Complementi di Fisica - XV Lezione

Le sorgenti del campo magnetico: correnti e magneti

Andrea Bettucci

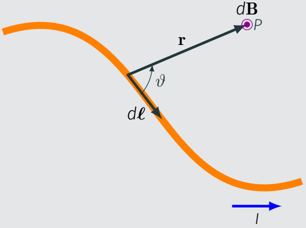
28 aprile 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Il campo magnetico generato da correnti

Campo magnetico generato da una corrente

Nel vuoto, il campo magnetico $d\mathbf{B}$ generato in un punto P dovuto alle cariche che fluiscono in elemento infinitesimo rettilineo $d\boldsymbol{\ell}$ di un conduttore percorso da una corrente stazionaria I è dato da:



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore posizione (di modulo r) che va dall'elemento $d\boldsymbol{\ell}$ al punto P.

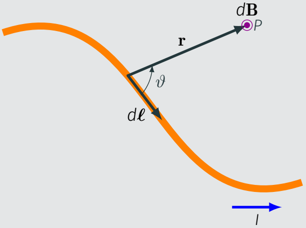
La costante μ_0 si chiama permeabilità magnetica del vuoto.

Nel Sistema Internazionale

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, \mathrm{T \cdot m/A}$$

Campo magnetico generato da una corrente

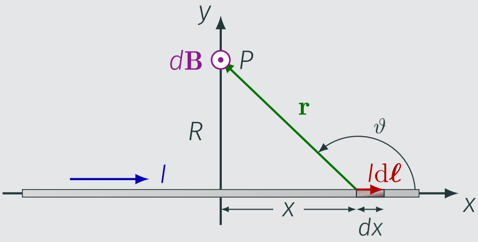
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \sin\vartheta}{r^2}$$



Il campo magnetico totale nel punto P si ottiene sommando vettorialmente i contributi di tutti gli elementi di lunghezza infinitesima nei quali può essere scomposto il filo:

$$\boxed{\mathbf{B} = \int_{\text{filo}} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{filo}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}}$$

Esempio - Campo magnetico generato in un punto P a distanza R da un sottile filo infinitamente lungo percorso da una corrente I



Tutti gli elementi infinitesimi di filo di lunghezza $d\boldsymbol{\ell}$ danno in P contributi $d\mathbf{B}$ diretti come in figura dove

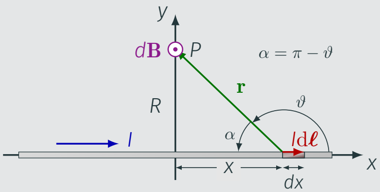
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\vartheta}{r^2}$$

cosicché

$$B(P) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\vartheta}{r^2}$$

Campo magnetico generato in un punto P a una distanza R da un sottile filo infinitamente lungo percorso da una corrente I

$$B(P) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\vartheta}{r^2}$$



Ma le variabili x, r e ϑ non sono indipendenti:

$$r = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\vartheta}$$

$$x = r\cos\alpha = -r\cos\vartheta = -R\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{R}{sin^2\vartheta}d\vartheta$$

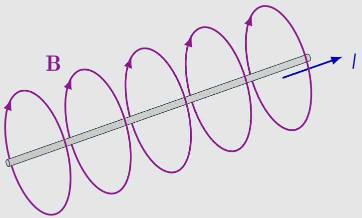
$$B(P) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\pi}^{0} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}2$$

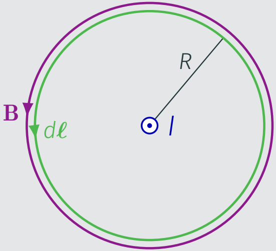
Campo magnetico generato in un punto P a una distanza R da un sottile filo infinitamente lungo percorso da una corrente I

Legge di Biot-Savart

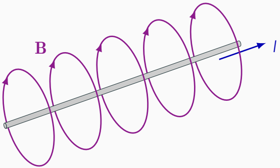
$$\boxed{B(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

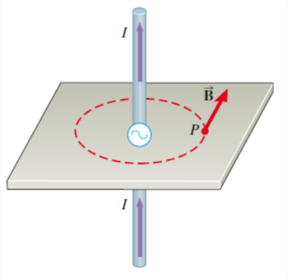
Le linee di forza (linee di induzione) sono cerchi che giacciono in piani normali al conduttore, hanno centro nella traccia del conduttore sul piano e passano attraverso il punto in questione.





Le linee di forza (linee di induzione) sono cerchi che giacciono in piani normali al conduttore, hanno centro nella traccia del conduttore sul piano e passano attraverso il punto in questione.





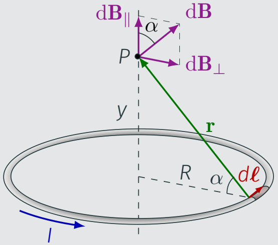
Il verso di percorrenza delle linee di induzione si determina facilmente con la regola della mano destra: **si afferra idealmente il filo con la mano destra in modo che il pollice punti nel verso convenzionale (positivo) di scorrimento della corrente; dopodiché il verso in cui le dita si chiudono circondando il filo indicherà la direzione del campo magnetico.**

Esempio - Campo magnetico generato in un punto P a distanza y sull'asse di una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2}$$

poiché l'angolo ϑ tra $d\boldsymbol{\ell}$ e $\mathbf{r}$ vale $\pi/2$.



$d\mathbf{B}$ dovuto all'elemento $d\boldsymbol{\ell}$ è normale al piano di $d\boldsymbol{\ell}$ e $\mathbf{r}$ e ha una componente lungo l'asse della spira $dB_{\parallel} = dB\cos\alpha$ e una componente normale all'asse $dB_{\perp}$. $dB_{\perp}$ è uguale e opposta all'analoga componente creata in P dall'elementino di circuito in posizione simmetrica (rispetto al centro della spira) di $d\boldsymbol{\ell}$.

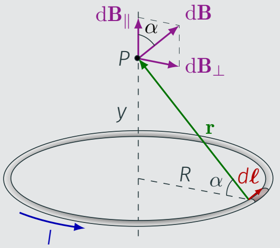
Si sommano solo i contributi paralleli all'asse: il campo magnetico totale in P sarà diretto lungo l'asse.

Campo magnetico generato in un punto P a distanza y sull'asse di una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2}$$

$$dB_{\parallel} = dB\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2}\cos\alpha$$

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{spira}}\frac{d\ell}{r^2}\cos\alpha$$



Poiché valgono le seguenti relazioni:

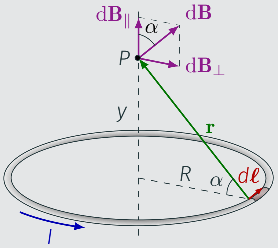
$$\cos\alpha = \frac{R}{r} \qquad \text{e} \qquad r = \sqrt{R^2 + y^2}$$

allora

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\text{spira}} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(2\pi R)$$

Campo magnetico generato in un punto P a distanza y sull'asse di una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I

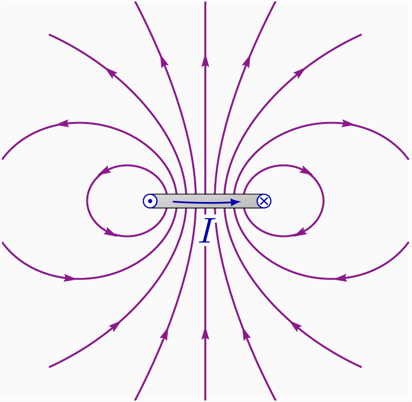
$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



In particolare, al centro della spira ($y = 0$)

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

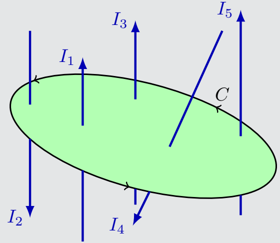
Rappresentazione grafica delle linee di forza di una spira circolare percorsa da una corrente I



Legge di Ampère

In una regione che contiene correnti stazionarie, la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una linea chiusa orientata C qualsiasi è pari al prodotto di μ_0 e della somma delle correnti abbracciate dalla linea: le correnti sono da portarsi in conto con il segno $+$ o $-$ a seconda che le linee di induzione del campo creato da ciascuna di esse abbiano verso concorde o discorde con quello della linea orientata

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i$$

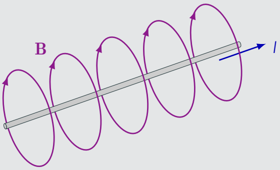


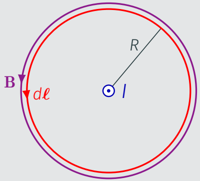
Nel caso a destra, la legge di Ampère si scriverà nella forma:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5)$$

Esempio - Applicazione della legge di Ampère nel caso di un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente I

Sappiamo che le linee di forza del campo magnetico sono cerchi che giacciono in piani normali al conduttore e hanno centro nel conduttore



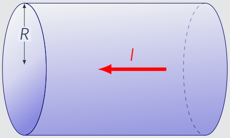


Scegliamo come linea chiusa una circonferenza (linea rossa) di raggio R generico centrata nel filo e giacente nel piano ortogonale al filo. Se si sceglie il verso di percorrenza della figura, $\mathbf{B}$ è concorde con $d\boldsymbol{\ell}$ e la corrente I è positiva; quindi:

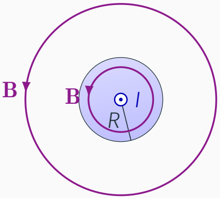
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B \oint d\ell = B 2\pi R = \mu_o I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Esercizio

Un filo conduttore rettilineo molto lungo a sezione circolare di raggio R è percorso da una corrente I uniformemente distribuita sulla sezione trasversale del filo. Si determini il campo magnetico nei punti esterni e interni al conduttore.

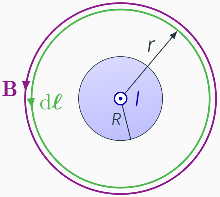


Poiché il filo è rettilineo, cilindrico e molto lungo, per simmetria ci si aspetta che il campo magnetico abbia lo stesso valore in tutti i punti equidistanti dall'asse del filo. Inoltre le linee di induzione devono essere circolari e giacenti su piani ortogonali al filo con centro sul suo asse.



Si può allora applicare la legge di Ampère scegliendo per l'integrazione un cammino circolare concentrico al filo.

Se $r > R$, la corrente concatenata è I, quindi

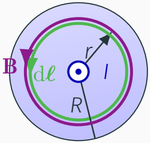


$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B \oint d\ell = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

che è lo stesso risultato ottenuto per un filo rettilineo sottile infinitamente lungo (legge di Biot-Savart).

All'interno del conduttore ($r \leq R$), continua a valere la simmetria cilindrica, quindi si può applicare la legge di Ampère scegliendo per l'integrazione un cammino circolare concentrico al filo.



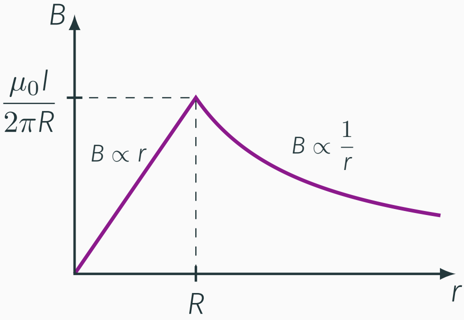
Poiché la corrente è uniformemente distribuita nel volume del filo, la corrente intercettata dalla superficie racchiusa dal cammino circolare – la corrente concatenata – è minore della corrente totale I di un fattore pari al rapporto tra le aree delle superfici racchiuse nei due casi

$$I_{\text{conc.}} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{conc.}} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

In conclusione:

$$\begin{cases} B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \\[2ex] B(r) = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r \leq R \end{cases}$$

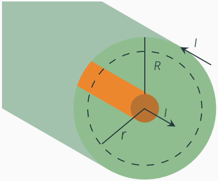


Cavo coassiale

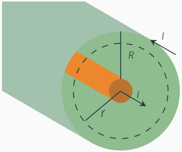
Un cavo coassiale rettilineo molto lungo ha al suo centro un conduttore filiforme sottile circondato da una maglia metallica intrecciata. I due conduttori sono separati da un isolante. Il filo centrale trasporta una corrente I all'altro capo del cavo, mentre la maglia trasporta una corrente I nel verso opposto (corrente di ritorno) ed è generalmente collegata a terra. Come varia il campo magnetico in funzione della distanza r dal filo centrale?

Nello spazio tra i due conduttori ($r < R$) si può applicare la legge di Ampère su un percorso circolare centrato sull'asse del cavo:

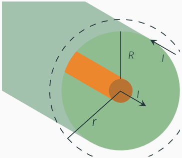
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



- Nello spazio tra i due conduttori ($r < R$) le linee di forza del campo magnetico formano delle circonferenze concentriche centrate sull'asse del cavo e giacenti perpendicolari a esso.
- La corrente nella maglia esterna non dà contributo al campo magnetico per $r < R$: nella legge di Ampère si considerano solo le correnti concatenate con il circuito.
- La corrente che scorre al di fuori del percorso e che non ha influenza sulla simmetria del campo non contribuisce al campo magnetico lungo il cammino.



All'esterno del cavo ($r \geq R$) si può applicare la legge di Ampère su un percorso circolare centrato sull'asse del cavo: per ragioni di simmetria, anche in questa regione le linee di induzione saranno circonferenze giacenti su piani normali all'asse del cavo e con centro su di esso.
In questo caso la corrente concatenata (racchiusa) da percorso circolare è nulla, quindi:



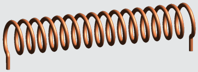
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I = 0 \quad \Rightarrow \quad B(r) = 0$$

1. Un cavo coassiale si auto-scherma: il cavo pur trasportando una corrente non genera all'esterno un campo magnetico.
2. La maglia conduttrice esterna fa da schermo ai campi elettrici esterni, impedendone la penetrazione nel cavo.

I cavi coassiali sono ideali per il trasporto di segnali in prossimità di apparecchiature sensibili ai disturbi causati da campi elettrici.

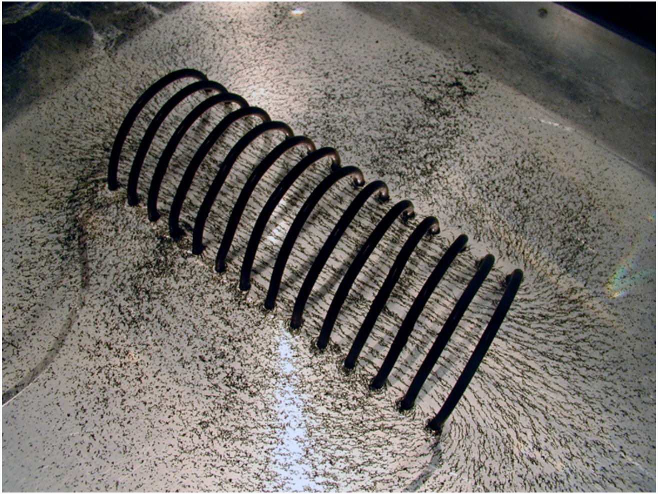
Campo magnetico generato da un solenoide

Un solenoide è costituito da un lungo avvolgimento di forma cilindrica formato da molte spire vicine tra loro realizzato con un sottile filo conduttore.

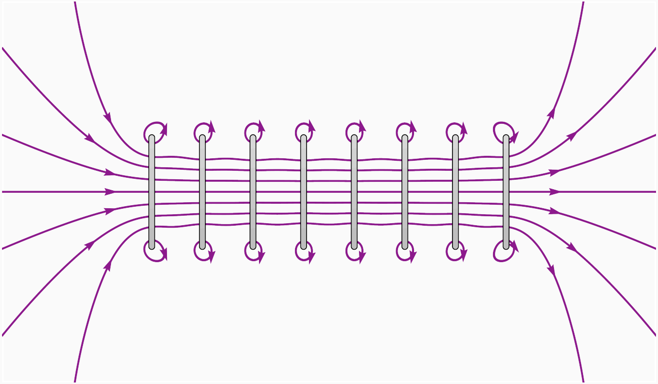


Quando un solenoide molto lungo con spire molto vicine tra loro è percorso da una corrente stazionaria I, si verifica sperimentalmente che viene generato un campo magnetico con buona approssimazione uniforme e parallelo all'asse del solenoide in tutta la sezione trasversale del solenoide.
Il campo magnetico al di fuori del solenoide è praticamente nullo con l'eccezione delle zone immediatamente vicine alle estremità del solenoide.

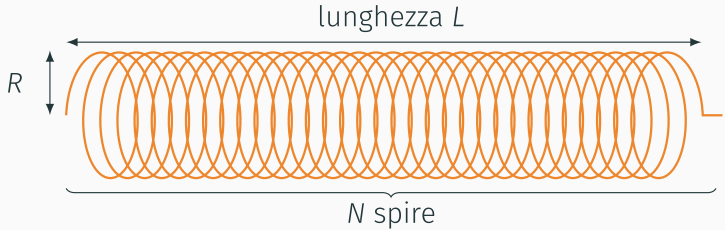
Linee di forza di un solenoide reale



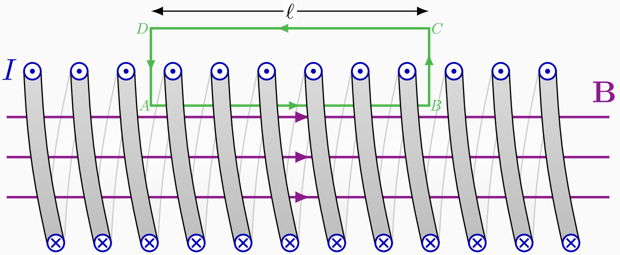
Rappresentazione grafica delle linee di forza di un solenoide reale



È possibile utilizzare la legge di Ampère per determinare il campo magnetico all'interno di un solenoide molto lungo ($L \to \infty$ dal punto di vista ideale), formato da N spire e, quindi, avente $n = N/L$ spire per unità di lunghezza.



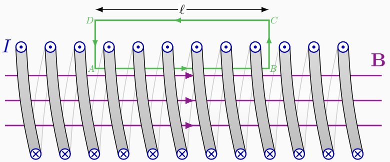
Data la conformazione del campo magnetico, per l'applicazione della legge di Ampère è conveniente scegliere il percorso chiuso *ABCD* rappresentato dal rettangolo verde



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Data la struttura del campo magnetico, si ha:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B\ell$$

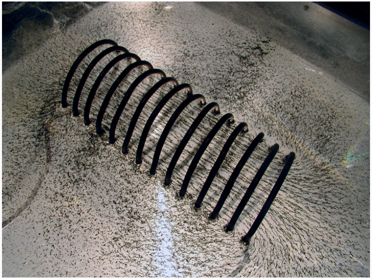


Poiché la corrente concatenata dal circuito verde è pari a $n\ell I$ essendo n il numero di spire per unità di lunghezza e I la corrente che circola nel solenoide, si ottiene per l'intensità del campo magnetico all'interno del solenoide:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B\ell = \mu_0 n\ell I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 nI$$

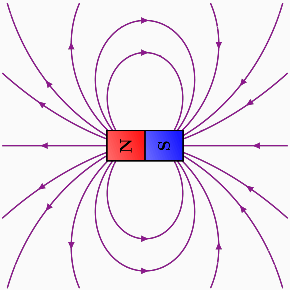
L'intensità di $\mathbf{B}$ non dipende dalla posizione all'interno del solenoide e, di conseguenza $\mathbf{B}$ risulta uniforme.
Questo risultato è vero rigorosamente per un solenoide di lunghezza infinita, ma risulta vero con buona approssimazione anche per solenoidi reali in punti non troppo vicini alle estremità.

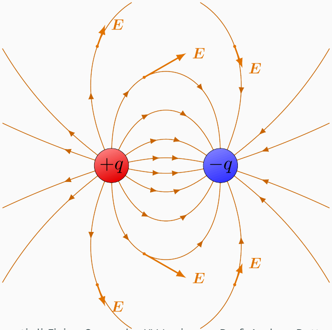
Nei sistemi di risonanza magnetica un intenso campo magnetico viene impiegato per realizzare immagini di parti interne del corpo umano.



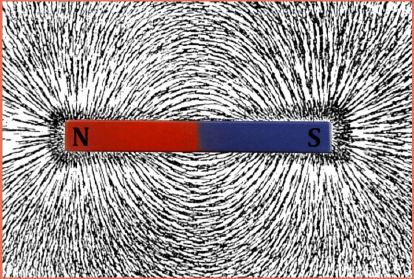
Il campo magnetico generato da magneti

- I campi magnetici possono essere prodotti da materiali magnetici
- Solo pochi elementi chimici quali il ferro, il cobalto, il nichel, il gadolino e alcuni dei loro ossidi e leghe generano effetti magnetici. Questi materiali vengono detto ferromagnetici.
- Una barra magnetica con i due poli magnetici all'estremità presenta una struttura delle linee di forza analoga a quella di un dipolo elettrico con le due cariche uguali e opposte a una certa distanza.



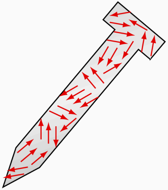


Qual è l’origine del ferromagnetismo?

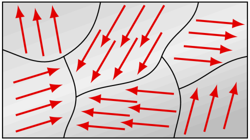


- A livello microscopico un materiale ferromagnetico è suddiviso in regioni dette domini magnetici o domini di Weiss aventi dimensione inferiori al mm^3.
- Ogni singolo dominio si comporta come un piccolo magnete con il proprio polo nord e sud.
- In un campione di ferro non magnetizzato, i domini magnetici orientati in maniera casuale: gli effetti magnetici dei singoli domini si cancellano l'un con l'altro e il campione di ferro risulta non magnetizzato.

Campione di materiale ferromagnetico non magnetizzato

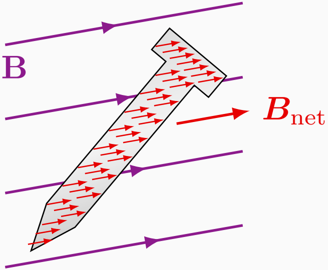


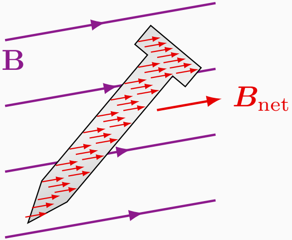
Domini magnetici orientati casualmente



- In un magnete, invece, i domini sono prevalentemente allineati lungo una direzione.
- È possibile trasformare un campione di materiale ferromagnetico non magnetizzato in uno magnetizzato ponendolo in un intenso campo magnetico; ad esempio si può porre il campione all'interno di un solenoide percorso da una corrente.

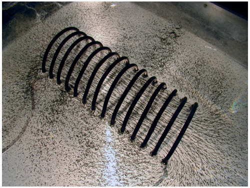
Campione di materiale ferromagnetico magnetizzato





- Tolto il campo magnetico esterno $\mathbf{B}$, il magnete è in grado di rimanere magnetizzato per lungo tempo e per tale motivo viene detto magnete permanente.
- Un magnete permanente può perdere il proprio magnetismo anche a causa di un riscaldamento.
- L'innalzamento della temperatura accresce il moto di agitazione termica degli atomi aumentando la disposizione casuale dei domini magnetici.
- Al di sopra di una certa temperatura, detta temperatura di Curie ($1043\,\text{K}$ per il ferro), il ferromagnetismo scompare del tutto.

Siete ora in grado di spiegare il fenomeno
per il quale un magnete è in grado di attrarre
piccoli pezzetti di ferro non magnetizzati
(una graffetta metallica, ad esempio)



- Se all’interno di un solenoide si inserisce una sbarra di materiale ferromagnetico, l’intensità del campo magnetico cresce notevolmente.
- I domini magnetici del materiale del materiale ferromagnetico vengono allineati al campo magentico prodotto dalla corrente elettrica circolante nel solenoide: il campo magnetico totale è dato dalla somma del campo magnetico generato dalla corrente e di quello dei domini del ferro.
- Il campo magnetico totale può risultare migliaia di volte più intenso di quello generato dalla sola corrente circolante nelle spire del solenoide.
- Questo tipo di dispositivo è chiamato elettromagnete.