1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO divergenza **matematica**

si definisce divergenza del campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ la quantità scalare

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}$$

che rappresenta il rapporto fra il flusso di $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ attraverso una superficie infinitesima ΔS che racchiude il punto P(x,y,z) e il volume infinitesimo τ all'interno di tale superficie:

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \lim_{\tau \to 0} \frac{\Phi[\overrightarrow{v(x,y,z)}]_{\Delta S}}{\tau}$$

"quanto $\vec{v}$ esce (div>0) dal punto P"

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio **matematica**

- calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\,\vec{r}(x,y,z)$

$$\mathrm{div}[c(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})] = \frac{\partial(c\,x)}{\partial x} + \frac{\partial(c\,y)}{\partial y} + \frac{\partial(c\,z)}{\partial z} = 3\,c$$

$\boxed{\text{radiale} \neq 0}$

- calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$ con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

$\boxed{\text{rotazionale} = 0}$

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0 - \omega y) - \hat{\jmath}(0 - \omega x) + \hat{k}(0 - 0) = -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\mathrm{div}[-\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x] = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

- calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\,\frac{\hat{r}}{r^2} = c\,\frac{\vec{r}}{r^3}$

PER CASA

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO divergenza **matematica**

teorema della divergenza: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che RACCHIUDE il volume τ_S, si ha:

$$\Phi(\vec{v})_S = \int_{\tau_S} \mathrm{div}(\vec{v})\, d\tau$$

cioè: $$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\,\hat{n}\, dS = \int_{\tau_S} \mathrm{div}(\vec{v})\, d\tau$$

sulla superficie S all'interno del volume τ_S

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

teorema di Gauss + teorema della divergenza:

dato un campo vettoriale $\overrightarrow{E(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\Phi(\vec{E})_S = \int_\tau \mathrm{div}(\vec{E})\, d\tau \qquad \Phi(\vec{E})_S = \int_\tau \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} d\tau$$

$$\int_\tau \left[\mathrm{div}(\vec{E}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right] d\tau \quad \forall\tau \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

l'operatore divergenza applicato al campo elettrostatico $\mathrm{div}(\vec{E})$ individua i punti dello spazio in cui sono presenti le sorgenti del campo $\rho(\vec{r})$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

I Maxwell

la prima equazione di Maxwell nel vuoto rappresenta la forza di Coulomb

- per le <u>applicazioni quantitative</u> è più utile la <u>forma integrale</u>

$$\phi(\vec{E})_S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- per gli <u>sviluppi teorici</u> è più utile la <u>forma differenziale</u> che fornisce indicazioni punto per punto nello spazio (forma locale)

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{E(\vec{r})}] = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO nabla ⇔ divergenza **matematica**

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}$$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ operatore differenziale lineare nabla

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \left(\hat{\imath}v_x(x,y,z) + \hat{\jmath}v_y(x,y,z) + \hat{k}v_z(x,y,z)\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{v(x,y,z)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\hat{\imath}v_x(x,y,z) + \hat{\jmath}v_y(x,y,z) + \hat{k}v_z(x,y,z)\right)$$

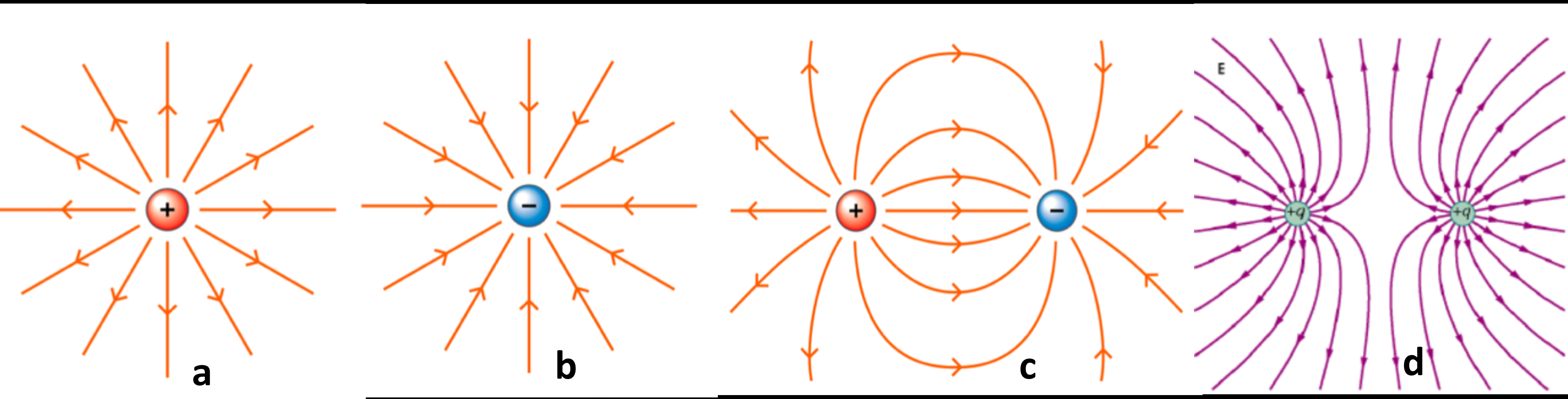
$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{v(x,y,z)} = \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{E(x,y,z)} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

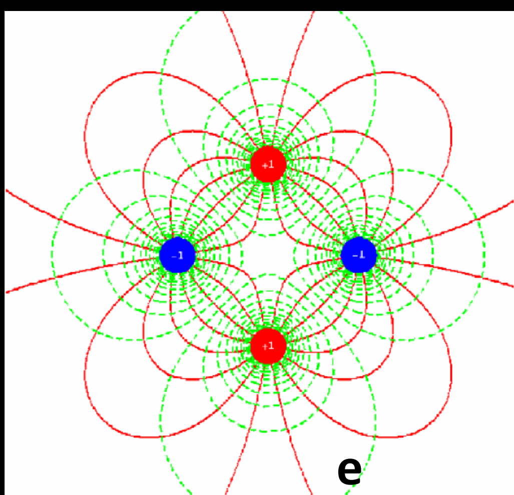
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

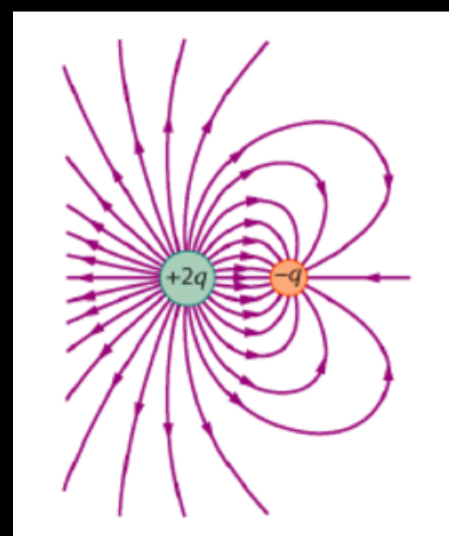
divergenza



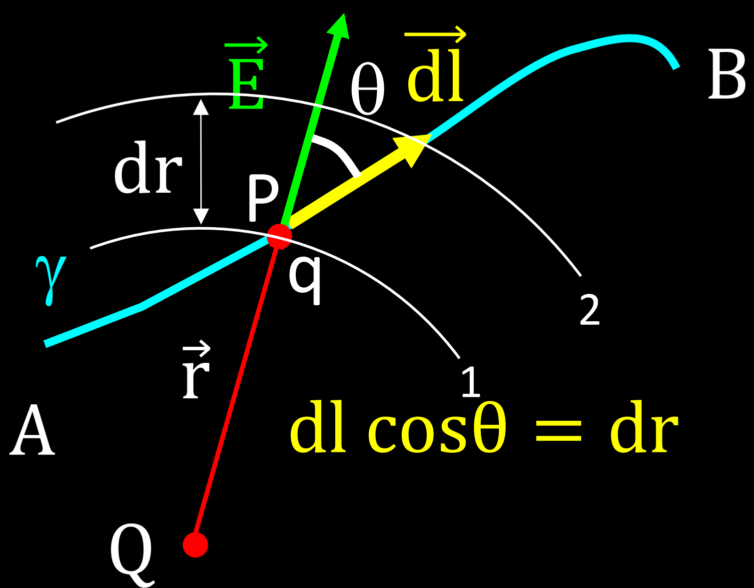
$$\mathrm{div}\left[\overrightarrow{E(\vec{r})}\right] = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

divergenza: cercatore di sorgenti





consideriamo il lavoro che una carica q deve compiere per muoversi lungo una linea γ da A a B sotto l'azione della forza coulombiana generata da una carica Q: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$.



$\mathrm{dl}\cos\theta = \mathrm{dr}$

Il lavoro per unità di carica è dato da:

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{1}{q}\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} =$$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\overrightarrow{dl} = \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dl\cos\theta}{r^2}$$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$\forall\gamma$!!! Il campo elettrostatico è conservativo!

potenziale elettrico

$$L_{AB_\gamma} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = U(A) - U(B) \rightarrow \int_{\vec{r}}^{\overrightarrow{r_0}} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = U(\vec{r}) - U(\overrightarrow{r_0})$$

$$\rightarrow U(\vec{r}) = U(\overrightarrow{r_0}) + \int_{\overrightarrow{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{F}\,\overrightarrow{dl}$$

energia potenziale

>>>

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{U(A)-U(B)}{q} = V(A) - V(B)$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = V(\overrightarrow{r_0}) + \int_{\overrightarrow{r_0}}^{\vec{r}} -\vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

potenziale (elettrostatico)

1 volt = 1 joule/1 coulomb: 1 V = 1 J/1 C

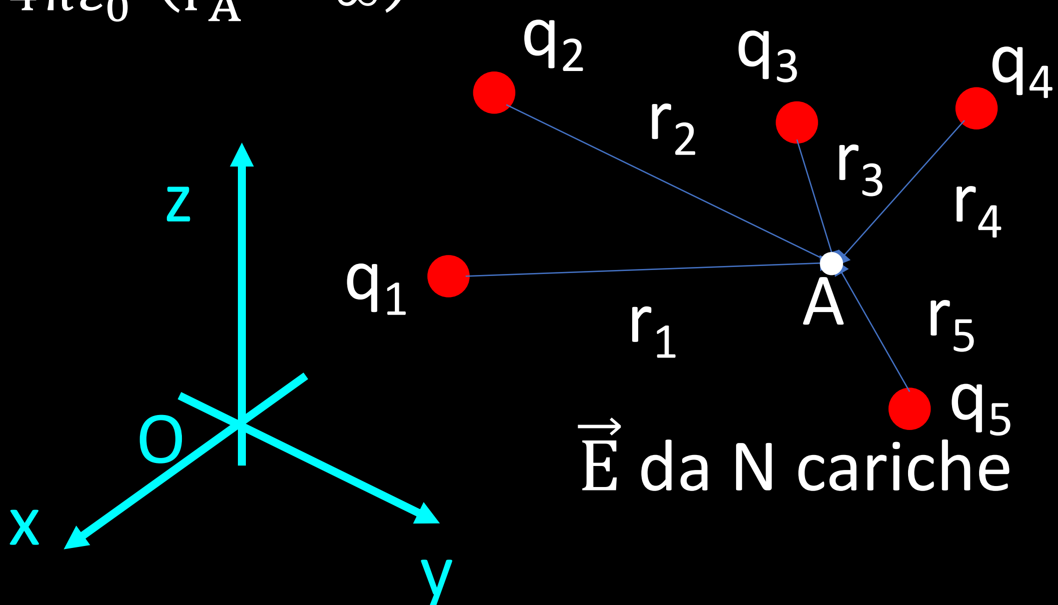
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

>>> $$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V(A) - V(B)$$ $\vec{E}$ da una carica

V(A)-V(B): differenza di potenziale (d.d.p.) o tensione elettrica

spesso si fissa il potenziale nullo all'infinito: $V(\vec{r_0}) = V(\infty) = 0\ V$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty}\right) = V(A) - V(\infty) \rightarrow V(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$



$\vec{E}$ da N cariche

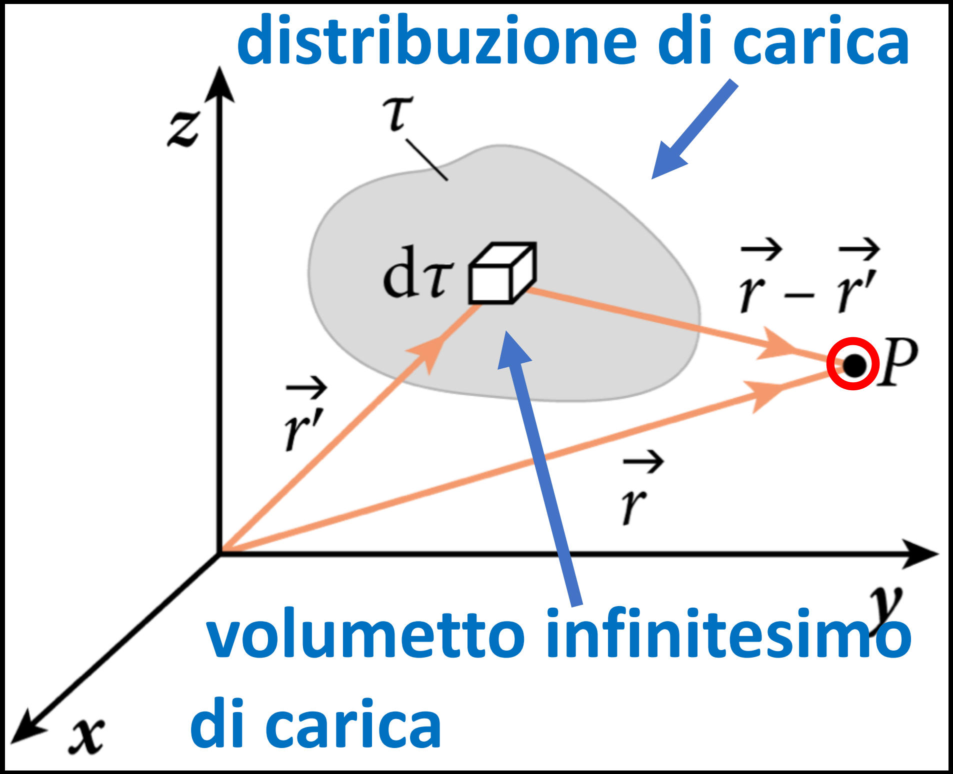
$$V(A) = \sum_{i=1,N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

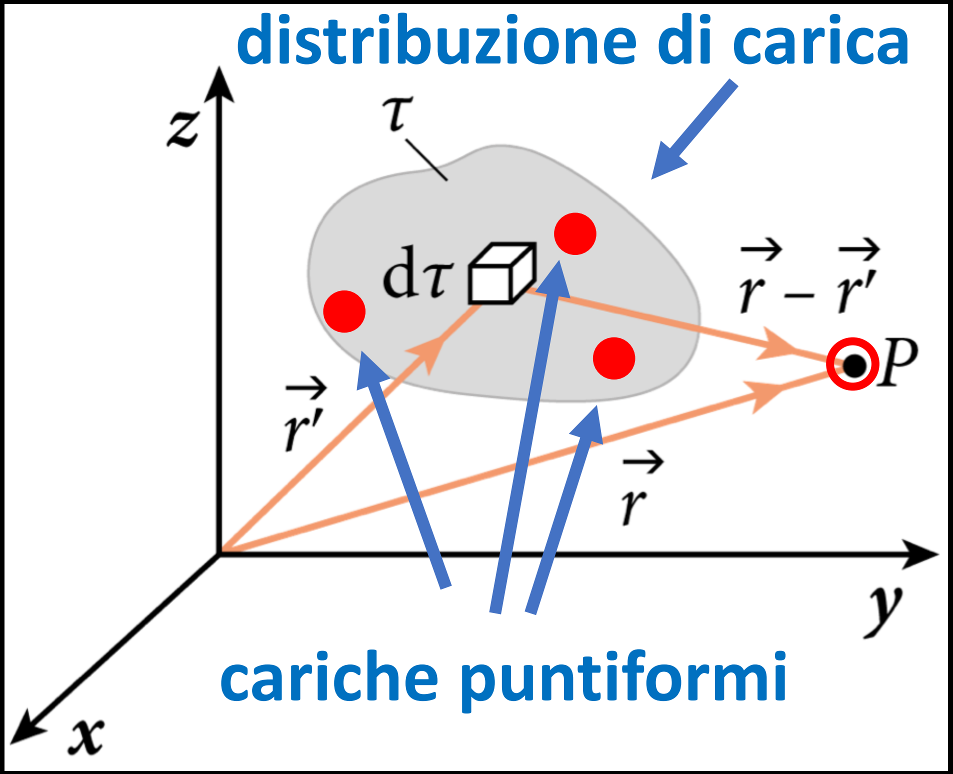
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

potenziale

per una distribuzione qualsiasi di cariche: $V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)d\tau}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$

e se la carica fosse...



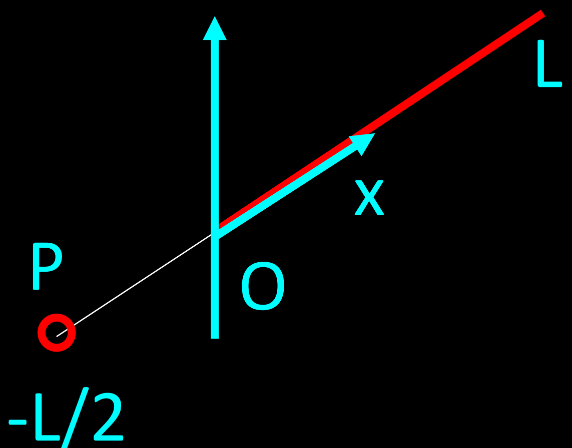


???

$$V(A) = \sum_{i=1,N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esercizio **potenziale**

determinare l'energia cinetica con la quale una carica q=e arriverebbe all'infinito sotto l'azione del campo generato da un filo rettilineo uniformemente carico (λ=1mC/m) di lunghezza L.
La carica è inizialmente ferma nel punto P lungo la direzione del filo a distanza L/2 da una estremità



Il campo elettrostatico è conservativo:

$$\cancel{K(P)} + U(P) = K(\infty) + \cancel{U(\infty)}$$

$$\rightarrow K(\infty) = U(P) \text{ con } U(P) = q\,V(P)$$

$$V(P) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{\frac{L}{2} + x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3/2L}{L/2}\right)$$

$$K(\infty) = qV(P) = e\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3 = 1{,}6\ 10^{-15}\ \text{J}$$

$$V(\vec{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r'})d\tau}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

l'energia potenziale di una carica elementare **e** posta in un punto in cui è presente il potenziale V è pari a U = e V.

Se V = 1 V allora U = 1,6 x 10^{-19} C x 1 V = 1,6 x 10^{-19} J.

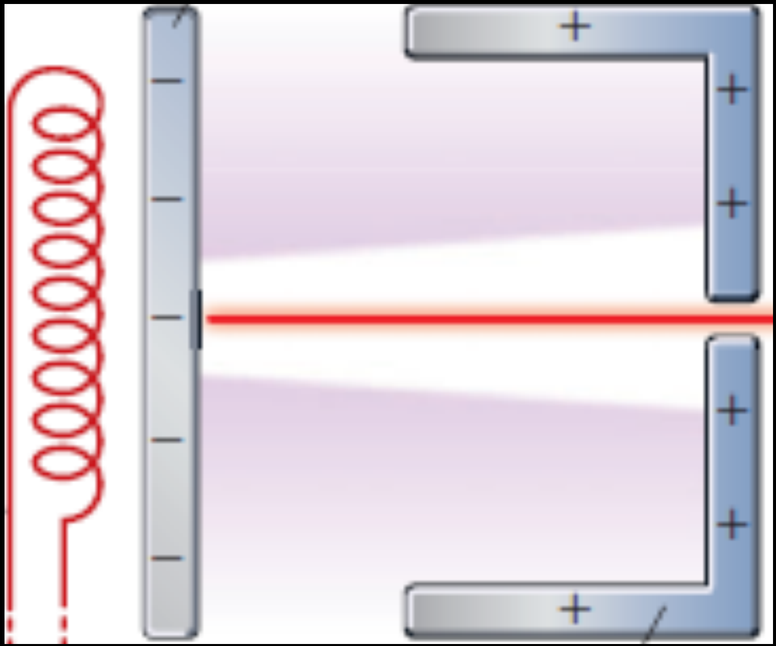
Questa unità di misura, l'elettronvolt, è ricorrente nei fenomeni chimici, atomici e subatomici (cariche elementari)

$$K(\infty) = 1{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} = 1{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} \times \frac{1\ \mathrm{eV}}{1{,}6 \times 10{-}19\ \mathrm{J}} = 10^{4}\ \mathrm{eV} = 10\ \mathrm{keV}$$

applicazione

cannone elettronico (sorgente per raggi X e molto altro)

Un elettrodo carico negativamente è riscaldato ad alta temperatura ed emette elettroni per un fenomeno chiamato effetto termoionico.



Una volta emessi, gli elettroni sono attirati dall'elettrodo positivo, che è forato al centro in modo da lasciarne passare un fascio rettilineo.

Se la differenza di potenziale fra i due elettodi è 5 kV, quanto vale l'energia cinetica degli elettroni all'uscita del cannone?