di un <u>cilindro infinito di raggio R</u>

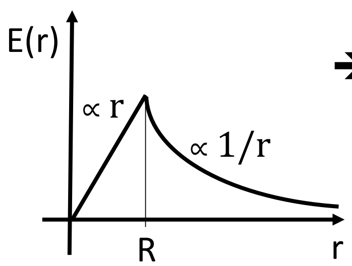
se $r \leq R$ $\quad 2\pi r\, h\, E(r) = \dfrac{\rho\, \underbrace{\pi r^2 h}_{d\tau}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}$$

se $r \geq R$ $\quad 2\pi r\, h\, E(r) = \dfrac{\rho\, \underbrace{\pi R^2 h}_{d\tau}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



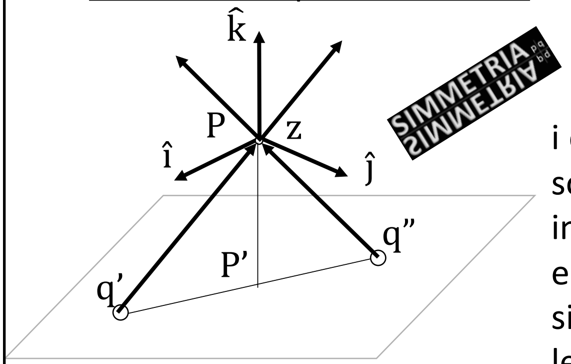


$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$$

LEZ 3 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da
una <u>distribuzione piana indefinita</u> con densità di carica σ

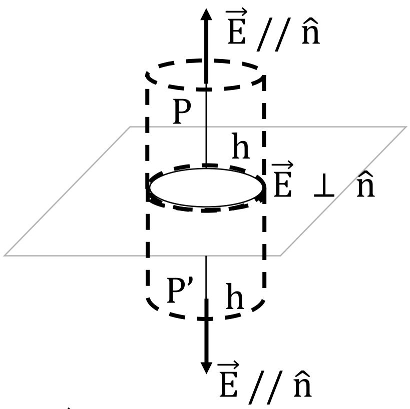


$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(z)\hat{k}$$

i contributi al campo lungo $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono nulli: preso un elemento infinitesimo di carica q’ ne esiste certamente un altro, q”, simmetrico rispetto a P’ per cui le componenti nel piano XY si annullano mentre restano solo quelle lungo Z

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da
una distribuzione piana indefinita con densità di carica σ



Per sfruttare la simmetria del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di sezione S con le basi distanti h dal piano.
L’unico contributo al flusso del campo è attraverso le superfici di base dato che la superficie laterale del cilindro è perpendicolare alla direzione del campo.

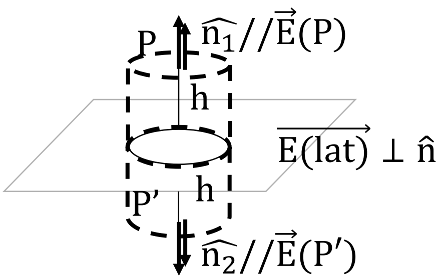
$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(z)\hat{k}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una distribuzione piana indefinita con densità di carica σ

$$\phi(\vec{E})_S = \int_{\text{base1}} \vec{E}\,\hat{n}_1\,ds + \int_{\text{base2}} \vec{E}\,\hat{n}_2\,ds + \int_{\text{lat}} \vec{E}\,\hat{n}\,ds =$$

$$= E(h)\,S + E(h)\,S + 0 = 2\,E(h)\,S = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,S}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow E(h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

LEZ 3