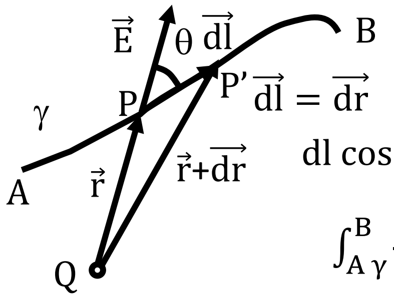
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — la lezione precedente

consideriamo il lavoro che una carica q deve compiere per muoversi lungo una linea γ da A a B sotto l'azione della forza coulombiana generata da una carica Q: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$.



$\vec{dl} = \vec{dr}$

Il lavoro per unità di carica è dato da:

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{1}{q}\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\,\vec{dl} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{E}\,\vec{dl} =$$

$\mathrm{dl}\cos\theta = \mathrm{dr}$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\vec{dl} =$$

$$\int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{dl}\cos\theta}{r^2} = \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{dr}}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$ $\forall\gamma$!!! Il campo elettrostatico è conservativo!

LEZ 5 — SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — potenziale elettrico

$$L_{AB_\gamma} = \int_A^B \vec{F}\,\vec{dl} = U(A) - U(B) \Rightarrow \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} \vec{F}\,\vec{dl} = U(\vec{r}) - U(\vec{r_0})$$

$$\Rightarrow U(\vec{r}) = U(\vec{r_0}) + \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{F}\,\vec{dl}$$

energia potenziale

>>>

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{U(A)-U(B)}{q} = V(A) - V(B)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = V(\vec{r_0}) + \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{E}\,\vec{dl}$$

potenziale (elettrostatico)

1 volt = 1 joule/1 coulomb: 1 V = 1 J/1 C

LEZ 5 — SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

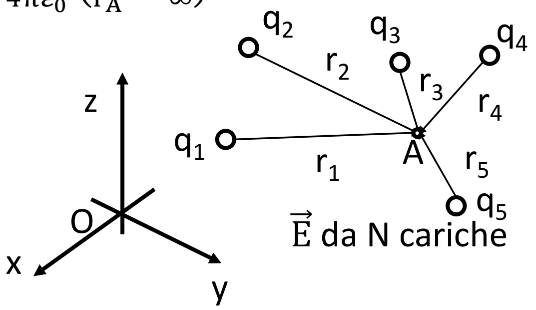
potenziale

>>> $\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V(A) - V(B)$ $\vec{E}$ da una carica

V(A)-V(B): differenza di potenziale (d.d.p.) o tensione elettrica

spesso si fissa il potenziale all'infinito: $V(\overrightarrow{r_0}) = V(\infty) = 0$ V

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty}\right) = V(A) - V(\infty) \Rightarrow V(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$



$\vec{E}$ da N cariche

$$V(A) = \sum_{i=1,N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

LEZ 5

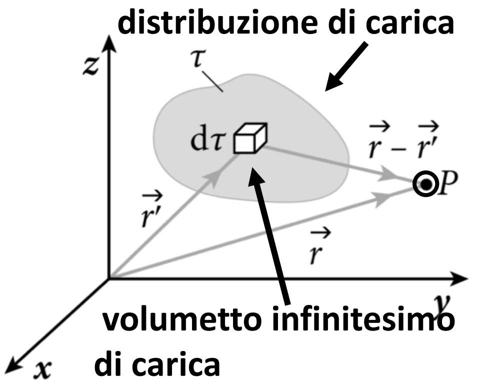
SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

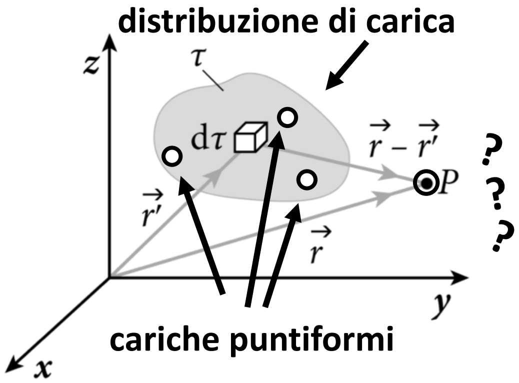
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

potenziale

per una distribuzione qualsiasi di cariche: $V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\overrightarrow{r'})d\tau}{|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}$

e se la carica fosse...



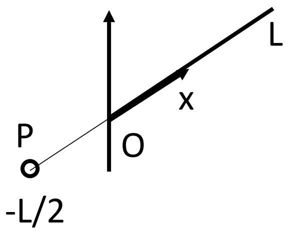


LEZ 5

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II – A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio potenziale

determinare l'energia cinetica con la quale una carica q=e arriverebbe all'infinito sotto l'azione del campo generato da un filo rettilineo uniformemente carico (λ=1μC/m) di lunghezza L.
La carica è inizialmente ferma nel punto P lungo la direzione del filo a distanza L/2 da una estremità



Il campo elettrostatico è conservativo:

$$\cancel{K(P)} + U(P) = K(\infty) + \cancel{U(\infty)}$$

→ $K(\infty) = U(P)$ con $U(P) = q\,V(P)$

$$V(P) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\,dx}{\frac{L}{2}+x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3/2L}{L/2}\right)$$

$$K(\infty) = qV(P) = e\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3 = 1{,}6\ 10^{-15}\ \mathrm{J}$$

$$V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r'})d\tau}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

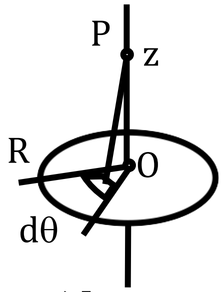
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO unità di misura

l'energia potenziale di una carica elementare **e** posta in un punto in cui è presente il potenziale V è pari a U = e V.
Se V = 1 V allora U = 1,6 x 10^{-19} C x 1 V = 1,6 x 10^{-19} J.
Questa unità di misura, l'elettronvolt, è ricorrente nei fenomeni chimici, atomici e subatomici (cariche elementari)

$$K(\infty) = 1{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} = 1{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} \times \frac{1\ \mathrm{eV}}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 10^4\ \mathrm{eV} = 10\ \mathrm{keV}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio potenziale

Una carica è uniformemente distribuita ($\sigma = 1\ \text{nC/m}^2$) su un disco di raggio R = 30 cm. Calcolare la differenza di potenziale (tensione) fra il punto O al centro del disco e un punto P sull'asse del disco a distanza h = 40 cm da O.



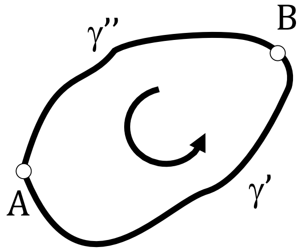
$$V(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, r d\theta\, dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

$$\Delta V = V(O) - V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R - \left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right)\right] = +11{,}3\ \text{V}$$

$$V(\vec{r}) = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\left(\overrightarrow{r'}\right) dS}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO potenziale



$\gamma = \gamma' + \gamma''$

calcoliamo la circuitazione di $\vec{E}$ lungo la linea chiusa γ

$$\oint_\gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} + \int_{B_{\gamma''}}^{A} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} =$$

$$= \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} - \int_{A_{\gamma''}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \mathbf{0}$$

se il campo è elettrostatico (l'integrale non dipende da γ)

se in alcuni tratti il campo E non è conservativo $\oint_\gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \text{f.e.m.}$

forza elettromotrice (f.e.m. = f = $\mathcal{E}$): lavoro delle forze non conservative per unità di carica f.e.m. = $L_{NON\ CONS}/q$

unità di misura: il volt

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **rotore** **matematica**

si definisce rotore del campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ il vettore:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{v(x,y,z)} =$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

che rappresenta il rapporto fra la circuitazione di $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ lungo una linea chiusa infinitesima C che circonda il punto P(x,y,z) e l'area infinitesima di superficie ΔS delimitata da C:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \overrightarrow{v(x,y,z)}\,\overrightarrow{dl}}{\Delta S}$$

"quanto $\vec{v}$ ruota intorno al punto P"

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\vec{r}(x,y,z)$

>>> avevamo già calcolato $\mathrm{div}(c\vec{r}) = 3c$

$$\overrightarrow{rot}\,[c(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})] =$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial(cz)}{\partial y} - \frac{\partial(cy)}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial(cz)}{\partial x} - \frac{\partial(cx)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(cy)}{\partial x} - \frac{\partial(cx)}{\partial y}\right)$$

$$= 0$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

questo significa che le linee del campo $c\vec{r}$ non hanno vortici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$
con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-\omega y) - \hat{\jmath}(0-\omega x) + \hat{k}(0-0) = -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\overrightarrow{rot}[\vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}\left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(0 - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{d(\omega x)}{dx} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\omega\,\hat{k}$$

questo significa che le linee del campo $\vec{\omega}\times\vec{r}$ hanno vortici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** **matematica**

calcolare la divergenza di $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$
con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\mathrm{div}[\vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)] = \frac{\partial(-\omega\, y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega\, x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

questo significa che le linee del campo $\vec{\omega}\times\vec{r}$ non hanno sorgenti cioè sono linee chiuse

i campi vettoriali rotazionali con divergenza nulla sono definiti **solenoidali**

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO rotore STOKES matematica

teorema del rotore: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una linea CHIUSA C che racchiude la superficie S, si ha:

$$\oint_c \vec{v}\,\overrightarrow{dl} = \int_{S_{aperta}} \overrightarrow{rot}(\vec{v})\,\hat{n}\,dS$$

analogo al

teorema della divergenza: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\,\hat{n}\,dS = \int_\tau div(\vec{v})\,d\tau$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO III Maxwell

conservatività del campo elettrostatico + teorema del rotore: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{E(x,y,z)}$, presa una linea chiusa C che racchiude la superficie S, si ha:

$$\oint_C \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{E})\,\hat{n}\,dS$$

$\forall$S con bordo C

$$\oint_C \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0}$$

in elettrostatica

l'operatore rotore applicato al campo elettrico $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$ individua i punti dello spazio in cui sono presenti vortici del campo (assenti se il campo è elettrostatico)

vedremo con i campi magnetici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — potenziale e campo e.s.

>>> $V(\vec{r}) = V(\vec{r_0}) + \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{E}\,\vec{dl}$ $\qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$dV(\vec{r}) = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}dz =$$

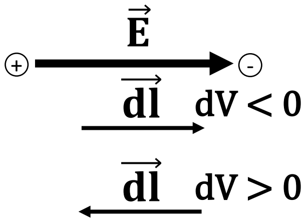
$$= \hat{\imath}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{\imath}dx + \hat{\jmath}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{\jmath}dy + \hat{k}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{k}dz =$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \vec{dl} = -\vec{E}\,\vec{dl}$$

0 V

-40 V
-30 V
-20 V

-10 V

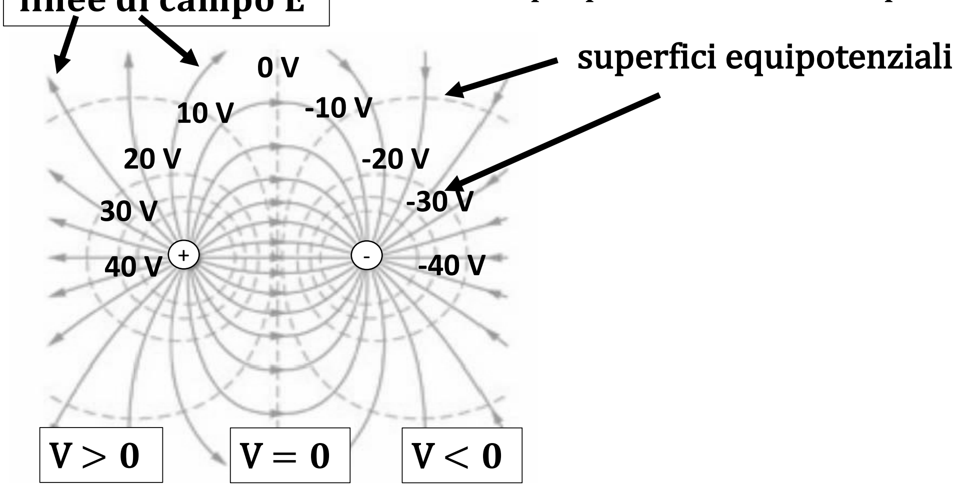


LEZ 5

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO — potenziale e campo e.s.

>>> $dV(\vec{r}) = -\vec{E}\,\vec{dl}$

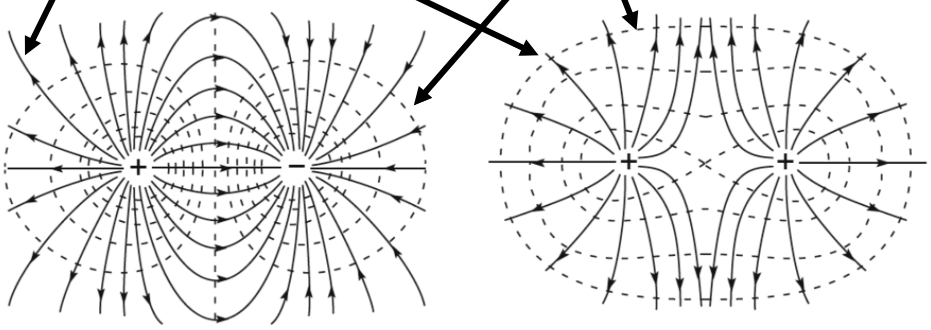
se $\vec{E} \perp \vec{dl}$ allora $dV(\vec{r}) = 0$ cioè il potenziale non cambia muovendosi in direzione perpendicolare al campo



LEZ 5

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **superfici equipotenziali**

linee di campo $\vec{E}$ **superfici equipotenziali**



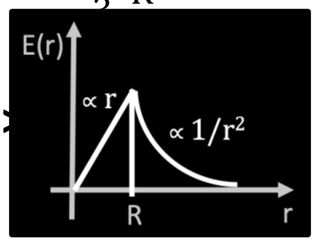
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** $\vec{E}$, V, ρ

>>> campo elettrostatico e potenziale di una sfera uniformemente carica $\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$

se $r \leq R$ $\quad E(r) = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$

se $r \geq R$ $\quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

>>



al solito, considerando $V(\infty) = 0$ partiamo da $r \geq R$

➔ $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$ ➔ $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ $\quad V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$ **>>>**

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **esempio** $\vec{E}$, V, ρ

poi, fra 0 e R

>>> $V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$

$$\rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \quad \rightarrow V(r) = V(R) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r -r\,dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{R^2 - r^2}{2} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{3}{2}$$