

Complementi di Fisica - X Lezione

Soluzione degli esercizi 5 e 10
della V prova di autovalutazione

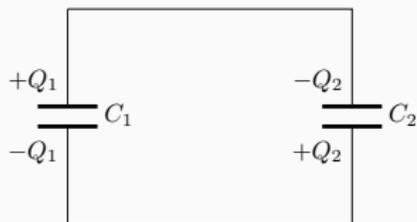
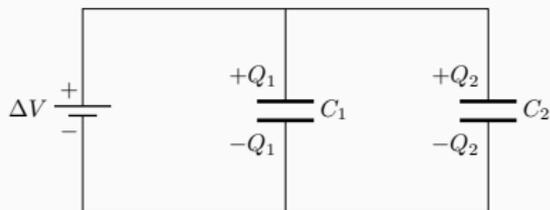
Andrea Bettucci

3 aprile 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Esercizio 5

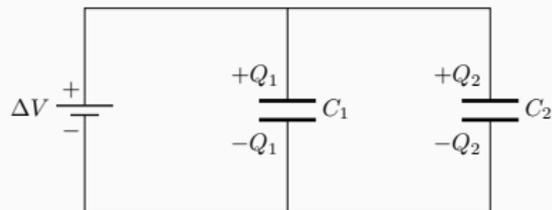
Due condensatori $C_1 = 2,2 \mu\text{F}$ e $C_2 = 1,2 \mu\text{F}$ sono collegati in parallelo a una sorgente di tensione di $\Delta V = 24 \text{ V}$. Dopo essere stati caricati vengono scollegati dalla sorgente, separati l'uno dall'altro e, successivamente, ricollegati con le armature di segno opposto collegate. Si determini la carica e la tensione di ciascun condensatore dopo che è stato raggiunto l'equilibrio elettrico.



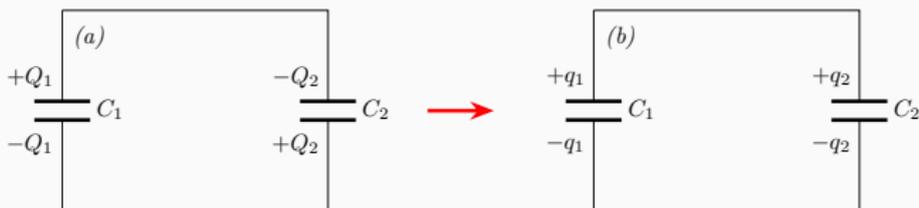
La carica iniziale sui due condensatori è:

$$Q_1 = C_1 \Delta V = 52,8 \mu\text{F}$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V = 28,8 \mu\text{F}$$

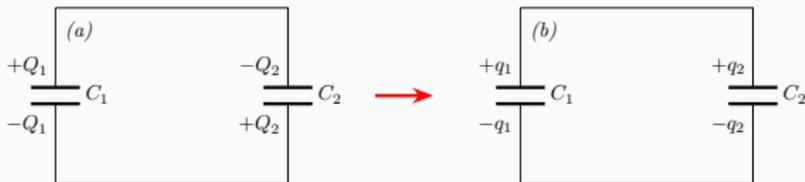


Dopo il ricollegamento, al raggiungimento dell'equilibrio elettrostatico, ai capi dei condensatori c'è la stessa differenza di potenziale $\Delta V' \neq \Delta V$ perché diversa sarà la carica sulle armature.



(a) Distribuzione delle cariche subito dopo il ricollegamento dei condensatori: ai loro capi vi è ΔV ;

(b) Distribuzione delle cariche a equilibrio elettrostatico raggiunto: ai capi dei condensatori vi è $\Delta V'$



All'equilibrio si deve quindi avere la **stessa differenza di potenziale ai capi dei condensatori**:

$$q_1 = C_1 \Delta V' \qquad q_2 = C_2 \Delta V'$$

e la **carica totale sulle armature nella situazione (a) e (b) deve essere la stessa**; ad esempio, per le armature superiori

$$Q_1 - Q_2 = q_1 + q_2 = 24,0 \mu\text{C}.$$

Poiché la capacità totale del sistema è $C_1 + C_2$, allora:

$$\Delta V' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \simeq 7,1 \text{ V}; \quad q_1 = C_1 \Delta V' \simeq 16,0 \mu\text{C}; \quad q_2 = C_2 \Delta V' \simeq 8,0 \mu\text{C}.$$

Esercizio 10

Un condensatore piano della capacità di $C = 60 \mu\text{F}$ e con le armature distanti $d_1 = 2,0 \text{ mm}$ viene collegato a una batteria avente una differenza di potenziale $V_1 = 12 \text{ V}$ tra i suoi poli. Successivamente la pila viene rimossa e le armature del condensatore vengono allontanate fino a una distanza $d_2 = 3,5 \text{ mm}$. (a) Qual è la carica del condensatore? (b) Qual è l'energia iniziale e finale immagazzinata nel condensatore?

(a) La carica sulle armature del condensatore è:

$$Q = CV = (60 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 720 \mu\text{C}.$$

(b) L'energia iniziale del condensatore è:

$$U_{\text{iniz}} = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{1}{2}(720 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 4320 \mu\text{J}.$$

Alternativamente, l'energia può essere espressa nella forma

$$U_{\text{iniz}} = \frac{1}{2}CV_1^2 = (60 \mu\text{F})(12\text{V})^2 = 4320 \mu\text{J}.$$

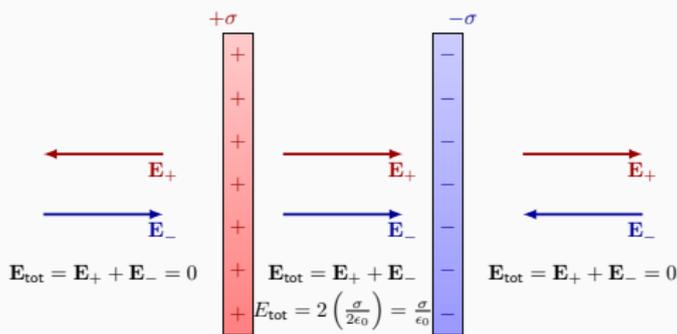
Quando il condensatore viene staccato dalla batteria, la carica sulle armature deve rimanere costante.

Allontanando le armature, la capacità del condensatore diminuisce. Poiché $C = Q/V$, se C diminuisce e Q rimane costante ne deriva che l'allontanamento delle armature aumenta la differenza di potenziale V esistente tra esse!

L'allontanamento delle armature del condensatore non connesse alla batteria fa aumentare l'energia immagazzinata:

$$U = \frac{1}{2}QV$$

Per trovare l'energia immagazzinata nel condensatore quando la distanza tra le armature è $d_2 = 3,5 \text{ mm}$ occorre determinare la differenza di potenziale tra le armature in questa condizione.



Il campo elettrico tra le armature è uniforme e non varia con il loro allontanamento (σ è costante!)

$$V_1 = Ed_1$$

$$V_2 = Ed_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{d_2}{d_1} = 21 \text{ V.}$$

E quindi

$$U_{\text{fin}} = \frac{1}{2} QV_2 = 7560 \mu\text{J} \Rightarrow U_{\text{fin}} - U_{\text{iniz}} = 3240 \mu\text{J}.$$

Per il principio di conservazione dell'energia, l'incremento di energia immagazzinata deve essere pari al lavoro fatto dall'esterno per allontanare le armature! Proviamo a calcolarlo.

Supponiamo di tenere ferma l'armatura positiva e di allontanare quella negativa. **La forza di Coulomb quando si allontana l'armatura negativa fa un lavoro negativo (perché?)**; poiché il campo è uniforme, tale lavoro è espresso da:

$$L_C = -F_C(d_2 - d_1) = -Q \frac{E}{2}(d_2 - d_1)$$

essendo E il campo elettrico creato da *entrambe* le armature.

$$E = \frac{V_1}{d_1} = \frac{12\text{ V}}{2 \times 10^{-3}\text{ m}} = 6\text{ kV/m}$$

da cui

$$L_C = (-720\ \mu\text{C})(3\text{ kV/m})(1,5\text{ mm}) = -3240\ \mu\text{J}.$$

Il lavoro fatto dall'esterno è pari a $-L_C$ (perché?) cosicché il lavoro fatto dall'esterno è esattamente uguale all'incremento dell'energia immagazzinata nel condensatore.