Complementi di Fisica - IV Lezione

Soluzione degli esercizi 1, 2 e 4 della II prova di autovalutazione

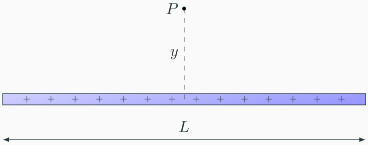
Andrea Bettucci

13 marzo 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

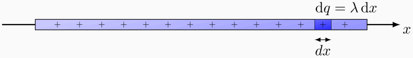
Esercizio 1

Sulla superficie di una sbarretta di lunghezza L e spessore trascurabile è uniformemente distribuita una carica positiva q. Si determini il campo elettrico in un punto P posto quota y sulla retta normale alla sbarretta passante per il punto mediano.



La densità lineica di carica è:

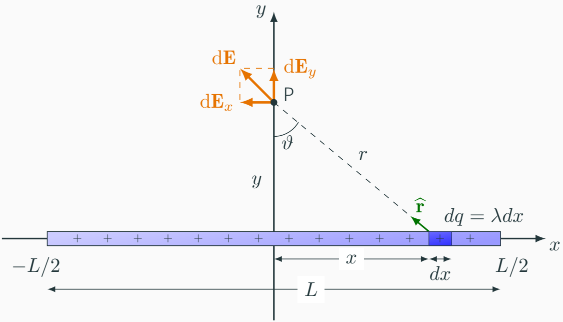
$$\lambda = \frac{q}{L}.$$



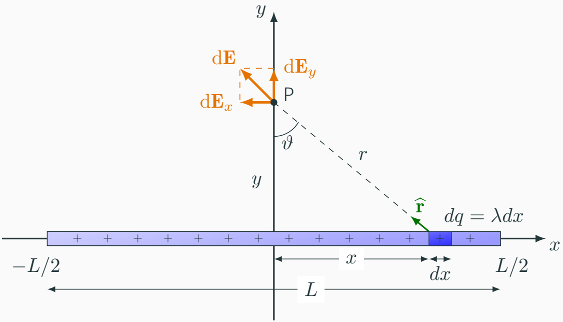
Ogni piccolo elemento di lunghezza dx possiede una carica

$$dq = \lambda dx.$$

Per ogni elemento di carica dq avente coordinata x positiva, esiste il corrispondente avente coordinata negativa: in P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



Per ogni elemento di carica dq avente coordinata x positiva, esiste il corrispondente avente coordinata negativa: in P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \quad \Rightarrow \quad dE_y = dE\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad dE_y = K\frac{\lambda dx}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

essendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\vartheta = y/r$

$$E_y = \int_{\text{corpo}} dE_y = K\lambda y \boxed{\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

$$E_y = K\lambda y \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$E_y = \int_{\text{corpo}} dE_y = K\lambda y \boxed{\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

$$E_y = K\lambda y \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

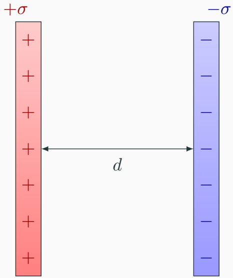
In conclusione il modulo di E_y è determinato

$$E_y = \frac{Kq}{y}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}}$$

- Se $y \gg L \quad \Rightarrow \quad E_y = Kq/y^2 = q/4\pi\epsilon_0 y^2$
- Se $y \ll L \quad \Rightarrow \quad E_y = 2Kq/yL = 2K\lambda/y = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$

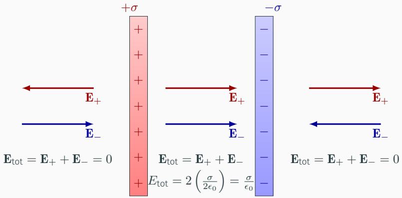
Esercizio 2

Due piani infinitamente estesi separati da una distanza d sono uniformemente carichi con densità superficiale di carica $+\sigma$ e $-\sigma$, rispettivamente.
Si determini il campo elettrico in ogni punto dello spazio.



Il campo elettrico è la somma di quelli generati da ciascuna distribuzione piana. Tali campi hanno eguale modulo

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Il campo elettrico è diverso da zero solo nella zona tra i due piani (larghezza d), diretto dallo strato positivo a quello negativo e vale

Campo elettrico creato da un doppio strato piano

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Campi elettrici notevoli

- Carica puntiforme ($E \propto 1/r^2$)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Filo rettilineo infinitamente lungo ($E \propto 1/y$)

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

- Piano infinitamente esteso uniformemente carico con densità di carica σ ($E =$ cost.)

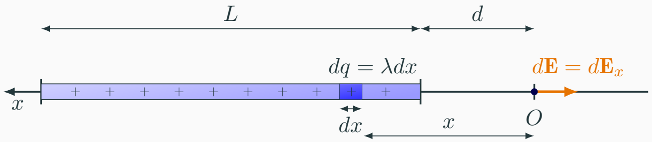
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- Doppio strato piano infinitamente esteso uniformemente carico con densità di carica σ uguale e contraria ($E =$ cost.)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Esercizio 4

Sulla superficie di una sottile sbarretta di lunghezza L è uniformemente distribuita una carica positiva q.
Si determini il campo elettrico in un punto O posto a distanza d lungo la direzione della sbarretta.



Ogni elemento dx a distanza x da O possiede una carica infinitesima $dq = \lambda dx = q/L dx$ e genererà nel punto O un campo elettrico $d\mathbf{E}_x$ diretto come in figura e di modulo

$$dE_x = K \frac{q}{L} \frac{dx}{x^2}.$$

Il campo elettrico totale $\mathbf{E}$, diretto lungo l'asse delle x, sarà la somma dei campi creati in O da tutti gli elementi di carica infinitesima dq.
Il modulo del campo elettrico è

$$E = \int_{\text{corpo}} dE_x = K\frac{q}{L}\int_{d}^{d+L}\frac{dx}{x^2} = K\frac{q}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_{d}^{d+L}$$

Il campo elettrico totale $\mathbf{E}$, diretto lungo l'asse delle x, sarà la somma dei campi creati in O da tutti gli elementi di carica infinitesima dq.
Il modulo del campo elettrico è

$$E = \int_{\text{corpo}} dE_x = K\frac{q}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = K\frac{q}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_d^{d+L}$$

In conclusione, il modulo del campo elettrico in O è determinato

$$E = \frac{Kq}{d(d+L)}$$