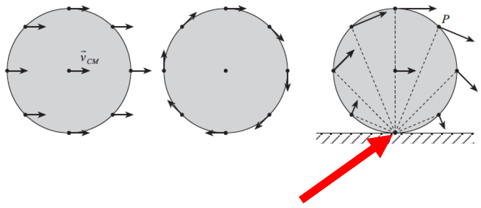
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO – ROTOLAMENTO **ENERGIA CINETICA**

ROTOTRASLAZIONE o ROTAZIONE intorno all'asse istantaneo di rotazione?



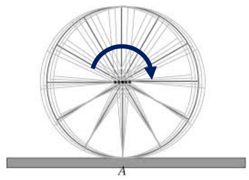
ROTOLAMENTO PURO: $v_{CM} = \omega R$ → $a_{CM} = \alpha R$

KÖNIG: $K = ½\, m\, v_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\, \omega^2$

HUYGENS-STEINER: $I = I_{CM} + m\, d^2$

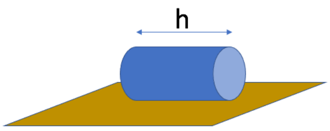
Consideriamo un corpo di massa m con simmetria circolare (anello, disco, cilindro pieno o cavo, sfera piena o cava) con momento d'inerzia I_{CM} per una rotazione intorno all'asse passante per il CM

Considerando il moto rototraslatorio si ha $K = ½\, m\, v_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\, \omega^2$
$= ½\, m\, (\omega R)^2 + ½\, I_{CM}\, \omega^2 = ½\, (m\, R^2 + I_{CM})\, \omega^2$

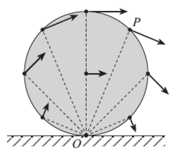


Considerando il moto rotatorio intorno all'asse istantaneo di rotazione si ha $K = ½\, I\, \omega^2 = ½\, (m\, R^2 + I_{CM})\, \omega^2$

1



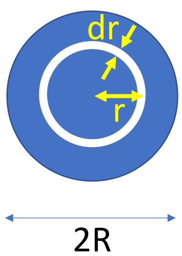
1) Un cilindro omogeneo di raggio R = 1 cm e altezza h = 10 cm rotola senza strisciare su un piano scabro. Il cilindro è costituito da un materiale omogeneo di densità $\rho = 4 \times 10^3\ kg/m^3$.
Determinare il momento d'inerzia del cilindro calcolato rispetto all'asse istantaneo di rotazione.



$I = I_{CM} + m\, R^2 = ½\, m\, R^2 + m\, R^2 = 3/2\, m\, R^2$

$m = \rho\, \pi R^2\, h = (4 \times 10^3\ kg/m^3)\, (\pi\, 10^{-4}\ m^2)\, (0{,}1\ m) = 4\pi \times 10^{-2}\ kg$

$I = 3/2\, (4\pi \times 10^{-2}\ kg)\, (10^{-4}\ m^2) = 6\, \pi\, 10^{-6}\ kg\, m^2$



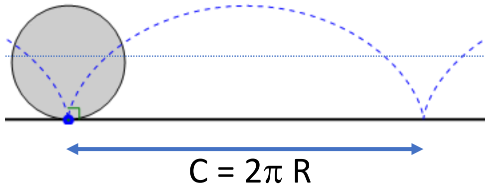
$$dI = r^2\, dm = r^2 d(\rho V) \qquad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

$$dI = r^2 \rho\, (2\pi r\, dr\, h) = 2\pi\rho h\, r^3 dr$$

$$I = \int_0^R 2\pi\rho h\, r^3 dr = 2\pi\rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = 2\cancel{\pi} \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}} \cancel{h} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

2

2) Un disco omogeneo di massa M = 1 kg ruota senza strisciare lungo un piano orizzontale scabro.
Sapendo che in un tempo Δt = 2 s il disco compie N = 10 giri e percorre una distanza d = 20 m determinarne il raggio e l'energia cinetica.

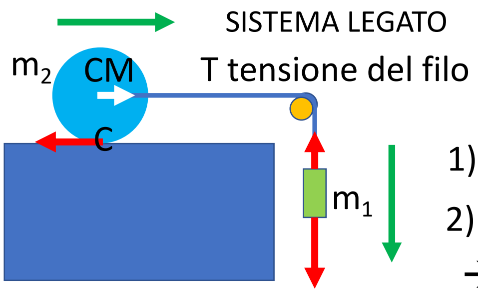


$d = N\,C \rightarrow 20\text{ m} = 10 \times (2\pi R) \rightarrow R = 1/\pi = 0{,}318\text{ m}$

$v_{CM} = d/t = 20\text{ m}/2\text{ s} = 10\text{ m/s}$

$$K = ½\, m\, v_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\, \omega^2 = ½\, m\, v_{CM}^2 + ½\,(½\, mR^2)\omega^2$$
$$= ½\, m\, v_{CM}^2 + ¼\, m\,(R^2\omega^2)$$
$$= ¾\, m\, v_{CM}^2 = 75\text{ J}$$

3



3) Un cilindro omogeneo di massa m_2 e raggio r rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale tirato, tramite una fune ideale, da una massa m_1 che scende verticalmente.
Determinare l'accelerazione della massa m_1

1) $m_1 g - T = m_1 a \rightarrow T = m_1 g - m_1 a$

2) $r\,T = I\,\alpha = (½\, m_2 r^2 + m_2 r^2)\, a/r$

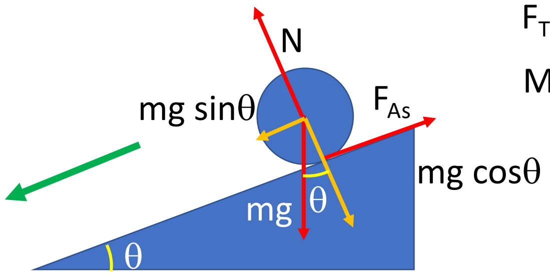
$\rightarrow T = I\, a/r^2 = (3/2\, m_2 r^2)\, a/r^2 = 3/2\, m_2\, a$

$T = m_1 g - m_1 a = 3/2\, m_2\, a$

$\rightarrow a = m_1 g/(m_1 + 3/2\, m_2)$

4

4) Un cilindro omogeneo di peso p = 60 N rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di 30°.
Quanto vale la forza di attrito statico?



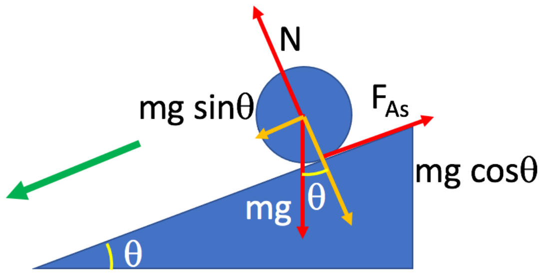
F_{TOT}: $m\,g\,\sin\theta - F_{As} = m\,a \rightarrow F_{As} = m\,g\,\sin\theta - m\,a$

M_O: $r\,m\,g\,\sin\theta = I_O\,a/r \rightarrow a = mr^2\,g\,\sin\theta/I_O$

$$F_{As} = m\,g\,\sin\theta - \underline{m}\,(mr^2\,\underline{g\,\sin\theta}/I_O)$$
$$= m\,g\,\sin\theta\,(1 - mr^2/I_O)$$
$$= m\,g\,\sin\theta\,[1 - \cancel{mr^2}/(3/2\cancel{mr^2})$$
$$= 1/3\;m\,g\,\sin\theta = 10\text{ N}$$

5

4) Un cilindro omogeneo di massa m e raggio r rotola lungo un piano inclinato.
Qual è la massima inclinazione del piano oltre la quale il moto non è più di rotolamento puro?



$$a = mr^2\,g\,\sin\theta/I_O$$
$$= \cancel{mr^2}\,g\,\sin\theta/(3/2\,\cancel{mr^2})$$
$$\rightarrow a = 2/3\,g\,\sin\theta < g\,\sin\theta$$

$F_{As} = 1/3\;m\,g\,\sin\theta \leq F_{AsMAX}$?

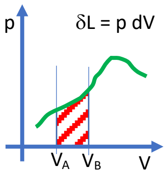
$1/3\;\cancel{mg}\,\sin\theta \leq F_{AsMAX} = \mu_s\,\cancel{mg}\,\cos\theta$?

$\rightarrow 1/3\;\sin\theta \leq \mu_s\,\cos\theta \rightarrow \text{tg}\theta \leq 3\,\mu_s = \text{tg}\theta_{MAX}$

6

GRAFICARE UNA TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA REVERSIBILE
(gas perfetto)

piano di Clapeyron p - V



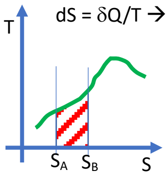
$\delta L = p\,dV$

$$L_{A\to B} = \int_A^B p\,dV$$

lavoro prodotto dal gas > 0
espansione

lavoro assorbito dal gas < 0
compressione

piano entropico T - S



$dS = \delta Q/T \rightarrow \delta Q = T\,dS$

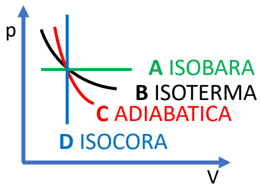
$$Q_{A\to B} = \int_A^B T\,dS$$

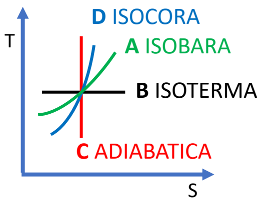
calore assorbito dal gas > 0

calore ceduto dal gas < 0

7

GRAFICARE UNA TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA REVERSIBILE
(gas perfetto)





A ISOBARA

p = costante

$\delta Q = n\,c_p\,dT \rightarrow dS = \delta Q/T = n\,c_p\,dT/T \rightarrow \Delta S = n\,c_p \ln(T/T_0)$ $\quad T = T_0\, e^{\frac{\Delta S}{n c_p}}$

B ISOTERMA

$p\,V = n\,R\,T \rightarrow p = (n\,R\,T)/V \rightarrow$ iperbole

T = costante

C ADIABATICA/ISOENTROPICA

$p\,V^{\gamma}$ = costante

S = costante

D ISOCORA

V = costante

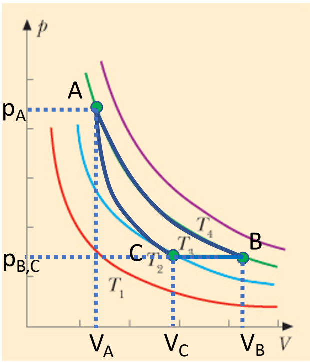
$\delta Q = n\,c_V\,dT \rightarrow dS = \delta Q/T = n\,c_V\,dT/T \rightarrow \Delta S = n\,c_V \ln(T/T_0)$ $\quad T = T_0\, e^{\frac{\Delta S}{n c_V}}$

Mayer: $c_p = {}_{pV} + R$

POLITROPICA pV^{κ} = costante

8

5) Una mole di gas perfetto biatomico, reversibilmente, si espande a temperatura costante dallo stato A (p_A = 200 kPa; V_A = 20 x 10^{-3} m^3) allo stato B (p_B = 100 kPa). Viene poi compresso a pressione costante fino allo stato C. Infine torna allo stato A senza scambiare calore con l'esterno.
Determinare
a) i valori di pressione, volume e temperatura in A, B, C
b) i calori e lavori scambiati nelle varie trasformazioni
c) disegnare la trasformazione nel piano entropico



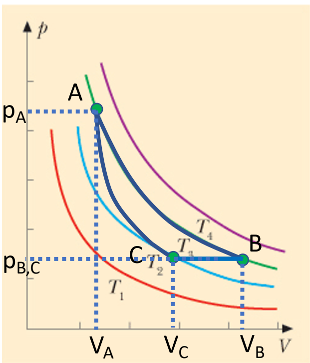
A:(200 kPa; 20 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)
B:(100 kPa; 40 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)
C:(100 kPa; 32,8 x 10^{-3} m^3; 394,7 K)

$pV = n\,RT \rightarrow T = pV/R$
$pV = n\,RT \rightarrow V = RT/p$
pV = cost

pV^{γ} = cost
$p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma}$
$200k \times 20^{1,4} = 100k \times V_C^{1,4}$
$pV = n\,RT \rightarrow T = pV/R$

9

5) Una mole di gas perfetto biatomico, reversibilmente, si espande a temperatura costante dallo stato A (p_A = 200 kPa; V_A = 20 x 10^{-3} m^3) allo stato B (p_B = 100 kPa). Viene poi compresso a pressione costante fino allo stato C. Infine torna allo stato A senza scambiare calore con l'esterno.
Determinare
a) i valori di pressione, volume e temperatura in A, B, C
b) i calori e lavori scambiati nelle varie trasformazioni
c) disegnare la trasformazione nel piano entropico



A:(200 kPa; 20 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)
B:(100 kPa; 40 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)
C:(100 kPa; 32,8 x 10^{-3} m^3; 394,7 K)

$\delta Q = \delta L + \Delta U = p\,dV + n\,c_v\,dT$
$pV = n\,RT$

$Q_{A\rightarrow B} = L_{A\rightarrow B} = n\,RT \ln (V_B/V_A) = R\ 481{,}3 \ln(40/20) = 2772$ J

$Q_{B\rightarrow C} = n\,c_p\,(T_C - T_B) = 7/2\ R\ (394{,}7 - 481{,}3) = -2519$ J
$L_{B\rightarrow C} = p\,(V_C - V_B) = 100\ k\ (32{,}8 - 40) \times 10^{-3} = -720$ J

$Q_{C\rightarrow A} = 0$
$L_{C\rightarrow A} = -\,n\,c_v\,(T_A - T_C) = -\,5/2\ R\ (481{,}3 - 394{,}7) = -1799$ J

R = 8,31 J/K mol

$\Sigma\, Q_i = 2772 - 2519 + 0 = 253$ J
$\Sigma\, L_i = 2772 - 720 - 1799 = 253$ J

10

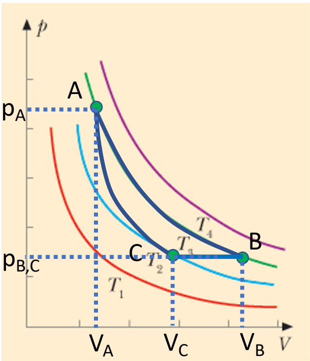
5) Una mole di gas perfetto biatomico, reversibilmente, si espande a **temperatura costante** dallo stato A (p_A = 200 kPa; V_A = 20 x 10^{-3} m^3) allo stato B (p_B = 100 kPa). Viene poi compresso a **pressione costante** fino allo stato C. Infine torna allo stato A **senza scambiare calore** con l'esterno.

Determinare

a) i valori di pressione, volume e temperatura in A, B, C

b) i calori e lavori scambiati nelle varie trasformazioni

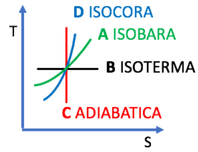
c) disegnare la trasformazione nel piano entropico

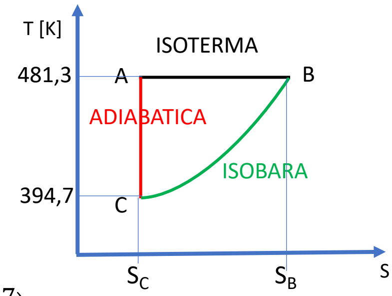


A:(200 kPa; 20 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)

B:(100 kPa; 40 x 10^{-3} m^3; 481,3 K)

C:(100 kPa; 32,8 x 10^{-3} m^3; 394,7 K)



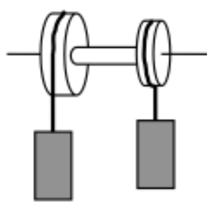


$$S_{B\to C} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \int_B^C \frac{n c_p dT}{T} = \frac{7}{2} R \ln\left(\frac{394{,}7}{481{,}3}\right) = -5{,}77 \text{ J/K}$$

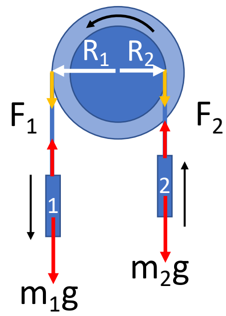
S_C + 5,77 J/K

$$S_{A\to B} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{Q_{A\to B}}{T_A} = \frac{2772 \text{ J}}{481{,}3 \text{ K}} = 5{,}77 \text{ J/K}$$

6) Un sistema rigido di momento d'inerzia I è costituito da due pulegge di raggi R_1 e R_2 e da una sbarra di collegamento.
Sulle due pulegge sono arrotolate in versi opposti due funi ideali alle cui estremità sono appese due masse m uguali. Determinare l'accelerazione angolare del sistema di pulegge.



sistema legato



1) $mg - F_1 = ma_1 = m\,\alpha R_1 \rightarrow F_1 = mg - m\,\alpha R_1$

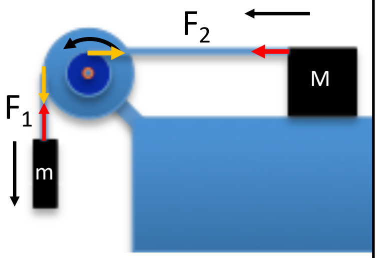
2) $-mg + F_2 = ma_2 = m\,\alpha R_2 \rightarrow F_2 = mg + m\,\alpha R_2$

3) $R_1 F_1 - R_2 F_2 = I\,\alpha \rightarrow (R_1 mg - m\,\alpha R_1) - (R_2 mg + m\,\alpha R_2^2) = I\,\alpha$

$R_1 mg - R_2 mg = m\,\alpha R_1^2 + m\,\alpha R_2^2 + I\,\alpha = [m(R_1^2 + R_2^2) + I]\,\alpha$

$\rightarrow \alpha = mg(R_1 - R_2)/[m(R_1^2 + R_2^2) + I]$

7) Su un piano orizzontale liscio è appoggiato un blocco di massa M collegato tramite un filo ideale a una puleggia di raggio R. La puleggia è costituita da due dischi concentrici. Intorno a quello di raggio 2R è avvolto un altro filo ideale alla cui estremità è appesa una massa m. Determinare l'accelerazione angolare della puleggia sapendo che ha un momento d'inerzia I rispetto all'asse di rotazione.



1) $mg - F_1 = ma = m\,\alpha 2R \rightarrow F_1 = mg - m\,\alpha 2R$

2) $F_2 = M\,a = M\,\alpha R$

3) $2R\,F_1 - R\,F_2 = I\,\alpha$

$2R\,mg - 4\,m\alpha R^2 - M\alpha R^2 = I\,\alpha \quad \rightarrow 2R\,mg = [4\,mR^2 + MR^2 + I]\,\alpha$

$\rightarrow \alpha = 2R\,mg/(4mR^2 + MR^2 + I)$

13

CONTATTATEMI SE POSSO ESSERE UTILE IN VISTA DELL'ESONERO

14