

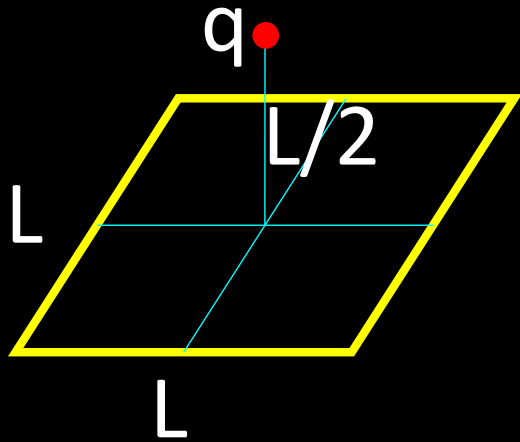
- flusso di un vettore attraverso una superficie:

$$\phi(\vec{v})_S = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} \, ds$$

- teorema di Gauss: $\phi(\vec{E})_{S_{\text{chiusa}}} = \int_{S_{\text{chiusa}}} \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \frac{\sum_i \text{int } q_i}{\epsilon_0}$

utile solo se per motivi di simmetria è nota la direzione di $\vec{E}$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss



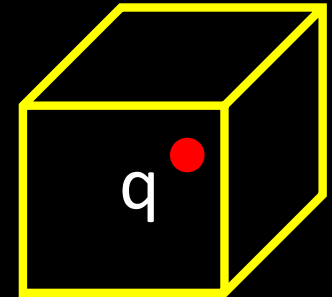
calcolare il flusso del campo elettrico attraverso un quadrato di lato L generato da una carica puntiforme q posta sull'asse del quadrato a distanza L/2

Il flusso è indipendente dall'orientamento del quadrato nello spazio.

Con 6 quadrati uguali è possibile costruire un cubo con la carica al centro.

Il flusso attraverso la superficie del cubo è data da 6 contributi uguali:

$$\phi(\vec{E})_S = \frac{1}{6} \phi(\vec{E})_{6S} = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

teorema di Gauss

il teorema di Gauss consente di calcolare rapidamente il flusso del campo elettrostatico ma da questo è possibile ricavare l'espressione di E solo in quei pochi casi in cui, per ragioni di simmetria, è nota a priori la direzione del campo:

- radiale, sferica
- assiale, cilindrica
- planare

SIMMETRIA
21WWE1B1A
pq
bd

Si tratta, allora, di costruire una superficie CHIUSA costituita solo da elementi paralleli o perpendicolari alle linee di campo

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio

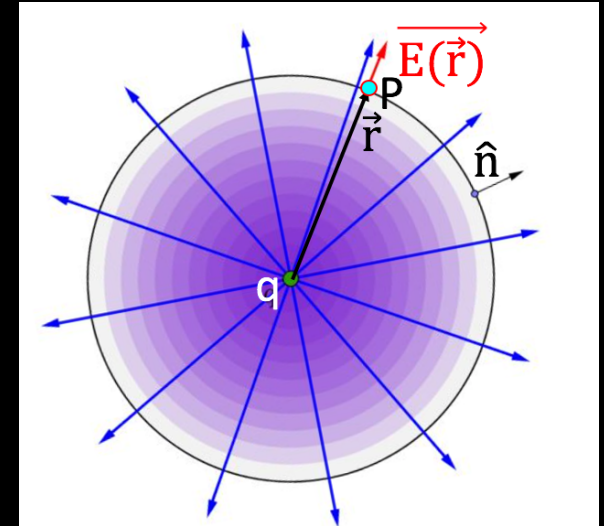
determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica puntiforme

Si è in presenza di una **simmetria sferica**: non esiste una causa per cui le linee di campo possano essere più concentrate ad un certo angolo.

Fissata una **superficie sferica** di raggio r (superficie di Gauss) il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{n} dS = E(r) \int_S dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0}$$

teorema di Gauss



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

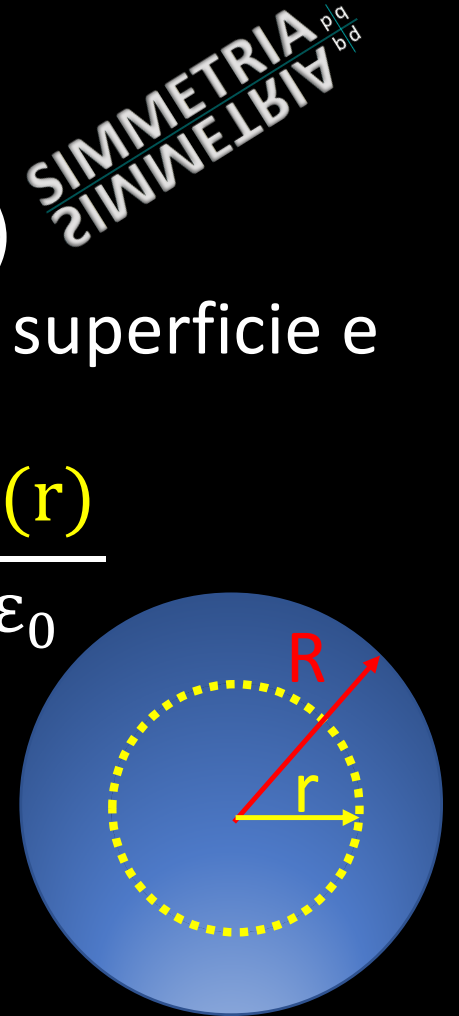
determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita all'interno di una sfera di raggio R .

Data la simmetria sferica: $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ si considera una superficie sferica di raggio r (superficie di Gauss) per cui il campo è sempre parallelo alla normale alla superficie e uguale in intensità in tutti i punti:

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = E(r) \hat{r} \cdot \hat{n} \, 4\pi r^2 = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

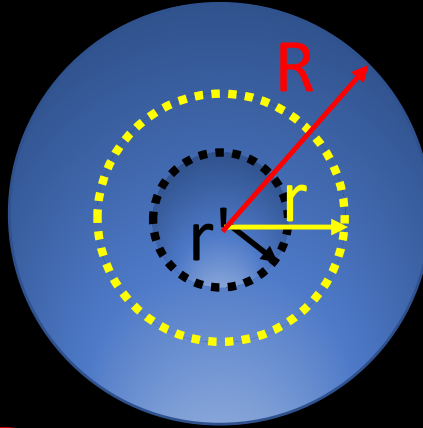
$$\text{se } r \geq R \quad q(r) = Q \quad E(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{se } r \leq R \quad q(r) \dots$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

se $r \leq R$:

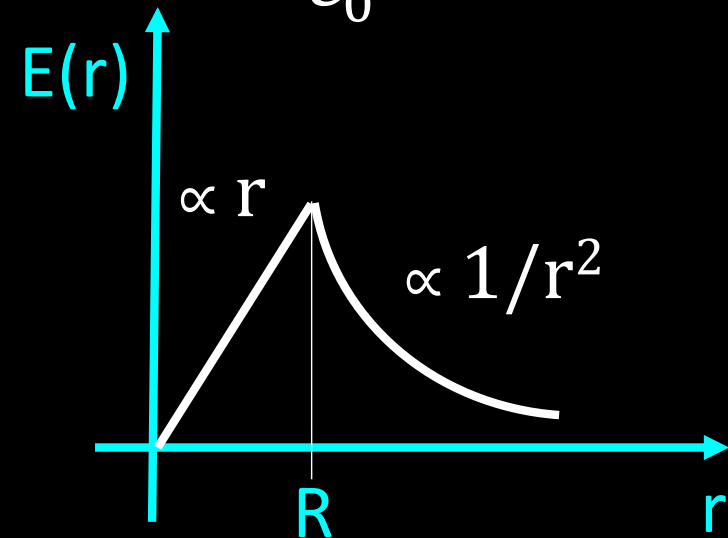


$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\phi(\vec{E})_S = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho \, 4\pi r'^2 \, dr'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \, \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

se $r \leq R$ $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$

se $r \geq R$ $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

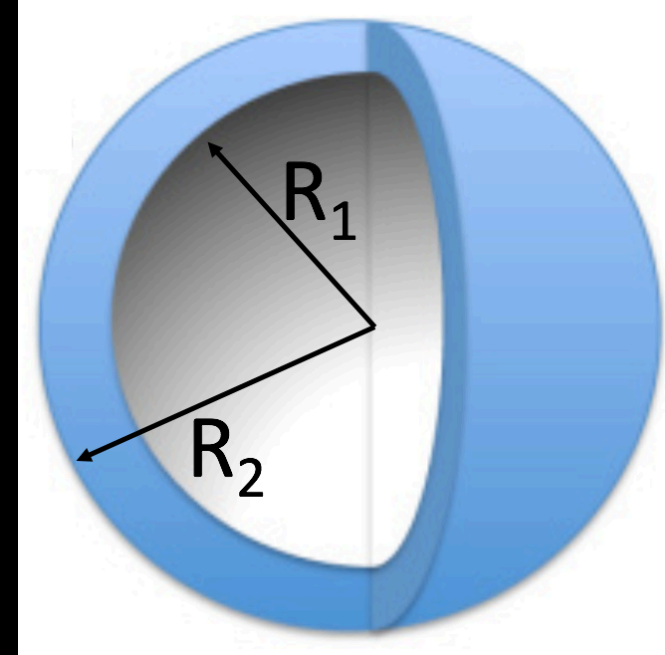


1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio

teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi R_1 e R_2

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)}$$



per sfruttare la simmetria sferica del problema

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

si sceglie come superficie di Gauss una sfera di raggio r

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio

teorema di Gauss

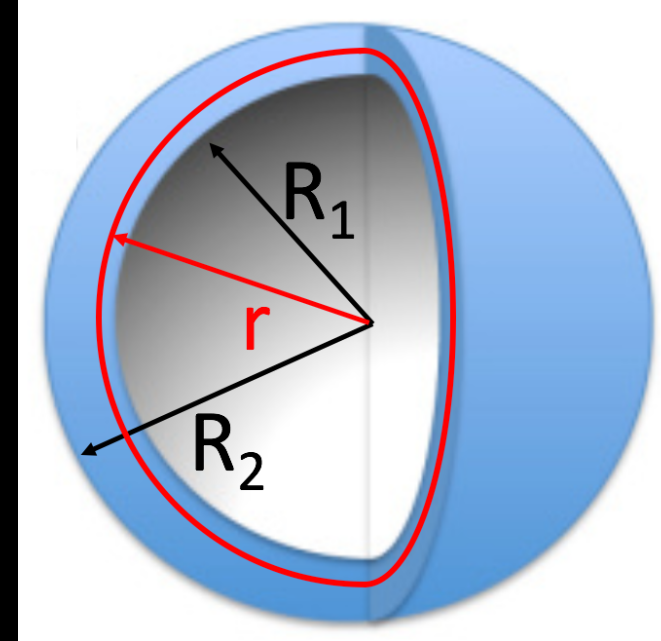
$$\overrightarrow{E(\vec{r})} = E(r)\hat{r}$$

si sceglie come superficie di Gauss una sfera di raggio r

$$\text{se } r \leq R_1 \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow E(r) = 0$$

$$\text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

$$\text{se } r \geq R_2 \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio

teorema di Gauss

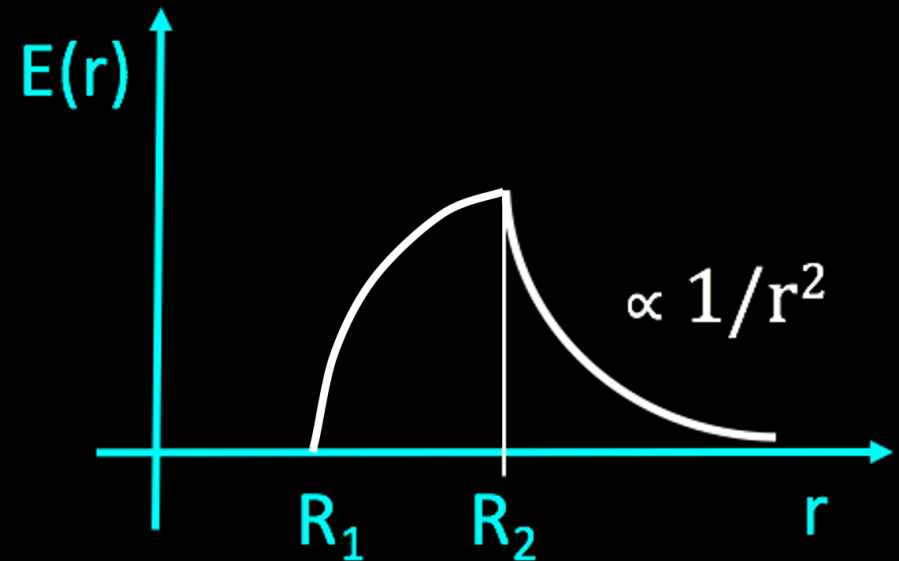
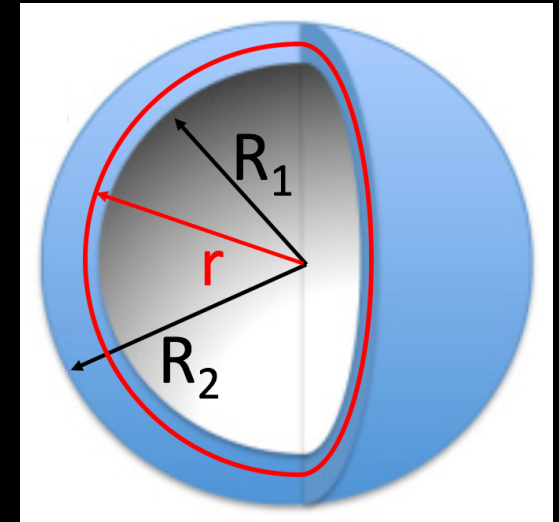
il campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi R_1 e R_2

$$\text{se } r \leq R_1 \quad \rightarrow \quad E(r) = 0$$

$$\text{se } R_1 \leq r \leq R_2 \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

$$\text{se } r \geq R_2 \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

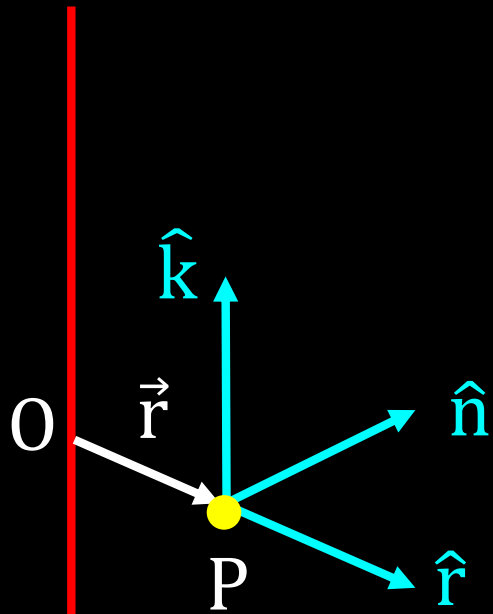
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3)}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato in un punto P da un filo indefinito uniformemente carico (λ)

i contributi al campo lungo $\hat{k}$ a **distanza simmetrica rispetto a O** si annullano e **non ce ne sono nella direzione $\hat{n}$** : $\vec{E}$ è orientato lungo $\hat{r}$ e ha la stessa intensità a parità di distanza r: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

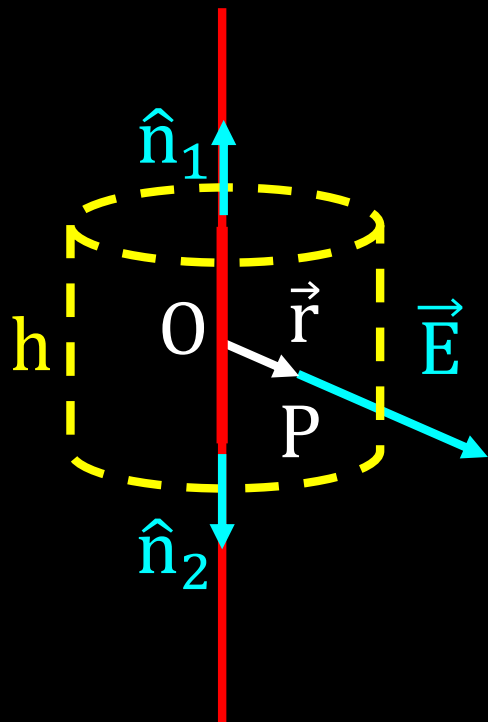


Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una **superficie di Gauss cilindrica** di raggio r con le basi distanti h

SIMMETRIA
cilindrica

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

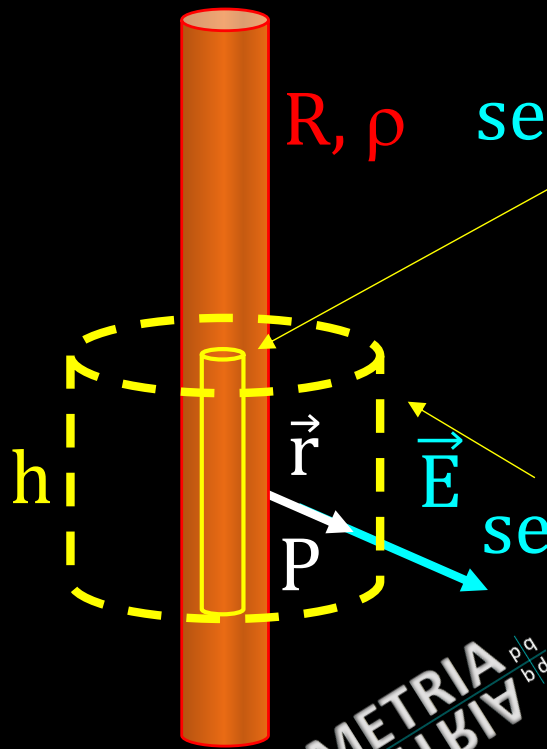
$$\begin{aligned}\phi(\vec{E})_S &= \int_{\text{base1}} \vec{E} \hat{n}_1 dS + \int_{\text{base2}} \vec{E} \hat{n}_2 dS + \int_{\text{lat}} \vec{E} \hat{r} dS = \\ &= 2\pi r h E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\end{aligned}$$



Per sfruttare la simmetria cilindrica del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di **raggio r con le basi distanti h** : l'unico contributo al flusso del campo è attraverso la superficie laterale del cilindro dato che la normale delle basi è perpendicolare alla direzione del campo.

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una densità di carica $\rho(r) = kr$ distribuita all'interno di un cilindro di lunghezza infinita di raggio R



altezza infinita di raggio R

se $r \leq R$

$$2\pi r h E(r) = \frac{\int_0^r \rho(r') 2\pi r' dr' h}{\epsilon_0}$$
$$= \frac{\int_0^r k r' 2\pi r' dr' h}{\epsilon_0} = \frac{k r^3 2\pi h}{3\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{k r^2}{3\epsilon_0}$$

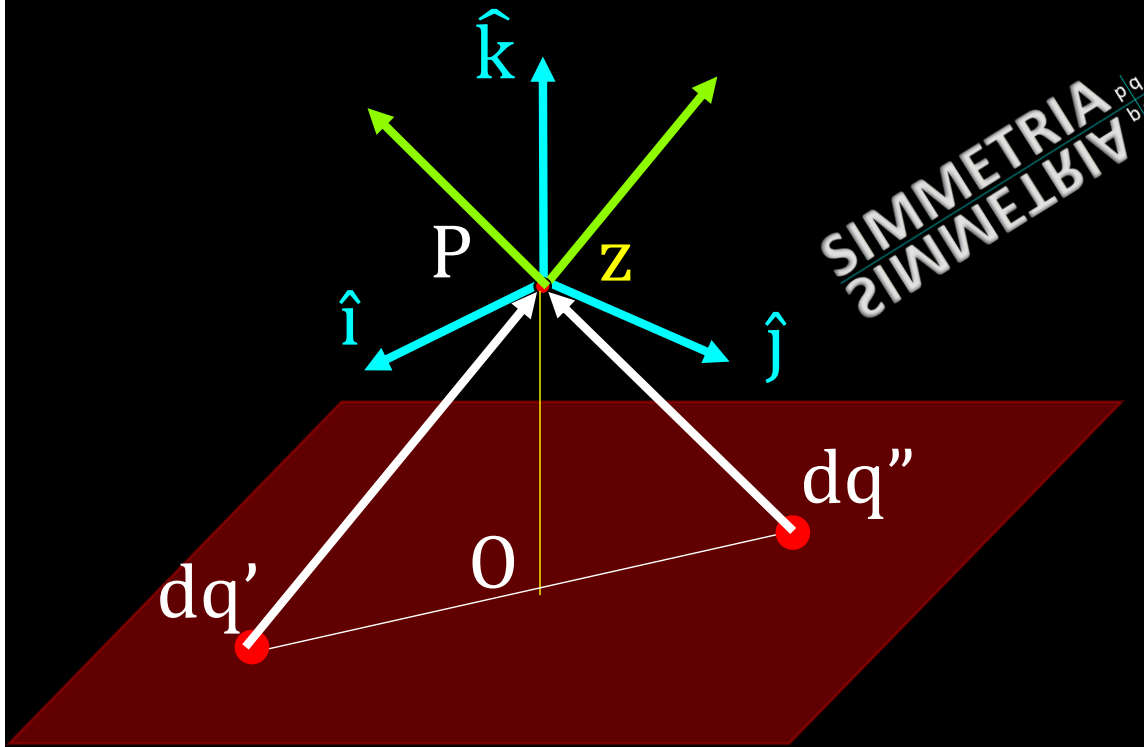
se $r \geq R$

$$2\pi r h E(r) = \frac{\int_0^R \rho(r') 2\pi r' dr' h}{\epsilon_0}$$
$$= \frac{\int_0^R k r' 2\pi r' dr' h}{\epsilon_0} = \frac{k R^3 2\pi h}{3\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{k R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una distribuzione piana indefinita con densità di carica σ

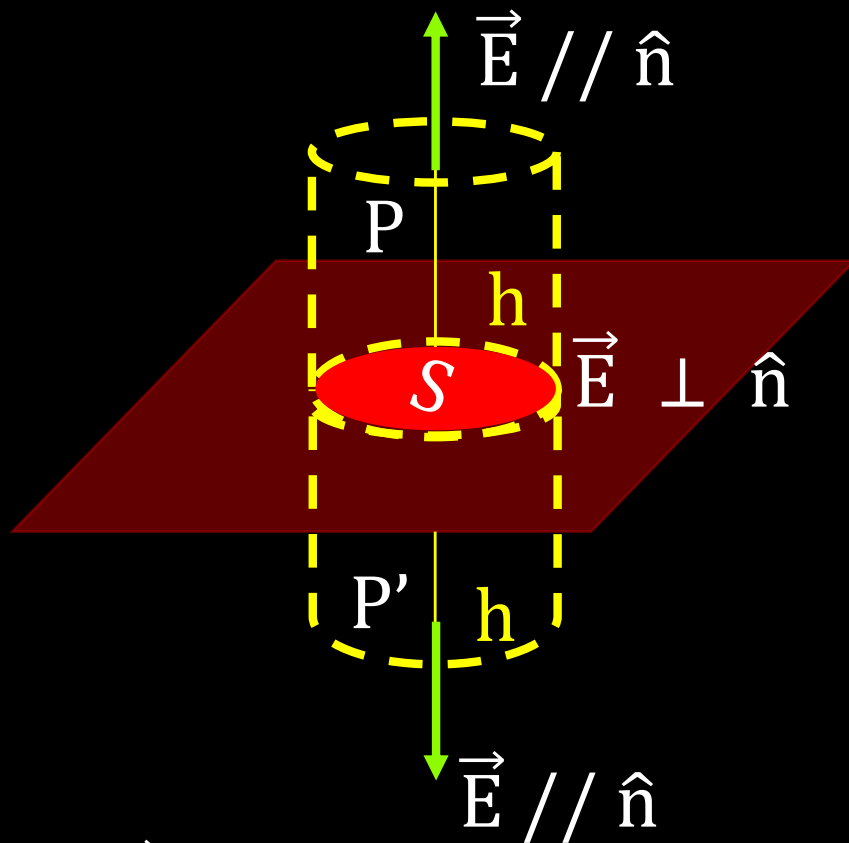


$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}$$

i contributi al campo lungo $\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono nulli: preso un elemento infinitesimo di carica dq' ne esiste certamente un altro, dq'' , simmetrico rispetto a O per cui le componenti nel piano XY si annullano mentre restano solo quelle lungo Z

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una distribuzione piana indefinita con densità di carica σ



$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}$$

Per sfruttare la simmetria del sistema si sceglie una superficie di Gauss cilindrica di sezione S con le basi distanti h dal piano.

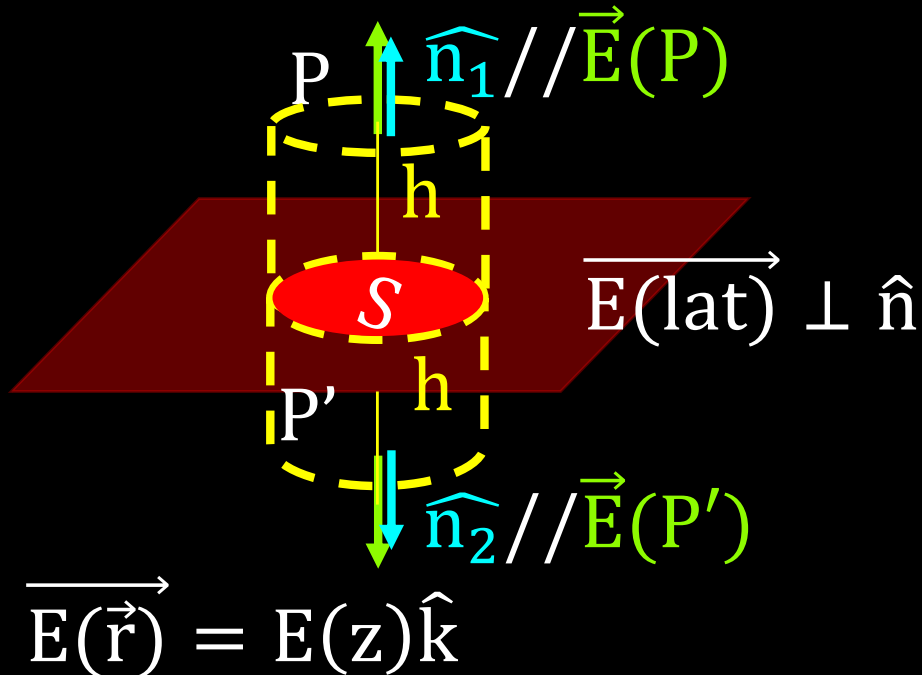
L'unico contributo al flusso del campo è attraverso le superfici di base dato che la superficie laterale del cilindro è perpendicolare alla direzione del campo.

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio teorema di Gauss

determinare il valore campo elettrostatico generato da una distribuzione piana indefinita con densità di carica σ

$$\begin{aligned}\phi(\vec{E})_S &= \int_{\text{base1}} \vec{E}_1 \hat{n}_1 dS + \int_{\text{base2}} \vec{E}_2 \hat{n}_2 dS + \int_{\text{lat}} \vec{E} \hat{n} dS = \\ &= E(\mathbf{h}) S + E(-\mathbf{h}) S + 0 = 2 E(\mathbf{h}) S = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\rightarrow E(h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO divergenza matematica

si definisce **divergenza** del campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ la quantità scalare

$$\text{div}[\vec{v}(x, y, z)] = \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x, y, z)}{\partial z}$$

che rappresenta il rapporto fra il flusso di $\vec{v}(x, y, z)$ attraverso una superficie infinitesima ΔS che racchiude il punto $P(x, y, z)$ e il volume infinitesimo τ all'interno di tale superficie:

$$\text{div}[\vec{v}(x, y, z)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi[\vec{v}(x, y, z)]_{\Delta S}}{\tau}$$

“quanto $\vec{v}$ esce ($\text{div} > 0$) dal punto P ”

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio matematica

- calcolare la divergenza del campo $\vec{v}(x, y, z) = c \vec{r}(x, y, z)$

$$\text{div}[c(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})] = \frac{\partial(c x)}{\partial x} + \frac{\partial(c y)}{\partial y} + \frac{\partial(c z)}{\partial z} = 3 c \quad \text{radiale} \neq 0$$

- calcolare la divergenza del campo $\vec{v}(x, y, z) = \vec{\omega}(x, y, z) \times \vec{r}(x, y, z)$
con $\vec{\omega}(x, y, z) = \omega \hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

rotazionale=0

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - \omega y) - \hat{j}(0 - \omega x) + \hat{k}(0 - 0) = -\hat{i}\omega y + \hat{j}\omega x$$

$$\text{div}[-\hat{i}\omega y + \hat{j}\omega x] = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

- calcolare la divergenza del campo $\vec{v}(x, y, z) = c \frac{\hat{r}}{r^2} = c \frac{\vec{r}}{r^3}$

PER CASA