

Complementi di Fisica - XIV Lezione

Soluzione degli esercizi N. 3, 4 e 5
della VII prova di autovalutazione

La forza esercitata sulle correnti dal campo magnetico

Andrea Bettucci

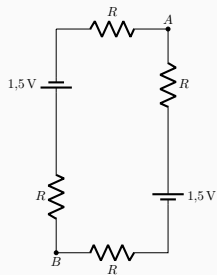
21 aprile 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Soluzione degli esercizi N. 3, 4 e 5 della VII autovalutazione

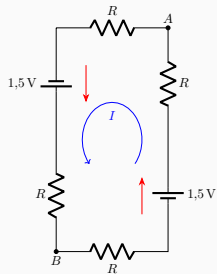
Esercizio 3

Si calcoli la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito a lato dove $R = 130 \Omega$.



I campi elettromotori delle due batterie tendono entrambi a far circolare la corrente in senso antiorario. Per il principio di conservazione dell'energia, supponendo di percorrere il circuito proprio in verso antiorario, si ha:

$$IV + IV = I^2(4R) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{2R}$$



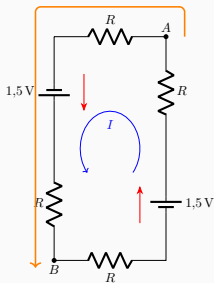
Per determinare la differenza di potenziale tra il punto A e il punto B si supponga di percorrere il circuito da A a B in senso antiorario:

$$I(V_A - V_B) + IV = I^2(2R) \Rightarrow V_A - V_B = 2RI - V$$

Sostituendo il valore di I precedentemente trovato si ha:

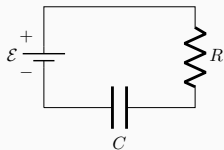
$$V_A - V_B = 2R \frac{V}{2R} - V = 0$$

senza nemmeno la necessità di sostituire i valori numerici di V ed R !



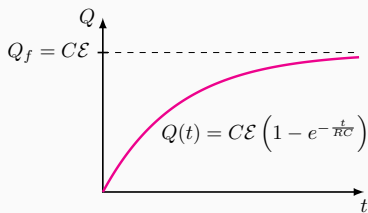
Esercizio 4

Un condensatore C inizialmente scarico viene connesso in serie a una resistenza R e a un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} . Si mostri che la differenza tra l'energia erogata dalla f.e.m. per caricare il condensatore e l'energia finale posseduta dal condensatore è uguale all'energia dissipata nella resistenza per effetto Joule.



Nel processo di carica una quantità di carica $Q_f = C\mathcal{E}$ passa a regime ($t \rightarrow \infty$) attraverso la f.e.m. che quindi fornisce un'energia

$$U_{\text{f.e.m.}} = Q_f \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 C$$



Il condensatore alla fine del processo di carica è carico con Q_f e quindi possiede un'energia

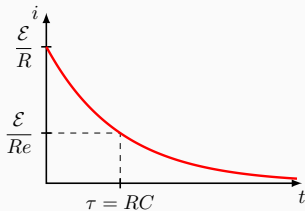
$$U_C = \frac{1}{2}Q_f\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2C$$

La differenza tra l'energia erogata dalla f.e.m. per caricare il condensatore e l'energia finale posseduta dal condensatore è

$$\Delta U = U_{\text{f.e.m.}} - U_C = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2C.$$

Per calcolare la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza si deve ricordare come varia nel tempo la corrente che circola nel circuito:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$



La potenza istantaneamente dissipata nella resistenza è:

$$\frac{dU_R}{dt} = P(t) = i(t)^2 R$$

Si ha perciò:

$$\frac{dU_R}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \Rightarrow dU_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

L'energia dissipata nella resistenza durante il processo di carica del condensatore è allora:

$$\Delta U_R = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

L'integrale può essere risolto per sostituzione ponendo $x = 2t/RC$ cosicché

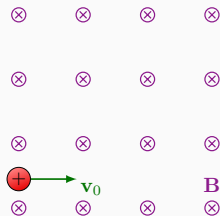
$$dt = \frac{RC}{2} dx$$

e, in conclusione, si trova

$$\Delta U_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{RC}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C = \Delta U$$

Esercizio 5

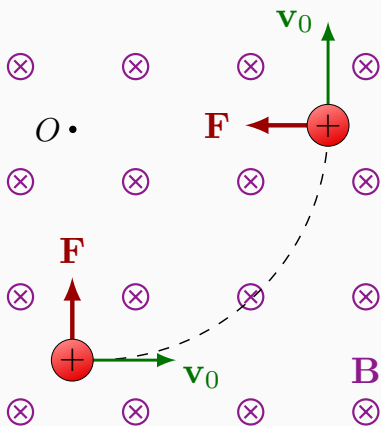
Una carica positiva q di massa m entra con velocità \mathbf{v}_0 in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} diretto perpendicolarmente alla velocità. Si mostri che il moto della particella è circolare uniforme; si determini (a) il raggio della traiettoria circolare e (b) il periodo del moto.



La forza su una carica in moto in un campo magnetico è perpendicolare alla velocità:

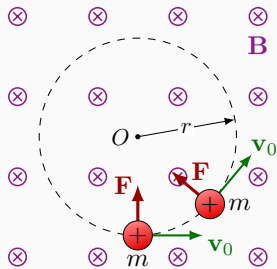
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB \sin \vartheta.$$

Se una carica si muove in un campo magnetico, la forza che si esercita su di essa cambia la direzione della velocità ma non il modulo.



Se il campo è uniforme \mathbf{F} ha modulo costante e diretta sempre verso un punto O .

Il moto di una particella carica che si muove perpendicolarmente a un campo magnetico uniforme è circolare e uniforme.



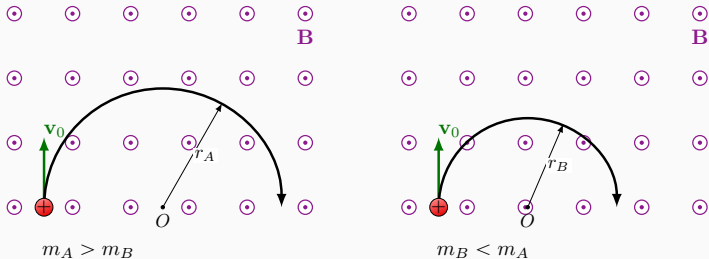
La forza \mathbf{F} è di modulo costante (qvB) e centripeta essendo sempre perpendicolare a \mathbf{v} e \mathbf{B} ; quindi:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad qv_0B = m\frac{v_0^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_0}{qB}.$$

Di conseguenza, il periodo del moto è:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Spettrometro di massa



$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r_A > r_B$$

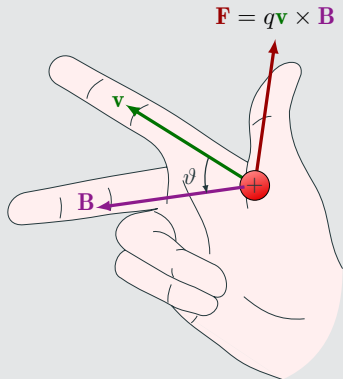
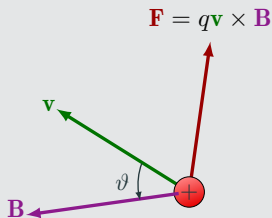
Cariche identiche ma di massa diversa che entrano con la stessa velocità perpendicolarmente a un medesimo campo magnetico uniforme, descrivono orbite circolari di raggio diverso.

La forza esercitata sulle correnti dal campo magnetico

Forza su una carica in moto in un campo magnetico

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow F = qvB \sin \vartheta$$

- Poiché \mathbf{F} è perpendicolare sia a \mathbf{v} sia a \mathbf{B} , è perpendicolare al piano su cui giacciono questi due vettori.



Poiché una corrente è formata
da cariche in movimento,
un filo percorso da corrente
in un campo magnetico
è sottoposto a una forza!

Forza su filo rettilineo percorso da corrente in un campo magnetico uniforme

1. La forza è proporzionale alla corrente I . La forza su una corrente che scorre nel filo in una direzione ha il verso opposto a quella che si esercita su una corrente di eguale modulo che scorra nel filo in direzione opposta.
2. La forza è proporzionale alla lunghezza del filo ℓ .
3. La forza è perpendicolare al filo e al campo magnetico.
4. La forza è proporzionale a $\sin \vartheta$, dove ϑ è l'angolo fra il verso definito convenzionalmente positivo della corrente I (quello in cui si muovono le cariche positive) e il campo magnetico \mathbf{B} : se la corrente è parallela o antiparallela a \mathbf{B} , la forza è nulla.

Forza su filo rettilineo percorso da corrente in un campo magnetico uniforme

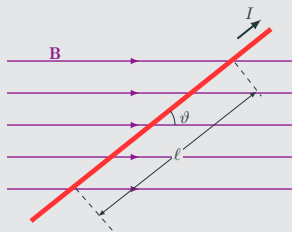
Queste osservazioni sperimentali possono essere sintetizzate come segue: quando una corrente I scorre in un filo posto in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} , la forza magnetica \mathbf{F} sul filo è:

$$\mathbf{F} = I(\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = I\ell B \sin \vartheta$$

dove $\boldsymbol{\ell}$ è un vettore di modulo pari alla lunghezza del filo e per verso quello convenzionalmente positivo della corrente.

Esempio

Si determini modulo direzione e verso della forza che si esercita su un filo rettilineo percorso da una corrente I che si trova in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} .



$$\mathbf{F} = I(\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = I\ell B \sin \vartheta$$

Fissati I e \mathbf{B} la forza magnetica agente sul filo dipende dalla lunghezza del filo ℓ all'interno del campo magnetico e dall'angolo ϑ tra la direzione positiva della corrente e \mathbf{B} . Per l'esempio in figura la forza è perpendicolare allo schermo diretta verso l'interno. Per $\vartheta = 0^\circ$ o 180° la forza agente sul filo è nulla.

Forza su filo non rettilineo percorso da corrente in un campo magnetico non uniforme

$$\mathbf{F} = I(\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

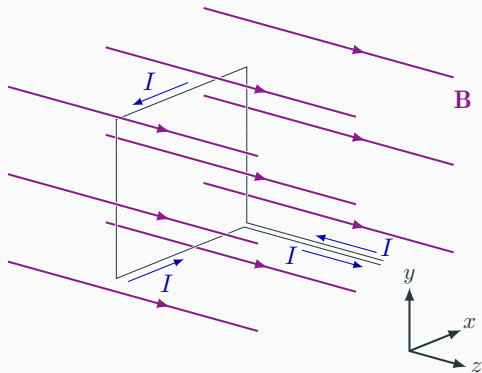
Questa relazione si applica nel caso in cui il campo magnetico sia uniforme e il filo rettilineo. Se \mathbf{B} non è uniforme o il filo non forma ovunque lo stesso angolo con la direzione del campo magnetico, la relazione va riscritta nella forma

$$d\mathbf{F} = I(d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

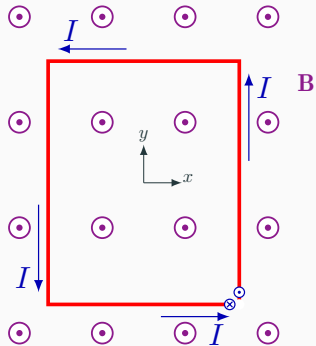
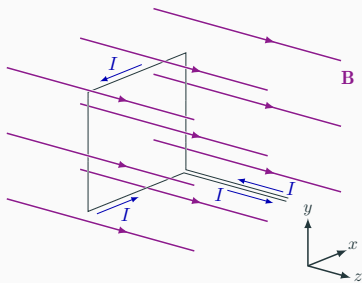
dove $d\mathbf{F}$ rappresenta la forza infinitesimale che agisce sull'elemento di lunghezza infinitesima $d\boldsymbol{\ell}$ del filo; dopodiché la forza totale agente sul filo sarà data da:

$$\int_{\text{filo}} d\mathbf{F} = I \int_{\text{filo}} (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

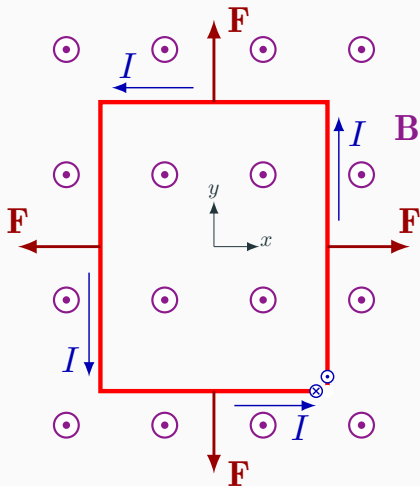
Spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme



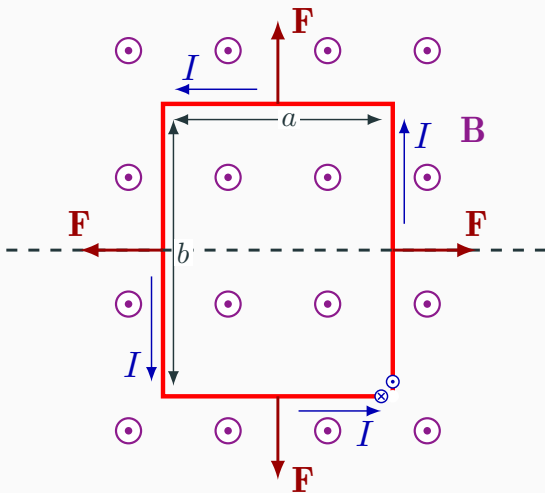
Spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme



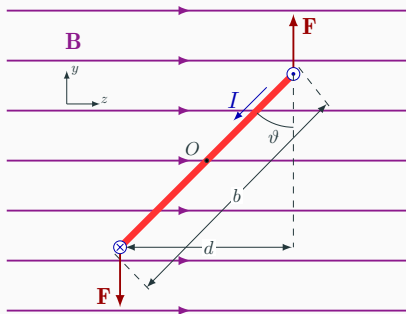
Spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme



Spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme

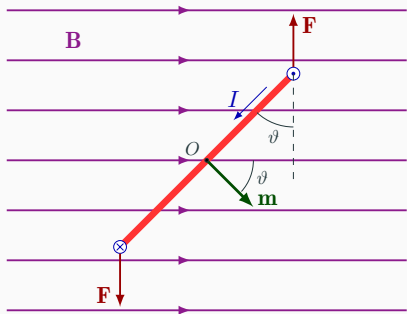


Spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme



$$F = IaB \quad \Rightarrow \quad M = Fd = IaB(b \sin \vartheta) = IAB \sin \vartheta$$

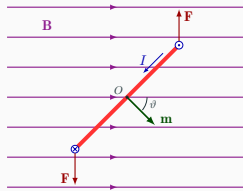
dove $A = ab$ è l'area della spira.



$$M = IAB \sin \vartheta$$

Se si definisce il **momento di dipolo magnetico** \mathbf{m} come un vettore di modulo IA , normale al piano della spira e diretto dalla parte dalla quale la corrente si vede circolare in senso antiorario, allora

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

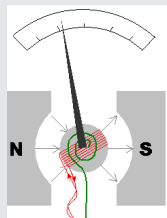


Momento di dipolo magnetico \mathbf{m} : $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

- Una spira piana percorsa da corrente posta in un campo magnetico è sottoposta a un momento torcente \mathbf{M} che tende ad allineare il momento di dipolo magnetico \mathbf{m} nella direzione del campo magnetico.
- In un campo magnetico un ago magnetico e una spira si comportano allo stesso modo
- L'effetto di orientamento di \mathbf{m} nel campo magnetico è analogo all'effetto di orientamento di \mathbf{p} (momento di dipolo elettrico) in un campo elettrico: da qui il nome di momento di dipolo magnetico dato al vettore \mathbf{m} .

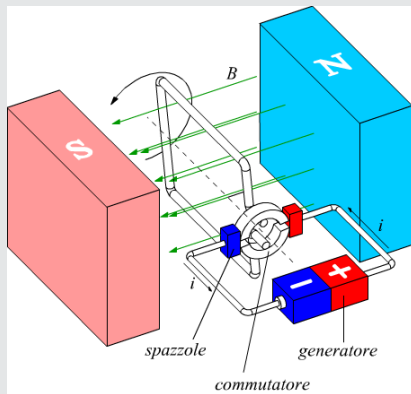
Il galvanometro

La base di ogni misuratore analogico (quelli dotati di una lancetta indicatrice sovrapposta a una scala graduata) quali amperometri, voltmetri, ohmmetri ecc. è il **galvanometro**.



Motori elettrici

Un **motore elettrico** trasforma l'energia elettrica in energia meccanica (rotazionale). Il motore si basa sul momento torcente che agisce su una spira percorsa da corrente posta in un campo magnetico.



L'altoparlante

Un **altoparlante** funziona in base al principio in base al quale un campo magnetico esercita una forza su un filo percorso da corrente

