Complementi di Fisica - III Lezione

Linee di forza del campo elettrico (ripasso)
Dipolo elettrico
Campo elettrico creato da distribuzioni continue di carica

Andrea Bettucci

10 marzo 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Linee di forza del campo elettrico (ripasso)

Intensità di alcuni campi elettrici esistenti in natura

	E_{max}, kV/mm
Filo percorso da corrente in casa	10^{-2}
Onda radio	10^{-1}
Nella bassa atmosfera	10^{2}
Al sole	10^{3}
Sotto una nube temporalesca	10^{4}
In prossimità di un fulmine	10^{5}

Il campo elettrico può essere rappresentato graficamente mediante una famiglia di linee ciascuna delle quali individua la direzione del campo nei vari punti dello spazio.

Il campo elettrico può essere rappresentato graficamente mediante una famiglia di linee ciascuna delle quali individua la direzione del campo nei vari punti dello spazio.

Linee di forza del campo elettrico

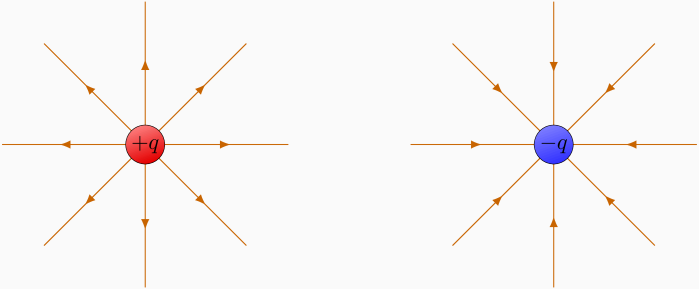
Una linea di forza del campo elettrico è definita come una linea che gode della proprietà di avere in ogni punto la tangente coincidente con la direzione del campo in quel punto.

Linee di forza di una carica puntiforme q

$$\mathbf{E} = K \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Carica positiva

Carica negativa

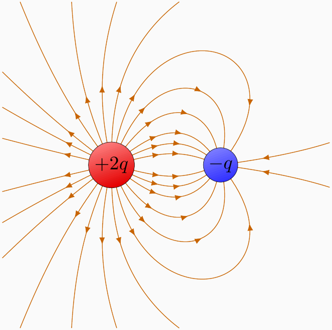


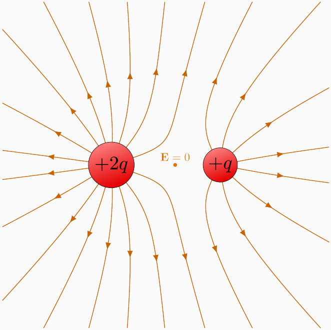
Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano su quelle negative: le cariche sono le sorgenti del campo elettrico.

Il numero di linee di forza per unità d’area (densità delle linee di forza) è proporzionale all’intensità del campo elettrico.
Quanto più ravvicinate sono le linee di forza tanto maggiore è l’intensità del campo elettrico.

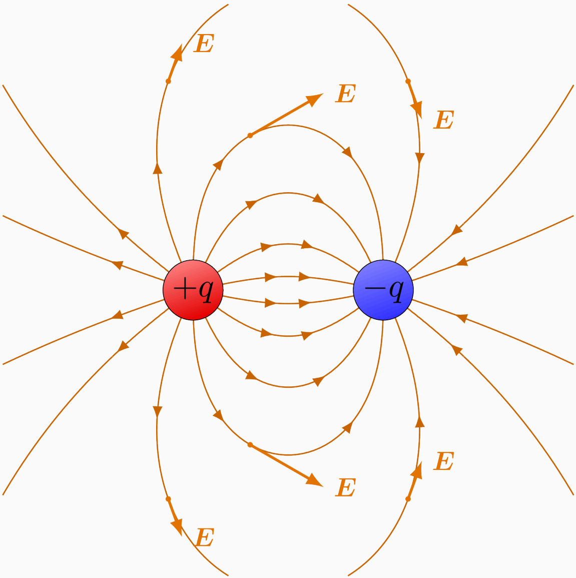
Il numero di linee di forza per unità d'area (densità delle linee di forza) è proporzionale all'intensità del campo elettrico.

Quanto più ravvicinate sono le linee di forza tanto maggiore è l'intensità del campo elettrico.





Linee di forza di un dipolo elettrico

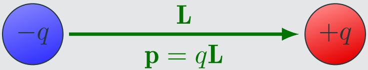


Dipolo elettrico

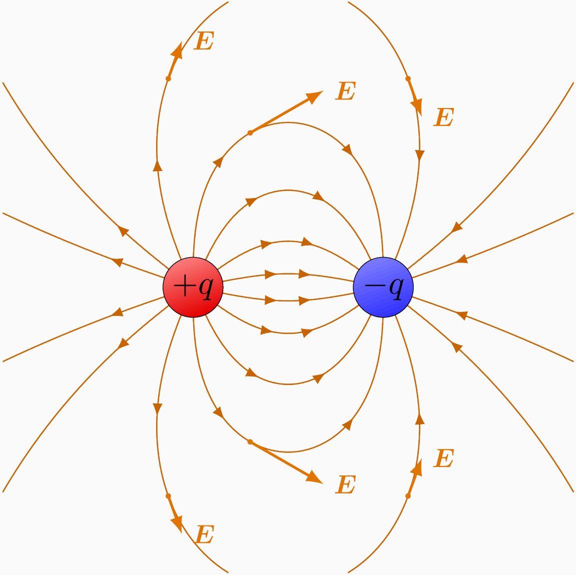
Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico consiste di due cariche uguali e opposte separate da una distanza L. Un dipolo elettrico è caratterizzato da un **momento di dipolo elettrico** $\mathbf{p}$ che è un vettore diretto dalla carica negativa a quella positiva di modulo pari a qL.

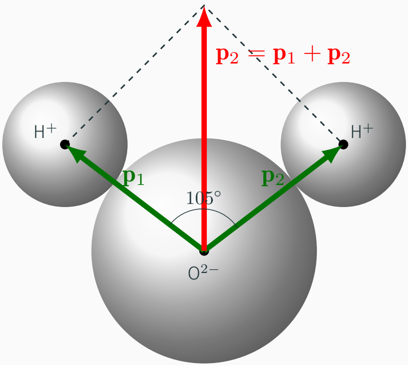
$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$$



Linee di forza di un dipolo elettrico

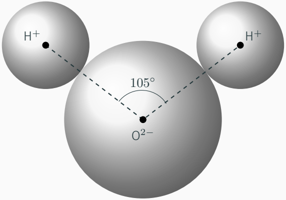


La molecola d'acqua è elettricamente neutra, ma presenta una struttura dipolare perché vi è una separazione delle cariche dovuta al fatto che gli elettroni non si distribuiscono equamente fra l'atomo di ossigeno e i due di idrogeno.

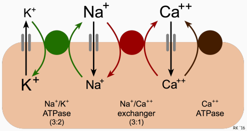


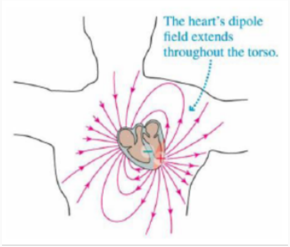
La struttura dipolare elettrica è comune in natura!

Molecola d'acqua

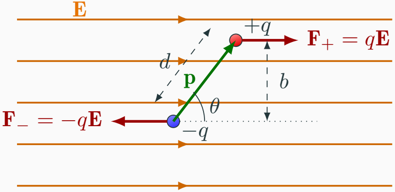


Cellule muscolo cardiaco





Dipolo elettrico $\mathbf{p}$ in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$

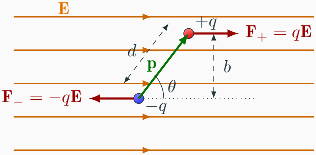


Il dipolo elettrico è sottoposto a una coppia di forze $(|\mathbf{F}_+| = |\mathbf{F}_-| = F)$ e quindi a un momento torcente di intensità

$$M = Fb = Fd \sin\theta = qEd \sin\theta = pE \sin\theta$$

che tende ad allineare $\mathbf{p}$ a $\mathbf{E}$.

Un dipolo in un campo elettrico uniforme tende ad allinearsi al campo elettrico.

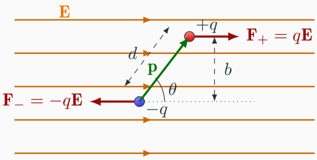


Per una rotazione infinitesima $d\theta$ del dipolo, il lavoro fatto dal campo elettrico è:

$$dL = -M d\theta = -p \sin\theta d\theta$$

Il segno meno nasce dal fatto che il momento tende a far diminuire θ. Per una variazione tra θ_1 e θ_2 della direzione del dipolo, il lavoro fatto dal campo elettrico è:

$$L = \int dL = -pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad L = pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



Un lavoro compito dal campo corrisponde a una diminuzione dell'energia potenziale U del dipolo nel campo:

$$dU = -dL = pE\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad U = -pE\cos\theta + \text{cost}$$

Se si fissa $U = 0$ quando $\mathbf{p}$ è perpendicolare al campo elettrico ($\theta = 90°$), allora

$$U = -pE\cos\theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$

Esercizio

Il momento di dipolo elettrico della molecola d'acqua vale $6{,}1 \times 10^{-30}$ C · m. Una molecola d'acqua viene posta in un campo elettrico uniforme di intensità 2×10^{5} N/C. Determinare: 1) l'intensità del massimo momento torcente che il campo è in grado di esercitare sulla molecola; 2) l'energia potenziale del dipolo quando il momento torcente è massimo; 3) la posizione del dipolo per la quale è massima l'energia potenziale.

Esercizio

Il momento di dipolo elettrico della molecola d'acqua vale $6{,}1 \times 10^{-30}$ C · m. Una molecola d'acqua viene posta in un campo elettrico uniforme di intensità 2×10^5 N/C. Determinare: 1) l'intensità del massimo momento torcente che il campo è in grado di esercitare sulla molecola; 2) l'energia potenziale del dipolo quando il momento torcente è massimo; 3) la posizione del dipolo per la quale è massima l'energia potenziale.

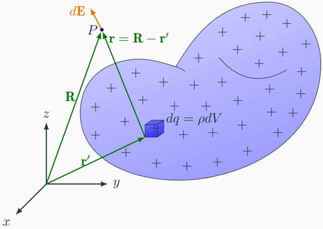
- Il momento torcente è $pE\sin\theta$; il valore massimo si ha per $\theta = 90°$ e $\theta = 270°$ ($\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}$ perpendicolari):

$$M_{\text{max}} = pE = 1{,}2 \times 10^{-24}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

- L'energia potenziale del dipolo è $U = -pE\cos\theta$ che è nulla per $\theta = 90°$.
- L'energia potenziale del dipolo è massima per $\theta = 180°$ ($\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}$ antiparalleli).

Campo elettrico creato da distribuzioni continue di carica

Il campo elettrico prodotto da un corpo di volume V carico con densità di carica ρ può essere calcolato utilizzando l'espressione del campo elettrico di una carica puntiforme. Si può pensare il corpo composto da elementi infinitesimi di volume dV, ognuno dei quali contiene una carica puntiforme $dq = \rho dV$ la quale creerà in un punto P a distanza r un campo elettrico infinitesimo



$$d\mathbf{E} = K\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

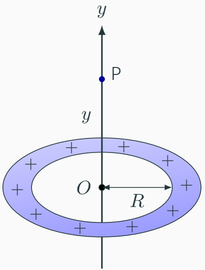
Il campo elettrico totale sarà la somma di tutti i contributi $d\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \int_{\text{corpo}} d\mathbf{E} = \int_{\text{corpo}} K\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Il calcolo è semplificato se la distribuzione
di carica presenta delle simmetrie!

Esercizio

Una carica positiva q è distribuita uniformemente su un anello di raggio R e spessore piccolo rispetto a R.
Si determini il campo elettrico in un punto P dell'asse dell'anello a distanza y da suo centro O.

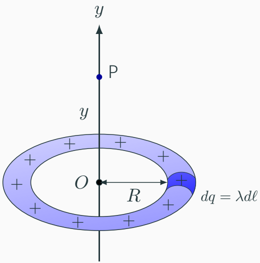


La densità lineica di carica è:

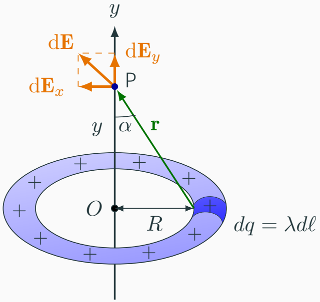
$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

Ogni piccolo elemento di lunghezza $d\ell$ possiede una carica

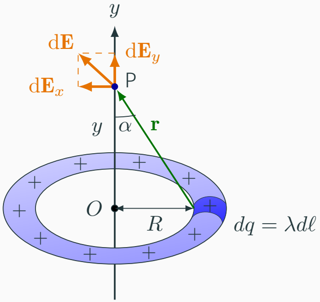
$$dq = \lambda d\ell.$$



Per ogni elemento di carica dq ve ne è uno diametralmente opposto: nel punto P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



Per ogni elemento di carica dq ve ne è uno diametralmente opposto: nel punto P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \quad \Rightarrow \quad dE_y = dE\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad dE_y = K\frac{\lambda d\ell}{R^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

essendo $r = \sqrt{R^2+y^2}$ e $\cos\alpha = y/r$.

Il campo elettrico totale si ottiene sommando tutti i contributi dE_y:

$$E_y = \int_{\text{anello}} dE_y = K\lambda \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} d\ell = K\lambda \frac{y(2\pi R)}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

Il campo elettrico totale si ottiene sommando tutti i contributi dE_y:

$$E_y = \int_{\text{anello}} dE_y = K\lambda \frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} d\ell = K\lambda \frac{y(2\pi R)}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

In conclusione il modulo di E_y è determinato

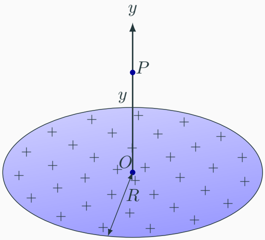
$$E_y = Kq\frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

- Se $y \gg R \quad \Rightarrow \quad E_y = q/4\pi\epsilon_0 y^2$
- Se $y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 0$

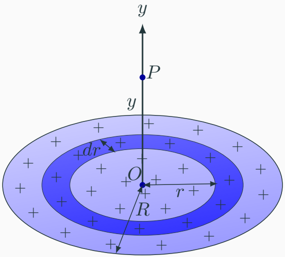
Sono corretti questi due risultati?

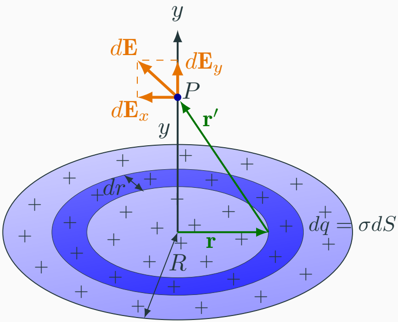
Esercizio

Una carica positiva q è distribuita uniformemente su un sottile disco di raggio R. Si determini il campo elettrico in un punto P dell'asse del disco a distanza y dal suo centro.



Si può pensare il disco costituito da un insieme di sottili anelli concentrici di centro O e raggio compreso tra r e $r + dr$ (con $0 \leq r \leq R$) il cui campo elettrico in P è noto dall'esercizio precedente. Il campo elettrico totale sarà la somma dei campi elettrici creati da ciascun anello.





La densità areica di carica del disco è:

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

Ogni sottile anello ha una superficie $dS = 2\pi r dr$ e possiede una carica $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$.

Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente si può allora scrivere:

$$dE_y = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0}\frac{r dr}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

Il campo elettrico totale si ottiene sommando tutti i contributi dE_y:

$$E_y = \int_{\text{disco}} dE_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \boxed{\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

$$\boxed{\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

$$E_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R$$

Il campo elettrico totale si ottiene sommando tutti i contributi dE_y:

$$E_y = \int_{\text{disco}} dE_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \boxed{\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

$$\boxed{\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

$$E_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R$$

In conclusione il modulo di E_y è determinato

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right]$$

Se $y \ll R$ il disco equivale a un piano di dimensioni infinite uniformemente carico con densità areica di carica σ.

Intensità del campo elettrico di un piano di dimensioni infinite

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Il vettore campo elettrico è normale al piano.