Complementi di Fisica - V Lezione

Moto di una carica puntiforme in un campo elettrico
Flusso di un vettore
Legge di Gauss
Esempi di applicazione della legge di Gauss

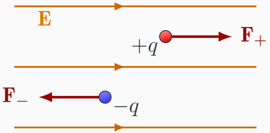
Andrea Bettucci

17 marzo 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Moto di una carica puntiforme in un campo elettrico unifrome

Quando una carica puntiforme q di massa m quando si trova in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, subisce una forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.



La carica sarà sottoposta a un'accelerazione costante

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

Il moto della carica e la traiettoria dipenderanno dalla velocità da essa posseduta nell'istante in cui entra nel campo elettrico.

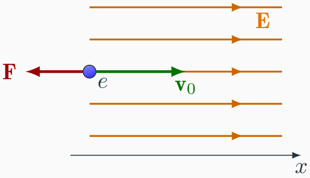
Adroterapia

L'adroterapia oncologica sfrutta l'azione di protoni e ioni carbonio che vengono accelerati generando fasci di particelle ad una determinata energia (energia cinetica). Queste particelle atomiche (definite *adroni*, da cui deriva il nome della terapia stessa) hanno il vantaggio di essere più pesanti e dotate di maggior energia rispetto agli elettroni e di conseguenza di essere ancora più efficaci nel distruggere le cellule tumorali. Quando le cellule tumorali vengono colpite, il DNA dei loro nuclei viene profondamente danneggiato. Le cellule muoiono e il sistema immunitario le elimina. Il grande vantaggio dell'adroterapia è che questo meccanismo di morte cellulare è estremamente preciso: colpisce solo la massa tumorale e preserva i tessuti sani.

Esercizio

Un elettrone e (carica $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C) entra in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 1000$ N/C con una velocità $v_0 = 2 \times 10^6$ m/s in direzione del campo. Quanto spazio percorre l'elettrone prima di trovarsi istantaneamente fermo?
(Massa dell'elettrone $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.)

Sull'elettrone agisce la forza costante $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ nella direzione della velocità.
Il moto è uniformemente decelerato lungo l'asse x con accelerazione $a = eE/m$.



Se $x_0 = 0$ è la posizione iniziale dell'elettrone

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \dfrac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 - at \end{cases}$$

Nell’istante $\bar{t}$ in cui l’elettrone si ferma

$$v(\bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{v_0}{a}$$

Nell'istante $\bar{t}$ in cui l'elettrone si ferma

$$v(\bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{v_0}{a}$$

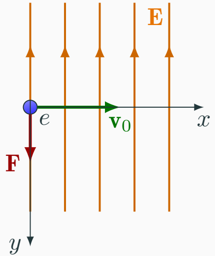
In conclusione, lo spazio d percorso dall'elettrone è determinato

$$d = x(\bar{t}) = \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{eE} = 1{,}14 \times 10^{-2}\,\text{m}.$$

Esercizio

All'istante $t = 0$ un elettrone e (carica $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C) entra in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 2000\,\mathrm{N/C}$ con una velocità $v_0 = 10^6$ m/s diretta perpendicolarmente al campo. Di quando si sarà spostato in direzione y dopo aver percorso uno spazio $d = 1$ cm in direzione x? (Massa dell'elettrone $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.)

Sull'elettrone agisce la forza costante $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ in direzione perpendicolare alla velocità.
Nella direzione x Il moto è rettilineo uniforme con velocità v_0.
Nella direzione y il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $a = eE/m$ e velocità iniziale nulla.



Le leggi orarie del moto nelle due direzioni x e y sono

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Se $\bar{t}$ è il tempo impegato a percorre la distanza d, allora

$$\bar{t} = \frac{d}{v_0}$$

Le leggi orarie del moto nelle due direzioni x e y sono

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Se $\bar{t}$ è il tempo impegato a percorre la distanza d, allora

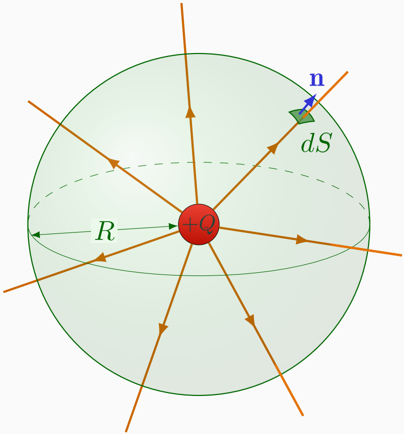
$$\bar{t} = \frac{d}{v_0}$$

In conclusione, lo spazio percorso ℓ in direzione y è determinato

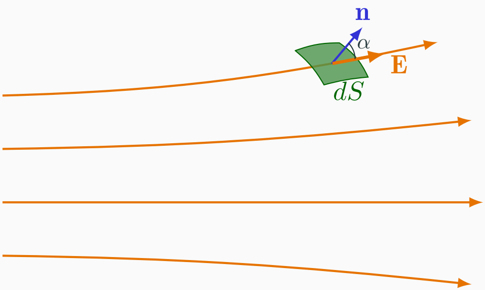
$$\ell = y(\bar{t}) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left(\frac{d}{v_0} \right)^2 = 1{,}76\,\text{cm}.$$

Flusso di un vettore

Questa slide va lasciata perché altrimenti non compila le altre, poi va tolta dal PDF finale



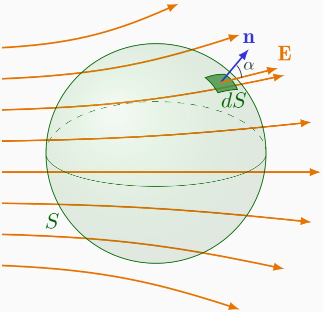
Flusso di un vettore attraverso una superficie infinitesima dS



$$d\Phi(\mathbf{E}) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})dS = EdS\cos\alpha$$

- Il verso di $\mathbf{n}$ è arbitrario.
- Il flusso può essere positivo, negativo o nullo.

Flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa S

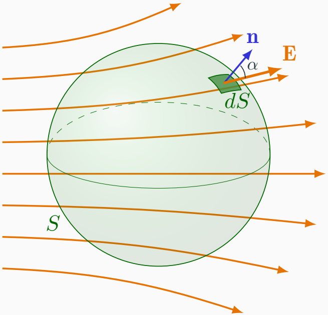


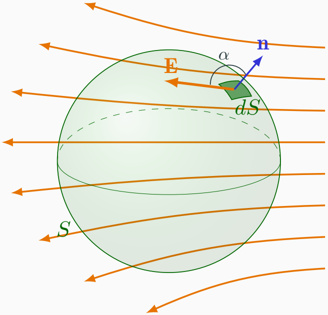
$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S d\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS$$

- Il verso di $\mathbf{n}$ è per convenzione verso l'esterno della superficie chiusa.

I contributi positivi al flusso sono dovuti a quelle zone dove $\mathbf{E}$ punta verso l'esterno (α acuto): flusso uscente

I contributi negativi al flusso sono dovuti a quelle zone dove $\mathbf{E}$ punta verso l'interno (α ottuso): flusso entrante





Se il flusso netto attraverso la superficie chiusa è zero significa che il flusso entrante e quello uscente sono uguali in modulo.

Legge di Gauss

Legge di Gauss

Il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari al rapporto fra la somma algebrica delle sole cariche contenute nell'interno della superficie stessa ed ϵ_0

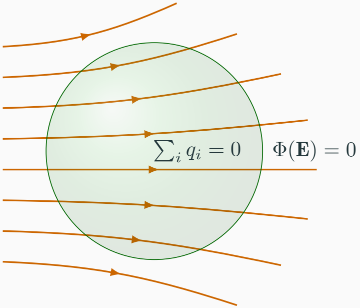
$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Legge di Gauss

Il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari al rapporto fra la somma algebrica delle sole cariche contenute nell'interno della superficie stessa ed ϵ_0

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Se non ci sono cariche all'interno della superficie chiusa, o se la somma delle cariche al suo interno è nulla, il flusso del campo elettrico è nullo: tante linee di forza entrano (flusso entrante, negativo), tante linee di forza escono (flusso uscente, positivo).



La legge di Gauss

- Vale per distribuzioni di cariche sia **discrete** sia **continue.**
- Esprime in modo compatto ed elegante **la relazione tra cariche elettriche e il campo da esse creato.**
- È uno strumento rapido per **determinare il campo elettrico quando la distribuzione di carica è semplice** o possiede un elevato grado di simmetria.

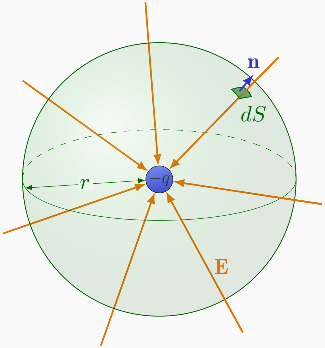
Per rendere semplice il calcolo
del flusso del campo elettrico si sceglierà
una superficie chiusa (superficie gaussiana)
con una simmetria tale che E risulti costante
su tutta la superficie o su parti di essa

Esempi di applicazione della legge di Gauss

Esercizio

Determinare il campo elettrico di una carica puntiforme $-q$ utilizzando la legge di Gauss.

Poiché la carica è puntiforme, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere concentriche con la carica.
Le linee di forza sono dirette verso la carica.
Come superficie di Gauss conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r concentrica con $-q$.

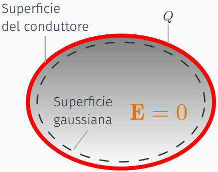


$$\int_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = -E\int_S dS = -E(4\pi r^2) = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Distribuzione elettrostatica delle cariche in un conduttore isolato

Una quantità di carica Q data in eccesso a un conduttore isolato di forma qualsiasi, in condizioni di equilibrio, si trova distribuita sulla sua superficie esterna del conduttore.

Si consideri un conduttore isolato al quale sia stata data una carica in eccesso e si attendano le condizioni di equilibrio ($\mathbf{F} = 0$): $\mathbf{E}$ è nullo in tutti i punti interni al conduttore, essendo $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$.

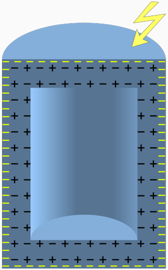


Prendendo come superficie gaussiana una superficie giacente immediatamente al di sotto della superficie esterna e che racchiuda l'intero volume del conduttore, il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso tale superfice è nullo. Per la legge di Gauss la carica netta all'interno di questa superficie è nulla: la quantità di carica Q data in eccesso deve essere sulla superfice del conduttore.

I conduttori schermano l'interno rispetto ad azioni elettrostatiche che avvengono dall'esterno

La strumentazione elettronica, particolarmente quella impiegata in ambito ospedaliero, deve essere schermata dall'azione di campi elettrici esterni che potrebbe compromettere il corretto funzionamento.

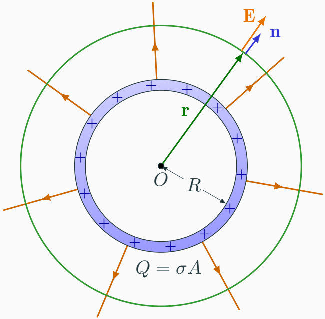
Gabbia di Faraday



Esercizio

Una carica positiva Q è uniformemente distribuita su un sottile guscio sferico di raggio R. Si determini il campo elettrico nei punti a) esterni al guscio; b) interni al guscio.

Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere centrate in O: come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r ($0 \le r \le \infty$) centrata in O.

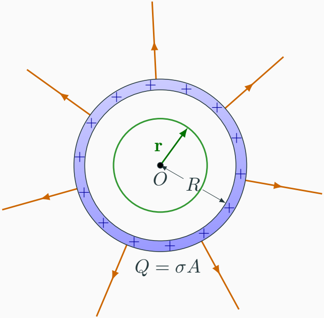


a) $r \geq R$

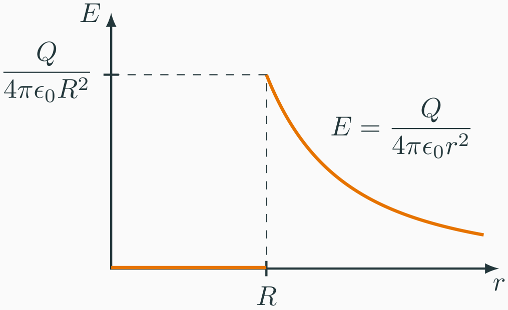
$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) $r \leq R$

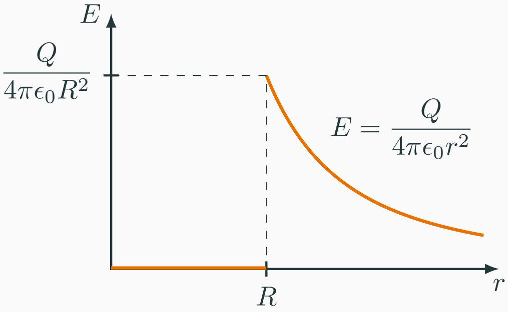
In questo caso la carica netta nella all'interno della superficie gaussiana è nulla



$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$



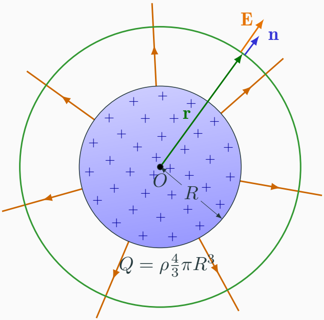
Anche per una sfera metallica di raggio R che possiede una carica Q si ha quest'andamento del campo elettrico!



Esercizio

Una carica positiva Q è uniformemente distribuita in un volume sferico di raggio R. Si determini il campo elettrico nei punti a) esterni alla sfera; b) interni alla sfera.

Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere centrate in O: come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r $(0 \leq r \leq \infty)$ centrata in O.

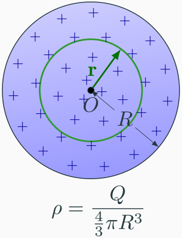


a) $r \geq R$

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) $r \leq R$

In questo caso la carica netta nella all'interno della superficie gaussiana non è nulla



$$q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\int_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = E\int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}r$$