SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Complementi di Fisica - VI Lezione

Soluzione degli esercizi 3, 4, 5 e 8 della III prova di autovalutazione

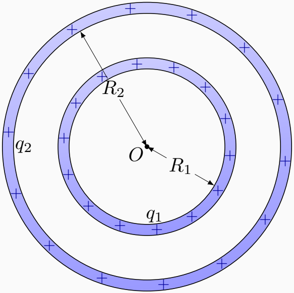
Andrea Bettucci

20 marzo 2023

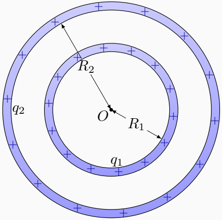
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Esercizio 3

Su di un guscio sferico di raggio R_1 vi è una carica totale q_1 uniformemente distribuita sulla sua superficie. Un secondo, più grande guscio sferico di raggio R_2 concentrico al primo, porta una carica q_2 uniformemente distribuita sulla sua superficie. *(a)* Si usi la legge di Gauss per trovare il campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$, essendo r la distanza da centro dei gusci sferici. *(b)* Quale dovrebbe essere il rapporto delle cariche q_1/q_2 e i loro relativi segni affinché il campo elettrico sia zero per $r > R_2$?

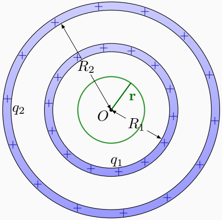


Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere centrate in O: come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r $(0 \leq r \leq \infty)$ centrata in O.

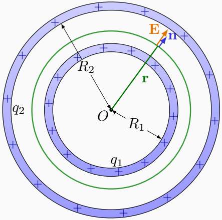


a) Se $r < R_1$ non vi è carica elettrica all'interno della sfera, pertanto:

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0.$$



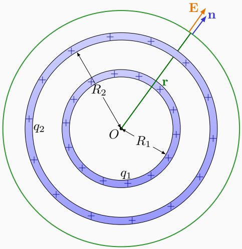
Se $R_1 \leq r < R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a q_1 e, data la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico deve essere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:



$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Se $r \geq R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a $q_1 + q_2$ e, sempre per la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico non può che seere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:



$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{(q_1 + q_2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

b) Se per $r > R_2$ il campo elettrico deve essere nullo, dalla relazione precedente deve essere

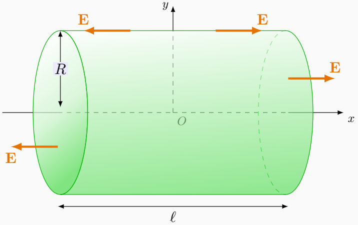
$$q_1 + q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = -1.$$

Esercizio 4

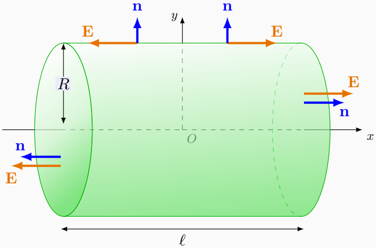
Vi è un campo elettrico $\mathbf{E} = (200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed $\mathbf{E} = (-200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella la regione $x < 0$. Una superficie immaginaria a forma di cilindro retto di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e raggio $R = 5\,\mathrm{cm}$ è disposta con il suo asse lungo l'asse x con una base nel punto di coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel punto $x = -\ell/2$. *(a)* Determinare il flusso netto del campo elettrico attraverso l'intera superficie chiusa. *(b)* Quanto vale la carica netta totale all'interno della superficie chiusa?

Esercizio 4

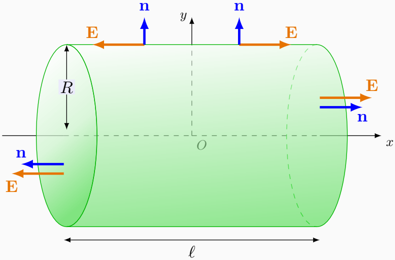
Vi è un campo elettrico $\mathbf{E} = (200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed $\mathbf{E} = (-200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella la regione $x < 0$. Una superficie immaginaria a forma di cilindro retto di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e raggio $R = 5\,\mathrm{cm}$ è disposta con il suo asse lungo l'asse x con una base nel punto di coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel punto $x = -\ell/2$. *(a)* Determinare il flusso netto del campo elettrico attraverso l'intera superficie chiusa. *(b)* Quanto vale la carica netta totale all'interno della superficie chiusa?



$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$



- Il flusso del campo elettrico attraverso la superfice chiusa cilindrica è la somma di tutti i flussi (**con il loro segno!**) attraverso le superfici che compongono il cilindro.
- Data la direzione del versore normale alle superfici $\mathbf{n}$, è nullo il flusso netto del campo elettrico attraverso la superficie laterale del cilindro.
- Per la struttura del campo elettrico, il flusso attraverso le due superfici di base ha identico valore.

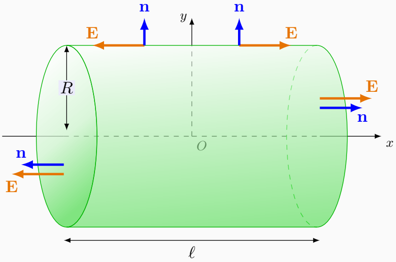


$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S E dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2) = 3{,}14\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}.$$

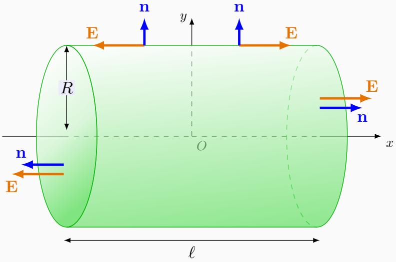
In conclusione, è noto il valore della carica elettrica all'interno del cilindro.

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0\Phi(\mathbf{E})_{\text{totale}} = (8{,}85\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)(3{,}14\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}) = 27{,}8\,\mathrm{pC}.$$



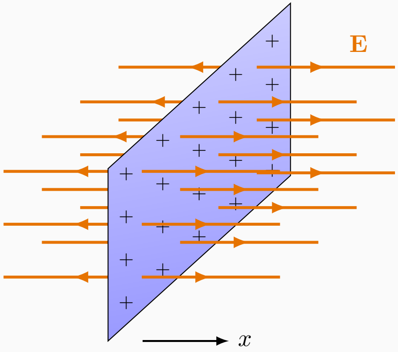
Due domandi interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ, ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?

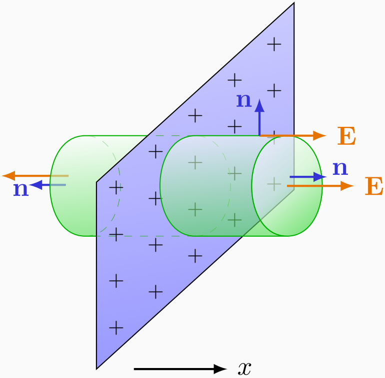


Due domandi interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ, ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?
3. Con quale distribuzione di carica è possibile creare il campo elettrico dell'esercizio?



Una distribuzione piana infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ genera un campo elettrico uniforme, di intensità $E = \sigma/2\epsilon_0$ perpendicolare al piano, diretto in versi opposti nei due semispazi individuati dal piano (III Lezione).



È questo il motivo per il quale la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro, ma è funzione dipende dal raggio R delle basi!!

Esercizio 5

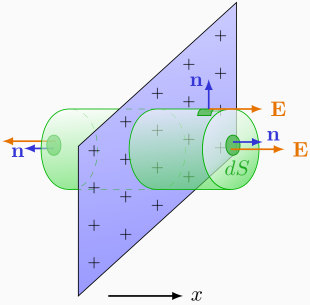
Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ.

Esercizio 5

Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ.

- Data la distribuzione di carica, $\mathbf{E}$ deve essere ad essa perpendicolare, con versi opposti nei due semispazi individuati dal piano.
- $\mathbf{E}$ deve avere la stessa intensità in punti equidistanti dal piano.
- Il calcolo del flusso del campo elettrico diviene allora semplice se, come superficie chiusa, si sceglie un piccolo cilindro retto chiuso con asse perpendicolare alla distribuzione di cariche e basi, di raggio R, da essa equidistanti.

Per quanto è stato detto nell'esercizio precedente, il flusso del campo elettrico attraverso il cilindro così scelto si riduce al solo flusso attraverso le basi del cilindro.



$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S E dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2).$$

La carica elettrica all'interno del cilindro è quella sulla superficie circolare intersezione tra il cilindro e il piano delle cariche:

$$Q_{\text{int}} = \sigma(\pi R^2).$$

In conclusione, dal teorema di Gauss si ottiene l'intensità di $\mathbf{E}$.

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2E(\pi R^2) = \frac{\sigma(\pi R^2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Esercizio 8

In una sfera isolante di raggio R è distribuita una carica Q con densità dipendente dalla distanza r dal centro della sfera secondo la legge $\rho(r) = \alpha r^2$ con α costante. Supponendo noti i valori di R e Q, si determini la costante α e il campo elettrico in un generico punto P esterno alla sfera.

Poiché la densità della distribuzione di carica è funzione della distanza dal centro della sfera, la carica totale va espressa come

$$Q = \int_V \rho(r) dV$$

essendo l'integrale esteso a tutto il volume V della sfera.
Per una sfera di raggio r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Di conseguenza,

$$Q = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\alpha R^5$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{5}{4}\frac{Q}{\pi R^5}.$$

Per $r > R$ la distribuzione di carica si considera come puntiforme con la carica Q nel centro della sfera; pertanto

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$