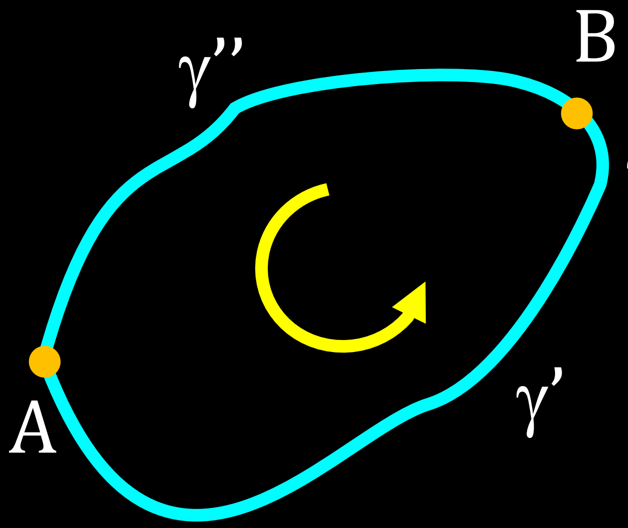
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

conservatività



$\gamma = \gamma' + \gamma''$

calcoliamo la circuitazione di $\vec{E}$ lungo la linea chiusa γ

$$\oint_\gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} + \int_{B_{\gamma''}}^{A} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} =$$

$$= \int_{A_{\gamma'}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} - \int_{A_{\gamma''}}^{B} \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \mathbf{0}$$

se il campo è elettrostatico è conservativo, l'integrale non dipende da γ e la circuitazione è nulla

se in alcuni tratti il campo E non è conservativo $\oint_\gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \text{f.e.m.}$

forza elettromotrice (f.e.m. = f = $\mathcal{E}$): lavoro delle forze non conservative per unità di carica

f.e.m. = $L_{NON\ CONS}/q$

unità di misura: il volt

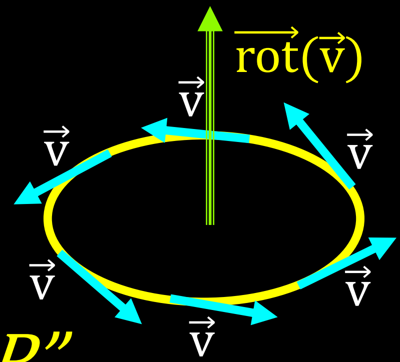
si definisce rotore del campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ il vettore:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{v(x,y,z)} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

che rappresenta il rapporto fra la circuitazione di $\overrightarrow{v(x,y,z)}$ lungo una linea chiusa infinitesima C che circonda il punto P(x,y,z) e l'area infinitesima di superficie ΔS delimitata da C:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{v(x,y,z)}] = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \overrightarrow{v(x,y,z)}\,\overrightarrow{dl}}{\Delta S}$$



"quanto $\vec{v}$ ruota intorno al punto P"

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO esempio **matematica**

calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = c\vec{r}(x,y,z)$

>>> avevamo già calcolato $\mathrm{div}(c\vec{r}) = 3c$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,[c(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})] =$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial(cz)}{\partial y} - \frac{\partial(cy)}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial(cz)}{\partial x} - \frac{\partial(cx)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(cy)}{\partial x} - \frac{\partial(cx)}{\partial y}\right)$$

$$= 0$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

questo significa che le linee del campo $c\vec{r}$ <u>radiale</u> non hanno vortici calcolare il rotore del campo $\overrightarrow{v(x,y,z)} = \vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)$

con $\vec{\omega}(x,y,z) = \omega\,\hat{k}$ (rotazione intorno all'asse z)

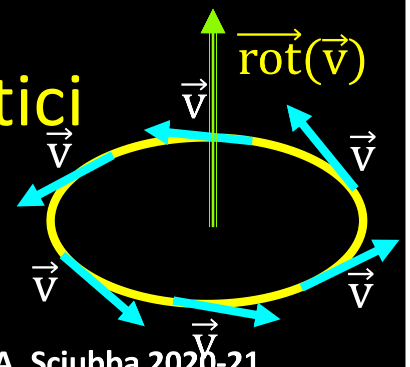
$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-\omega y) - \hat{\jmath}(0-\omega x) + \hat{k}(0-0) = -\hat{\imath}\omega y + \hat{\jmath}\omega x$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}[\vec{\omega}(x,y,z) \times \vec{r}(x,y,z)] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}\left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(0 - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\omega\,\hat{k} \neq 0$$

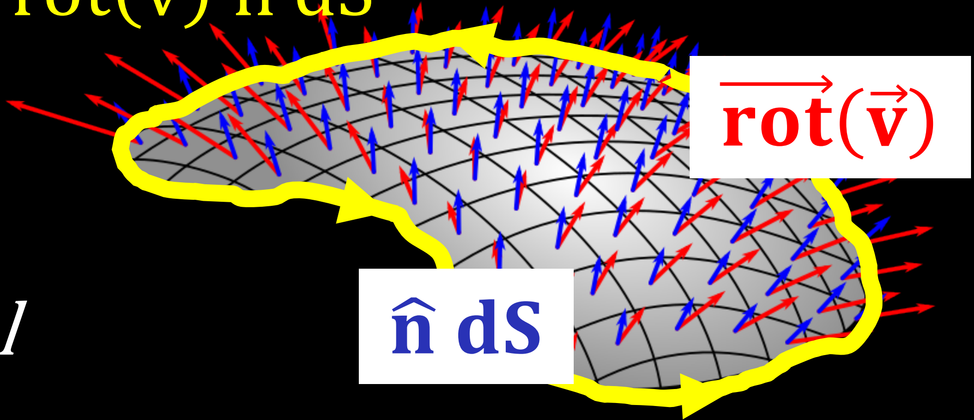
questo significa che le linee del campo $\vec{\omega}\times\vec{r}$ hanno vortici



1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO rotore STOKES **matematica**

teorema del rotore: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una linea CHIUSA C che racchiude la superficie S, si ha:

$$\oint_{C_{chiusa}} \vec{v}\,\overrightarrow{dl} = \int_{S_{aperta}} \overrightarrow{rot}(\vec{v})\,\hat{n}\,dS$$



analogo al

teorema della divergenza: dato un campo vettoriale $\overrightarrow{v(x,y,z)}$, presa una superficie CHIUSA S che racchiude il volume τ, si ha:

$$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\,\hat{n}\,dS = \int_{\tau} div(\vec{v})\,d\tau$$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

III Maxwell

conservatività del campo elettrostatico + teorema del rotore:

dato un campo vettoriale $\overrightarrow{E(x,y,z)}$, presa una linea chiusa C che racchiude la superficie S, si ha:

$$\oint_C \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{E})\,\hat{n}\,dS$$

$\forall S$ con bordo C

$$\oint_C \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0}$$

in elettrostatica

l'operatore rotore applicato al campo elettrico $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$ individua i punti dello spazio in cui sono presenti vortici del campo (assenti se il campo è elettrostatico)

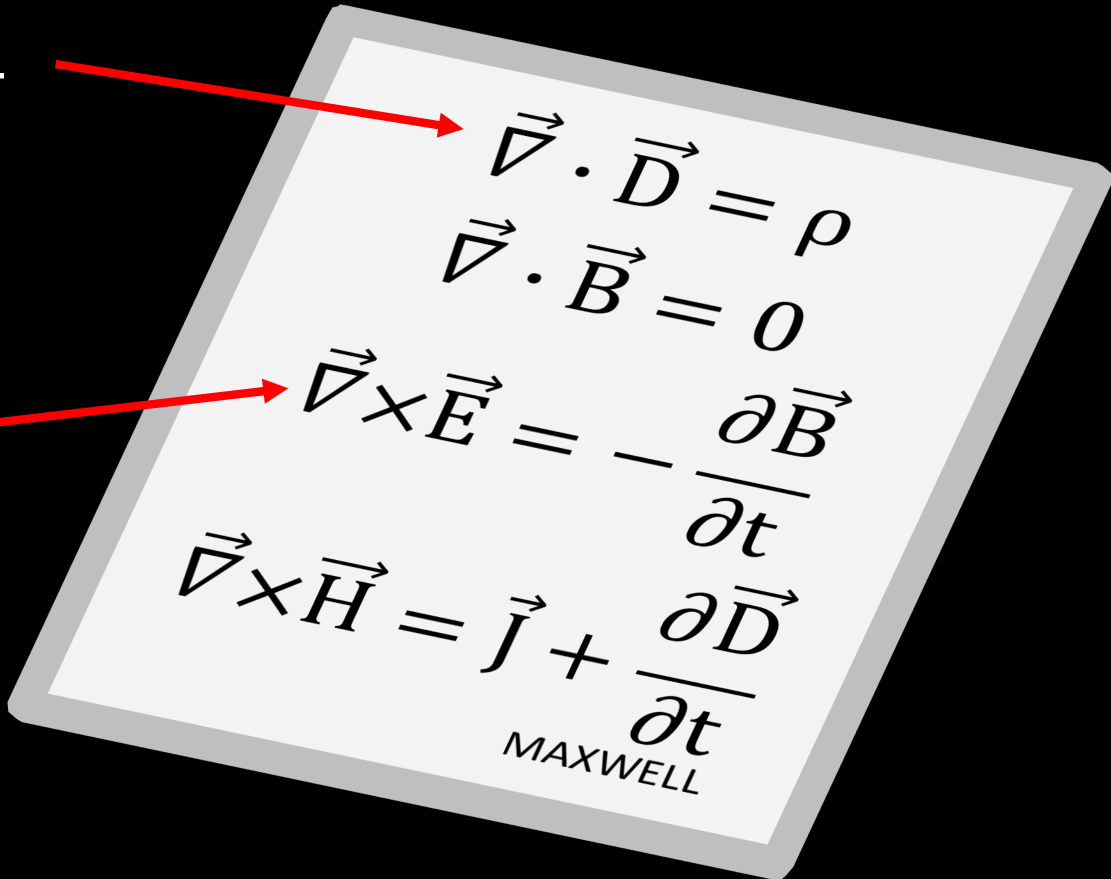
vedremo con i campi magnetici

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}\,\hat{r} \qquad \overrightarrow{E(\vec{r})} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_C \vec{E}\,\vec{dl} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = 0$$

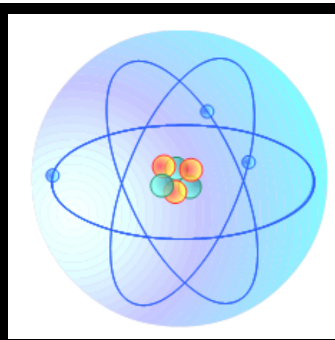


teorema di Helmholtz: se di un campo vettoriale sono noti in tutti i punti dello spazio la divergenza e il rotore è possibile, fissate le condizioni al contorno, ricavare il valore del campo in tutti i punti dello spazio.

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = 0$$

esempio: la I e la III equazione di Maxwell per l'elettrostatica nel vuoto consentono di conoscere il valore del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio purché siano fissate le condizioni al contorno e sia nota la posizione e intensità di tutte le cariche nello spazio $\rho(\vec{r})$

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO



atomo di Bohr

idrogeno: $r_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

$$F_{Coul} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2} = -m\frac{v^2}{r}$$

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$v(r_0) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0\, m}} = $$

$$= 2{,}2\ 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}7\%\ c$$

$$K(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

$$U(r) = q\,V = -e\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} < 0$$

$$V(\infty) = 0$$

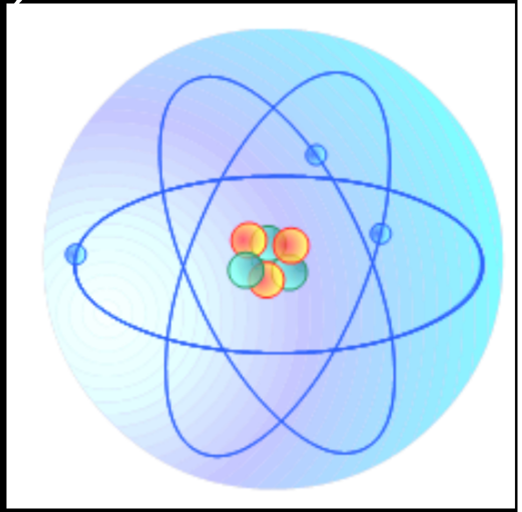
$$E(r) = K + U = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

>>>

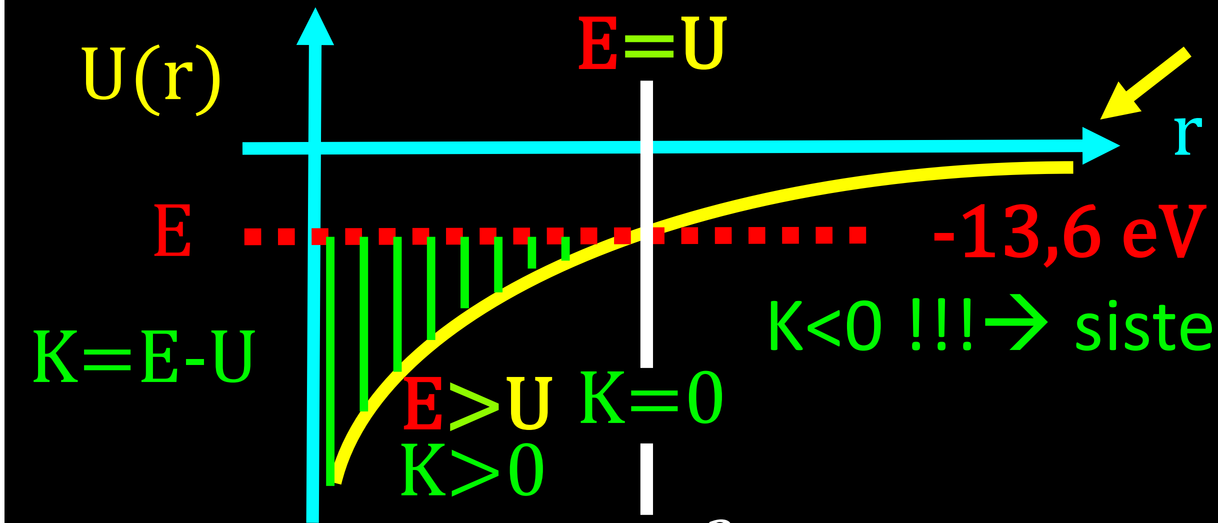
1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO

atomo di Bohr

$$r_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\text{m}$$



>>> $E = K + U = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ **< 0 !!!**



$U(\infty) = 0$

K<0 !!!→ sistema legato: **$r < r_0$**

$$E(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0} = -\frac{9\cdot 10^9}{2}\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{0{,}53\cdot 10^{-10}}\text{J} = -21{,}7\cdot 10^{-19}\text{J}$$

$$= -21{,}7\cdot 10^{-19}\text{J}\,\frac{1\ \text{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\text{J}} = -13{,}6\ \text{eV}$$

energia di ionizzazione

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO laplaciano **matematica**

potenziale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$

Gauss $\text{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

$$= -\underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]}_{\text{laplaciano}} V = -\nabla^2 V$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \text{div}(\vec{E}) = -\,\text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}}(V)\,\right] = -\nabla^2 V$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$ equazione di Poisson

1) ELETTROSTATICA NEL VUOTO $\overrightarrow{\mathrm{rot}}[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V] = 0$ **campo e.s.**

verifichiamo che il campo elettrostatico è irrotazionale (linee di campo senza vortici)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \hat{\imath}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \hat{k}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}V\right) = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}[\vec{E}] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[\hat{\imath}\left(\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}}\right) - \hat{\jmath}\left(\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}}\right) + \hat{k}\left(\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}}\right)\right] = 0$$

teorema di SHWARZ sulle derivate parziali miste

il campo elettrostatico è irrotazionale