1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **riassunto Gauss**

- flusso di un vettore attraverso una superficie:

$$\phi(\vec{v})_S = \int_S \vec{v}\,\hat{n}\,ds$$

- teorema di Gauss: $\phi(\vec{E})_S = \int_{S_{chiusa}} \vec{E}\,\hat{n}\,ds = \frac{\sum_{i\,int} q_i}{\varepsilon_0}$

utile solo se per motivi di simmetria è nota la direzione di $\vec{E}$

LEZ 4 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esercizio** **teorema di Gauss**

determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica q distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi R_1 e R_2

$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}$$

per sfruttare la simmetria sferica del problema $\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$
si sceglie come superficie di Gauss una sfera di raggio r

se $r \le R_1$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = 0 \quad \Rightarrow E(r) = 0$

se $R_1 \le r \le R_2$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\rho\,\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1{}^3)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - R_1{}^3}{r^2}$

se $R_2 \le r$ $\quad 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\rho\,\frac{4\pi}{3}(R_2{}^3 - R_1{}^3)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

LEZ 4 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss

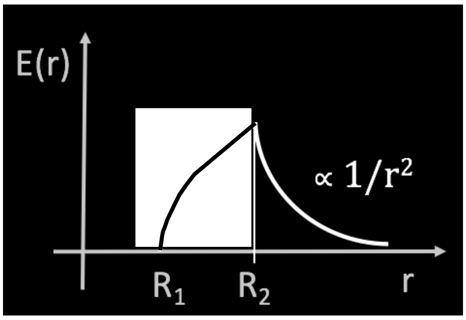
determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica q distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi R_1 e R_2

$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}$$

se $r \le R_1$ ➔ $E(r) = 0$

se $R_1 \le r \le R_2$ ➔ $E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - R_1{}^3}{r^2}$

se $R_2 \le r$ ➔ $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO divergenza matematica

si definisce divergenza del campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ la quantità scalare

$$\operatorname{div}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}$$

che rappresenta il rapporto fra il flusso di $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ attraverso una superficie infinitesima ΔS che racchiude il punto P(x,y,z) e il volume infinitesimo τ all'interno di tale superficie:

$$\operatorname{div}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Phi[\overrightarrow{v(x,y,z)}]_{\Delta S}}{\tau}$$

"quanto $\vec{v}$ esce (div>0) dal punto P"

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

- calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\,\vec{r}(x,y,z)$

$$\mathrm{div}[c(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})] = \frac{\partial(c\,x)}{\partial x} + \frac{\partial(c\,y)}{\partial y} + \frac{\partial(c\,z)}{\partial z} = 3\,c$$

- calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\,\frac{\hat{r}}{r^2} = c\,\frac{\vec{r}}{r^3}$

PER CASA

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **divergenza** **matematica**

teorema della divergenza: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\Phi(\vec{v})_S = \int_\tau \mathrm{div}(\vec{v})\,d\tau$$

cioè: $$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\,\hat{n}\,dS = \int_\tau \mathrm{div}(\vec{v})\,d\tau$$

sulla superficie all'interno del volume

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

I Maxwell

teorema di Gauss + teorema della divergenza:

dato un campo vettoriale $\overrightarrow{E(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\Phi(\vec{E})_S = \int_\tau \mathrm{div}(\vec{E})\, d\tau \qquad \Phi(\vec{E})_S = \int_\tau \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\, d\tau$$

$$\int_\tau \left[\mathrm{div}(\vec{E}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right] d\tau \quad \forall\tau \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

l'operatore divergenza applicato al campo elettrostatico $\mathrm{div}(\vec{E})$ individua i punti dello spazio in cui sono presenti le sorgenti del campo $\rho(\vec{r})$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

I Maxwell

la prima equazione di Maxwell nel vuoto è la forma locale del teorema di Gauss: per le applicazioni quantitative è più utile la forma integrale $\phi(\vec{E})_S = \frac{q}{\varepsilon_0}$ mentre per gli sviluppi teorici è più utile la forma differenziale che fornisce indicazioni punto per punto nello spazio $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO nabla ⇔ divergenza matematica

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{\mathrm{v}(\mathrm{x,y,z})}] = \frac{\partial \mathrm{v_x(x,y,z)}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y(x,y,z)}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v_z(x,y,z)}}{\partial \mathrm{z}}$$

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\,\hat{\mathrm{k}}$ operatore differenziale lineare nabla

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{v}(\mathrm{x,y,z})} = \frac{\partial \mathrm{v_x(x,y,z)}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y(x,y,z)}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v_z(x,y,z)}}{\partial \mathrm{z}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}(\mathrm{x,y,z})} = \frac{\rho(\mathrm{x,y,z})}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

LEZ 4 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO nabla ⇔ gradiente matematica

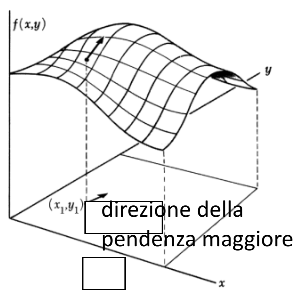
$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\,\hat{\mathrm{k}}$ operatore differenziale lineare nabla un altro impiego:

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = -\vec{\mathrm{F}}$

{dU differenziale esatto: $\mathrm{dU} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$ }

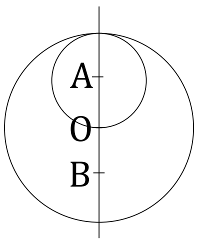
$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}[\mathrm{U(x,y,z)}] = \frac{\partial \mathrm{U(x,y,z)}}{\partial \mathrm{x}}\,\hat{\imath} + \frac{\partial \mathrm{U(x,y,z)}}{\partial \mathrm{y}}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial \mathrm{U(x,y,z)}}{\partial \mathrm{z}}\,\hat{\mathrm{k}}$$

$\vec{\nabla}\,\mathrm{U} = -\vec{\mathrm{F}}$

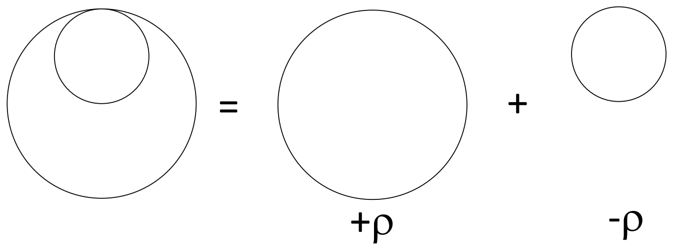


LEZ 4 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

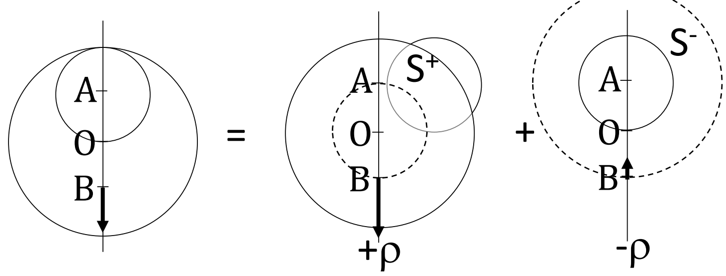
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss



in una sfera uniformemente carica ($\rho > 0$) di raggio R e centro O è ricavata una cavità di raggio R/2 e centro A (OA = R/2).
Determinare il valore del campo elettrostatico nel punto B simmetrico di A rispetto ad O



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss



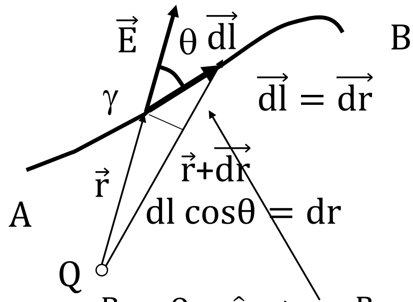
$$\Phi(\overrightarrow{E_+})_{S^+} = 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 E_+ = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_+ = \frac{\rho\left(\frac{R}{2}\right)}{3\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\overrightarrow{E_-})_{S^-} = -4\pi R^2 E_- = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_- = -\frac{\rho\left(\frac{R}{8}\right)}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho\left(\frac{3R}{8}\right)}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{8\varepsilon_0}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **potenziale**

consideriamo il lavoro che una carica q deve compiere per muoversi lungo una linea γ da A a B sotto l'azione della forza coulombiana generata da una carica Q: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$.



Il lavoro per unità di carica è dato da:

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{1}{q}\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} =$$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\overrightarrow{dl} = \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dl\cos\theta}{r^2} = \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$ $\forall\gamma$!!! Il campo elettrostatico è conservativo!

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **potenziale**

$$L_{AB_\gamma} = \int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = U(A) - U(B) \Rightarrow \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = U(\vec{r}) - U(\overrightarrow{r_0})$$

$$\Rightarrow U(\vec{r}) = U(\overrightarrow{r_0}) + \int_{\overrightarrow{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{F}\,\overrightarrow{dl}$$

energia potenziale

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{U(A)-U(B)}{q} = V(A) - V(B) \quad >>>$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = V(\overrightarrow{r_0}) + \int_{\overrightarrow{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

potenziale (elettrostatico)

1 volt = 1 joule/1 coulomb: 1 V = 1 J/1 C

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

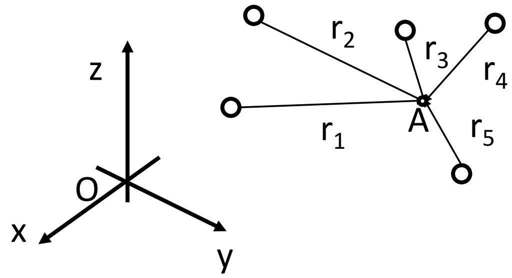
potenziale

>>> $\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{U(A)-U(B)}{q} = V(A) - V(B)$

differenza di potenziale (d.d.p.) o tensione elettrica

spesso si fissa il potenziale all'infinito: $V(\overrightarrow{r_0}) = V(\infty) = 0\ V$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty}\right) = V(A) - V(\infty) \Rightarrow V(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$

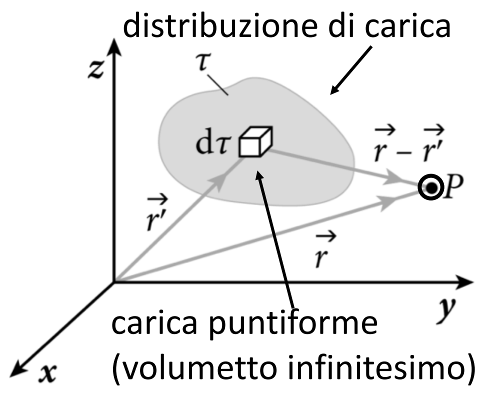


$$V(A) = \sum \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

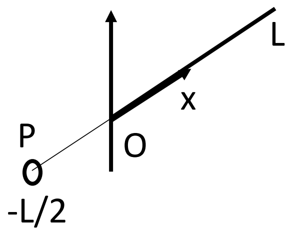
potenziale

per una distribuzione qualsiasi di cariche: $V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r'})d\tau}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio potenziale

determinare l'energia cinetica con la quale una carica q=e arriverebbe all'infinito sotto l'azione del campo generato da un filo rettilineo uniformemente carico (λ=1μC/m) di lunghezza L.
La carica è inizialmente ferma nel punto P sull'asse del filo a distanza L/2 da una estremità



Il campo elettrostatico è conservativo:

$$\cancel{K(P)} + U(P) = K(\infty) + \cancel{U(\infty)}$$

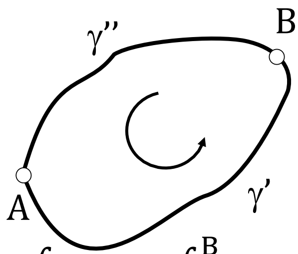
$\rightarrow K(\infty) = U(P)$ con $U(P) = q\,V(P)$

$$V(P) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{\frac{L}{2} + x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3/2L}{L/2}\right)$$

$$V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r'})d\tau}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \qquad K(\infty) = \frac{q\,\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln 3 = 1{,}6\ 10^{-15}\ J = 10\ keV$$

LEZ 4 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO potenziale



$\gamma = \gamma' + \gamma''$

calcoliamo la circuitazione di $\vec{E}$ lungo la linea chiusa γ

$$\oint_\gamma \vec{E}\,\vec{dl} = \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\vec{dl} + \int_{B_{\gamma''}}^{A} \vec{E}\,\vec{dl} = \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\vec{dl} - \int_{A_{\gamma''}}^{B} \vec{E}\,\vec{dl} = 0$$

se il campo è elettrostatico(l'integrale non dipende da γ)

se in alcuni tratti il campo E non è elettrostatico (conservativo) allora $\oint_\gamma \vec{E}\,\vec{dl}$ = f.e.m. forza elettromotrice (f.e.m. = f = $\mathcal{E}$)

unità di misura: il volt

LEZ 5 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **rotore** **matematica**

si defisce rotore del campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ la quantità vettoriale:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{v(x,y,z)} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{dv_z}{dy} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{dv_z}{dx} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{dv_y}{dx} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

che rappresenta il rapporto fra la circuitazione di $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ lungo una linea chiusa infinitesima C che circonda il punto P(x,y,z) e l'area infinitesima di superficie ΔS delimitata da C:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \overrightarrow{v(x,y,z)}\, \overrightarrow{dl}}{\Delta S}$$

"quanto $\vec{v}$ ruota intorno al punto P"

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

- calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{r}(x,y,z)$

>>> avevamo già calcolato $\mathrm{div}(c\vec{r}) = 3c$

$$\overrightarrow{rot}\,[c(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k})] =$$
$$= \hat{i}\left(\frac{d(cz)}{dy} - \frac{\partial(cy)}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{d(cz)}{dx} - \frac{\partial(cx)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{d(cy)}{dx} - \frac{\partial(cx)}{\partial y}\right)$$
$$= 0$$

questo significa che le linee del campo $c\vec{r}$ non hanno vortici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$
con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-\omega y) - \hat{\jmath}(0-\omega x) + \hat{k}(0-0) = $$
$$= -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\overrightarrow{rot}[\vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}\left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(0 - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{d(\omega x)}{dx} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right) =$$
$$= 2\omega\,\hat{k}$$

questo significa che le linee del campo $\vec{\omega}\times\vec{r}$ hanno vortici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

calcolare la divergenza del campo

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$$

con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\mathrm{div}[\vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)] = \frac{\partial(-\omega\, y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega\, x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

questo significa che le linee del campo $\vec{\omega}\times\vec{r}$ non hanno sorgenti

i campi vettoriali rotazionali con divergenza nulla sono definiti solenoidali

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO rotore matematica

teorema del rotore: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una linea CHIUSA C che è il bordo di una superficie S, si ha:

$$\oint_c \vec{v}\,\vec{dl} = \int_{S_{aperta}} \overrightarrow{rot}(\vec{v})\,dS$$

analogo al

teorema della divergenza: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\,\hat{n}\,dS = \int_\tau div(\vec{v})\,d\tau$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO III Maxwell

conservatività del campo elettrostatico + teorema del rotore: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{E(x,y,z)}$, presa una linea chiusa C che è il bordo della superficie S, si ha:

$$\oint_C \vec{E}\,\vec{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{E})\,dS \qquad \oint_C \vec{E}\,\vec{dl} = 0$$

$$\forall S \rightarrow \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0}$$

l'operatore rotore applicato al campo elettrico $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$ individua i punti dello spazio in cui sono presenti vortici del campo (assenti se il campo è elettrostatico)