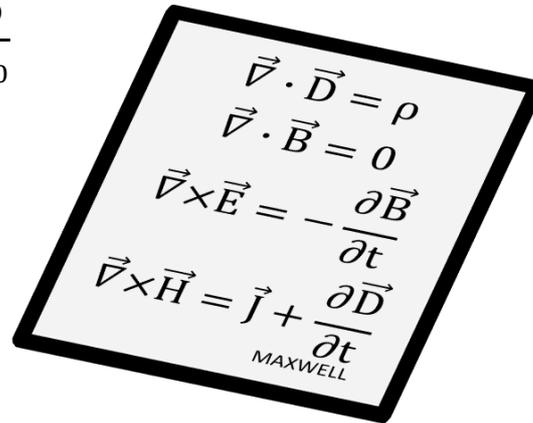


1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \hat{r} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{rot}(\vec{E}) = 0$$

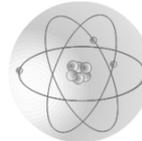


LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

idrogeno: $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{m}$



atomo di Bohr

$$F_{\text{Coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e^2}{r^2} = -m \frac{v^2}{r}$$

$$\swarrow \quad mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad \rightarrow$$

$$K(r) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$U(r) = qV = -e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} < 0$$

$$E(r) = K + U = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \gg \gg$$

$$\begin{aligned} m_e &= 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \\ v(r_0) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0 m}} = \\ &= 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,7\% c \end{aligned}$$

$$V(\infty) = 0$$

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **atomo di Bohr**

$r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{m}$

$\gg \gg E = K + U = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} < 0 !!!$

$U(r)$ $E=U$ $U(\infty) = 0$

E $-13,6 \text{ eV}$

$K=E-U$ $E>U \ K=0$ $K<0 !!! \rightarrow$ sistema legato: $r < r_0$

$K>0$

$$E(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} = -\frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}} \text{J} = -21,7 \cdot 10^{-19} \text{J}$$

$$= -21,7 \cdot 10^{-19} \text{J} \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}} = -13,6 \text{ eV}$$

energia di ionizzazione

LEZ 6 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **laplaciano** **matematica**

potenziale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ Gauss $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

$$= -\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V = -\nabla^2 V$$

laplaciano $\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \text{div}(\vec{E}) = -\text{div}[\overrightarrow{\text{grad}}(V)] = -\nabla^2 V$

$\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

equazione di Poisson

LEZ 6 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO $\overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{grad}} V] = 0$ campo e.s.

verifichiamo che il campo elettrostatico è irrotazionale
(linee di campo senza vortici)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \hat{i} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

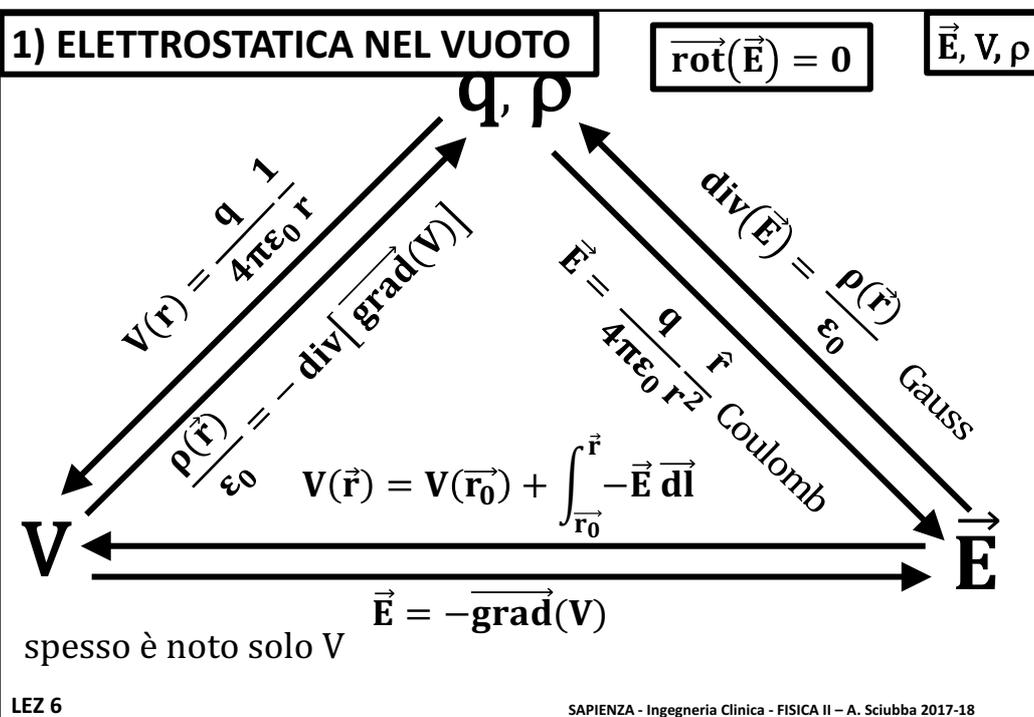
$$\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{E}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

$$= \hat{i} \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) - \hat{j} \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) + \hat{k} \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

teorema di SHWARZ sulle derivate parziali miste

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio \vec{E}, V, ρ

in una regione di spazio è nota $V(\vec{r}) = \alpha r^2$ con $\alpha = 10^5 \text{ V/m}^2$
 Determinare \vec{E} e la densità di carica in $r = 1 \text{ cm}$

$$V(\vec{r}) = \alpha r^2 = \alpha (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\left[\hat{i} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\left[\hat{i} 2\alpha x + \hat{j} 2\alpha y + \hat{k} 2\alpha z \right] = -2\alpha \vec{r} \\ E(1 \text{ cm}) &= -2 \text{ kV/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} & \rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \text{div}(\vec{E}) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= -\epsilon_0(2\alpha + 2\alpha + 2\alpha) & &= -6\alpha \epsilon_0 = -5,3 \mu\text{C/m}^3 \end{aligned}$$

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio \vec{E}, V, ρ

direttamente: $\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\nabla^2 V$

$$V(\vec{r}) = \alpha r^2 = \alpha (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \rho(\vec{r}) &= -\epsilon_0 \nabla^2 V = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \\ &= -\epsilon_0(2\alpha + 2\alpha + 2\alpha) = -6\alpha \epsilon_0 \end{aligned}$$

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO Helmholtz matematica

teorema di Helmholtz: se di un campo vettoriale sono noti in tutti i punti dello spazio la divergenza e il rotore è possibile, fissate le condizioni al contorno, ricavare il valore del campo in tutti i punti dello spazio.

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

esempio: la I e la III equazione di Maxwell per l'elettrostatica nel vuoto consentono di conoscere il valore del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio purché siano fissate le condizioni al contorno e sia nota la posizione e intensità di tutte le cariche nello spazio $\rho(\vec{r})$

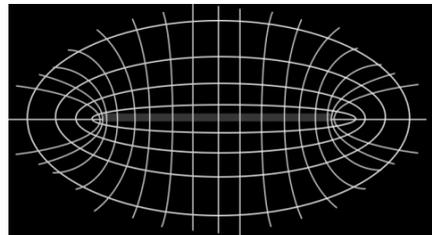
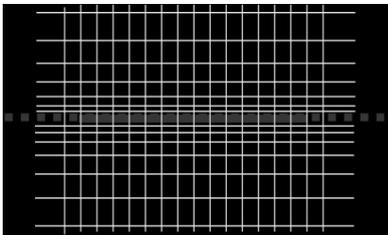
LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO lezioni precedenti

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} V \quad dV(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **selettore di velocità** **applicazione**

che velocità deve avere una particella carica per uscire dal selettore di velocità?

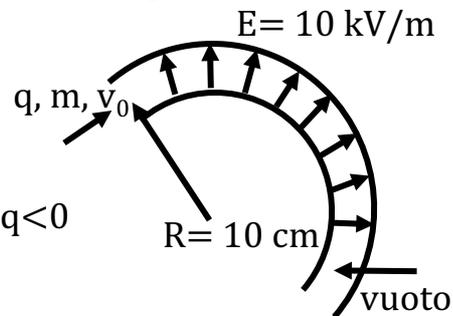
deve descrivere una circonferenza di raggio R:

$$qE = -mv_0^2/R$$

dato il verso di E deve essere $q < 0$

$$v_0 = \sqrt{\frac{-qER}{m}}$$

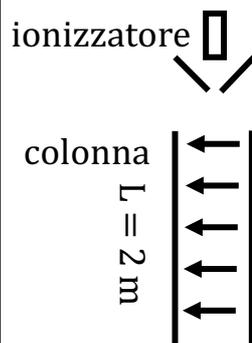
se elettrone: $v_0 = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{9 \cdot 10^{-31}}} = 1,3 \cdot 10^7 \text{ m/s} = 4,4 \% c$



LEZ 6

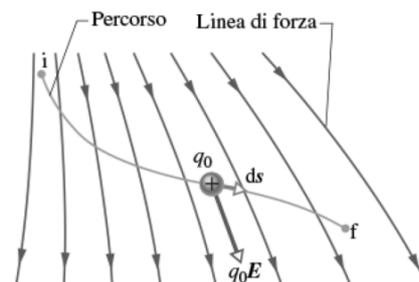
SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **separatore elettrostatico** **applicazione**



$$E = 0,5 \text{ MV/m}$$

a seconda della carica acquisita le particelle ionizzate, scendendo lungo la colonna, si spostano a destra o sinistra separandosi



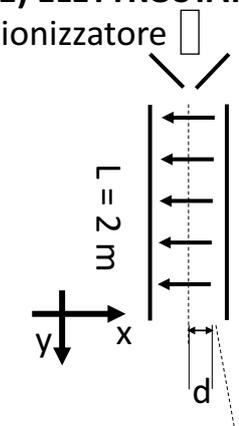
le linee di campo non rappresentano la traiettoria ma l'accelerazione

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO **separatore elettrostatico** **applicazione**

ionizzatore



$L = 2 \text{ m}$

$E_x = 0,5 \text{ MV/m}$

scendendo di L , quanto (d) si sposta una particella di carica $q = -10 \text{ pC}$ e $m = 1 \text{ mg}$?

$$a_x = qE_x/m$$

$$v_x = qE_x/m t$$

$$x = \frac{1}{2} qE_x/m t^2$$

$$a_y = g$$

$$v_y = g t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$L = \frac{1}{2} g t'^2$$

$$t'^2 = 2L/g$$

$$d = \frac{1}{2} qE_x/m \cdot 2L/g =$$

$$= \frac{qE_x L}{mg} =$$

$$= \frac{+10 \cdot 10^{-12} \times 0,5 \cdot 10^6 \times 2}{10^{-6} \times 9,8} =$$

$$= +1 \text{ m}$$

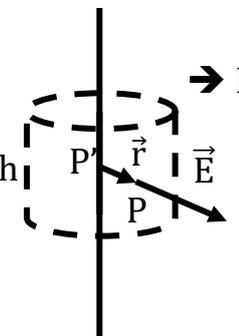
→ moto rettilineo: $\text{tg } \theta = v_y/v_x = mg/qE_x$

LEZ 6

SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO XEROX **applicazione**

il campo generato da un filo sottile supera la rigidità dielettrica dell'aria e un flusso di elettroni ionizza (effetto corona) il toner che viene attratto dalla carta (schema semplificato)



$$\phi_S(\vec{E}) = 2\pi r h E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

filo di raggio a carico negativamente

$a = 25 \mu\text{m}$

$\Delta V = 600 \text{ V}$

$d = 8 \text{ mm}$

superficie da caricare positivamente

$\lambda = ???$

$E(a) = ???$

$E(d) = ???$

LEZ 6

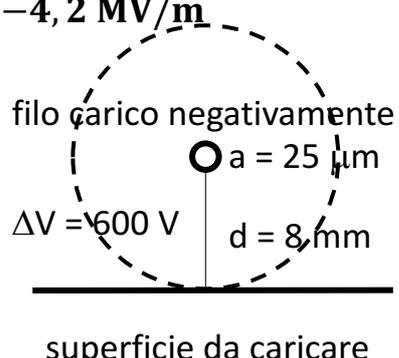
SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO XEROX **applicazione**

$$\Delta V = \int_a^d -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \quad \rightarrow \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln \frac{a}{d}} = -5,8 \text{ nC/m}$$

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = \frac{\frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln \frac{a}{d}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = \frac{\Delta V}{a \ln \frac{a}{d}} = -4,2 \text{ MV/m}$$

$$E(d) = \frac{\Delta V}{d \ln \frac{a}{d}} = -13 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \ll E(a)$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$


filo carico negativamente
 $a = 25 \mu\text{m}$
 $\Delta V = 600 \text{ V}$
 $d = 8 \text{ mm}$
 superficie da caricare

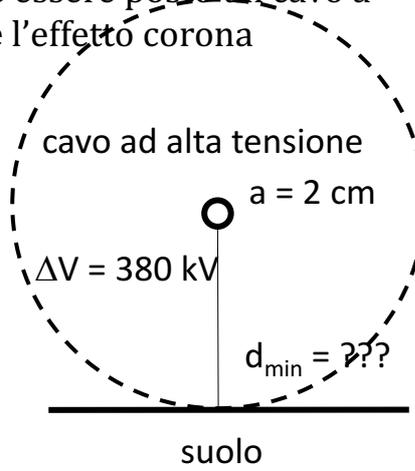
LEZ 6 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO elettrodotto **applicazione**

per il trasporto dell'energia elettrica si utilizzano cavi ad alta tensione posti su tralicci.

A quale altezza minima dal suolo deve essere posto un cavo a -380 kV di raggio $a = 2 \text{ cm}$ per evitare l'effetto corona (perforazione del dielettrico)?

$$E(a) = \frac{\Delta V}{a \ln \frac{a}{d}} < 3 \text{ MV/m}$$

$$\ln \frac{d}{a} = \frac{-\Delta V}{a E_{\text{MAX}}} \rightarrow d_{\text{min}} = 11 \text{ m}$$


cavo ad alta tensione
 $a = 2 \text{ cm}$
 $\Delta V = 380 \text{ kV}$
 $d_{\text{min}} = ???$
 suolo

LEZ 6 SAPIENZA - Ingegneria Clinica - FISICA II - A. Sciubba 2017-18