PROBABILITÀ E STATISTICA - 23 Giugno 2017

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Un'urna contiene 2 palline bianche e 28 nere; da essa vengono estratte una alla volta e senza restituzione 6 palline. Calcolare la probabilità α di estrarre 2 palline bianche consecutivamente.

$$\alpha =$$

2. - Un uomo di 50 anni deve ricevere un rimborso da un ente pubblico. Il tempo T (espresso in anni) di disbrigo delle innumerevoli pratiche burocratiche ha distribuzione esponenziale con valore medio pari a 15. La durata X della vita dell'uomo (espressa in anni) ha la seguente distribuzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_x e^{-\lambda_x(x-50)} & \text{per} \quad x > 50 \\ 0 & \text{per} \quad x \leq 50 \end{cases}$$

dove λ_x $\left(\text{espresso in} \dfrac{1}{\text{anni}}\right)$ è pari a $\dfrac{1}{20}$.

Calcolare la probabilità γ che l'uomo muoia senza rivedere i propri soldi.
(N.B. si supponga che X e T siano indipendenti)

$$\gamma =$$

3. - Sia (X, Y) un vettore aleatorio con la seguente densità congiunta

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & se \quad 0 \leq x, 0 \leq y \\ \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Stabilire se X ed Y sono indipendenti. Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}(Y)$ di Y e la densità di probabilità di $Z = X/Y$.

X e Y sono indipendenti ?

$$\mathbb{E}(y) = \qquad\qquad f_Z(z) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

4. - Sia X una variabile aleatoria che assume valori nell'insieme $I = \{-1, 0, 1, 2\}$ e ha distribuzione di probabilitá:

$$p(x) = \theta^{|x|}(1-\theta)^{2-|x|}; \quad x \in I.$$

Dato un campione $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, stimare il parametro θ con il metodo della massima verosimiglianza.

$$\hat{\theta} =$$

5. - La media aritmetica delle spese per assistenza sanitaria annuali effettuate da un campione di $n = 10$ famiglie é di 1000 euro. Supponendo che la distribuzione delle spese sia Gaussiana con deviazione standard $\sigma = 100$, si calcoli l'intervallo di confidenza bilaterale I_1 al 95% per la media μ delle spese sanitarie.
Se σ non fosse nota e conoscessimo solo la deviazione standard campionaria delle spese $s = 100$, quale sarebbe l'intervallo di confidenza bilaterale I_2 al 95%?

$$I_1 = \qquad\qquad I_2 =$$

PROBABILITA' E STATISTICA- 12 luglio 2017

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ingegneria Meccanica

1. Un'urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera (sia E_1 questo evento), la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre 2 palline nere. Se, invece, la pallina estratta viene bianca, nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede quindi a una successiva estrazione (sia E_2 l'evento "pallina nere alla seconda estrazione"). Qual è la probabilità p di estrarre due palline nere? Qual è la probabilità α di estrarre due palline dello stesso colore ?

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta
$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
essendo T il triangolo di vertici $(0,0), (1,2), (1,0)$. Determinare la costante k e le densità marginali di X e di Y.

   $k =$ $\qquad$ $f_X(x) = \Bigg\{$ $\qquad\qquad$ $f_Y(y) = \Bigg\{$

3. Un sistema di controllo S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in parallelo. Siano X, Y, T i tempi aleatori di vita di D_1, D_2 ed S, rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x,y) = 3e^{-2x-\frac{3}{2}y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Determinare se X e Y sono stocasticamente indipendenti, calcolare la probabilità che il sistema sia ancora in funzione al tempo t $(t > 0)$ e la probabilit p che il tempo di vita di X sia minore di quello di Y.

   X e Y sono stocasticamente indipendenti ?

   $P(T > t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. Si consideri la funzione:
$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^2}x & 0 \leq x \leq \frac{\theta}{2} \\ \frac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \frac{\theta}{2} < x \leq \theta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
Verificare che per ogni $\theta > 0$, la funzione $f(\cdot;\theta)$ è una densità di probabilità. Dato un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$, generato dalla densità $f(\cdot;\theta)$, determinare la costante α tale che lo stimatore: $T = \frac{\alpha \sum_{i=1}^n X_i}{n}$ sia uno stimatore corretto di θ.

   $\alpha =$

5. Un tecnico vuole misurare la lunghezza d'onda μ di una radiazione emessa da una sorgente di onde radio. Il risultato di una misurazione può essere considerato una variabile casuale normale di media μ e varianza σ^2. Dopo 25 misurazioni la somma dei valori osservati è pari a 4250 mm, e la varianza campionaria è 225. Ricavare un intervallo di confidenza I al 95% per μ. Determinare la numerosit campionaria n necessaria affinchè l' intervallo di confidenza per la lunghezza d'onda abbia ampiezza $b \leq 10$ mm.

   $I =$ $\qquad$ $n \geq$

PROBABILITA' E STATISTICA- 18 settembre 2017

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ingegneria Meccanica

1. Si consideri la variabile casuale X con densit di probabilit:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{18\theta^4} e^{-\frac{\sqrt{x}}{3\theta^2}} & 0 \leq x \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Verificare che per ogni $\theta > 0$, la funzione $f(\cdot;\theta)$ effettivamente una densit di probabilit. Dato un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$, generato dalla densit $f(\cdot;\theta)$, calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ del parametro θ. Determinare la densit di probabilit $g(\cdot, \theta)$ della variabile casuale $Y = \sqrt{X}$.

$\hat{\theta} =$ $\qquad\qquad$ $g(\cdot,\theta) = \Big\{$

2. Per stimare l'et media μ degli utenti di un impianto sportivo si seleziona un campione casuale composto da $n = 25$ individui avente media $\bar{x} = 29$ anni e varianza campionaria $s^2 = 64$ anni^2. Assumendo che la distribuzione delle et Gaussiana, trovare intervalli di confidenza I_1^{95} e I_1^{99} per l'et media μ al 95% e al 99%. Quali sarebbero gli intervalli I_2^{95} e I_2^{99} al 95% e al 99% se la numerosit campionaria fosse $n = 100$?

$I_1^{95} =$ $\qquad\qquad$ $I_1^{99} =$

$I_2^{95} =$ $\qquad\qquad$ $I_2^{99} =$

3. Il 10% della popolazione soffre di una certa malattia. Ad un individuo estratto a caso vengono somministrati due test diagnostici indipendenti. Ciascuno dei due test fornisce una diagnosi corretta il 90% delle volte. Calcolare la probabilità p_a, p_b che l'individuo sia effettivamente malato nell'ipotesi che: (a) entrambi i test siano positivi; (b) un solo test sia positivo.

$p_a =$ $\qquad\qquad$ $p_b =$

4. Trovare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Z = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)+1}$ dove X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$.

$$f_Z(z) = \Big\{$$

5. Si consideri un lotto contenente 100 pezzi di cui 7 difettosi e si estraggano n palline dall'urna. Qual è la probabilità p_1 che 3 dei pezzi estratti siano difettosi, se le estrazioni sono con restituzione? Qual è la probabilità p_2 che 3 dei pezzi estratti siano difettosi, se le estrazioni sono senza restituzione? Qual è la probabilità p_3 che il terzo pezzo estratto sia difettoso, se le estrazioni sono senza restituzione?

$p_1 =$ $\qquad\qquad$ $p_2 =$ $\qquad\qquad$ $p_3 =$

PROBABILITA' E STATISTICA- 8 gennaio 2018

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ingegneria Meccanica

1. Sia data la funzione:

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} 5^{-\theta}\theta x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 5 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $\theta > 0$. Si verifichi che f_X una densit di probabilit e si calcolino il valore atteso e la varianza della corrispondente variabile aleatoria X. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ del parametro θ sulla base di un campione $X_1, \ldots, X_n$ estratto da una popolazione con densit di probabilit $f_X(x;\theta)$:

$$\mathbb{E}(X) = \qquad\qquad V(X) = \qquad\qquad \hat{\theta} =$$

2. Si vuole stimare il diametro medio di certi biscotti artigianali di forma circolare per valutare la grandezza delle confezioni. Assumendo che il diametro dei biscotti segua una distribuzione Gaussiana con deviazione standard nota $\sigma = 5\ mm$, determinare la numerosit minima di un campione di biscotti $X_1, \ldots, X_n$, affinch la media campionaria $\bar{x}$ non differisca dal diametro medio per pi di 2 mm al livello di confidenza del 95%.

$$n \geq$$

3. Da un lotto contenente 2 fusibili difettosi e 8 buoni si estraggono senza restituzione 4 pezzi. Sia X il numero di fusibili difettosi estratti. Calcolare la probabilità $p_x = P(X = x)$ per ogni x, la varianza di X e la probabilità α dell'evento condizionato $E_3|E_1$.

$$p_x = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases} \qquad\qquad var(X) = \qquad\qquad \alpha =$$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = \frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y}+y)}$, per $x > 0$, $y > 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, la densità marginale di Y, la densità di X condizionato a $Y = y$ (per $y > 0$), il valore atteso μ di X.

$$Y \sim \qquad\qquad X|(Y = y) \sim \qquad\qquad \mu =$$

5. Un'emittente invia una delle seguenti tre sequenze XXXX, YYYY, ZZZZ, con probabilità, rispettivamente, $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Ogni lettera della sequenza viene ricevuta correttamente con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dalle altre lettere, inoltre se una lettera è ricevuta sbagliata le due alternative sono equiprobabili. Calcolare la probabilità p che la sequenza emessa sia XXXX supposto che riceva la sequenza XXYZ.

$$p =$$

PROBABILITA' E STATISTICA- 9 Febbraio 2018

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ingegneria Meccanica

Num. Matricola 1723970 Nome e Cognome :

1. Si considerino 5 urne, la i-esima urna ($i = 1, ..., 5$) contiene 4 palline rosse e i palline bianche. Un'urna viene scelta a caso, sia U_i l'evento l'$i-$esima urna è scelta, e da essa vengono estratte due palline in blocco. Determinare la probabilità p_1 dell'evento E "si estrae una pallina bianca e una pallina rossa". Supposto che si verifichi E determinare la probabilità che l'urna prescelta sia l'$i-$ esima. Determinare, supposto che si verifichi E, l'urna $U_{\hat{i}_s}$ che e' più probabilile venga prescelta.

   $P(E) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(U_i|E) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $= U_{\hat{i}_s}$

2. Sia X il numero di auto in transito a un casello autostradale in una certo giorno e Y il numero di auto in transito il giorno successivo. Si supponga che X e Y siano indipendenti e abbiano entrambi distribuzione di Poisson di parametro λ. Determinare la distribuzione di probabilià di $Z = X+Y$ il numero di auto in transito al casello autostradale nei suddetti due giorni. Si determini inoltre la distribuzione di X supposto che il numero di auto in transito nei suddetti due giorni sia n ($Z = n$).

   $P(Z = n) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(X = k|Z = n)$

3. Un punto viene scelto a caso nel cerchio di raggio 3 centrato nell'origine. Qual è la probabilità p_1 che il punto disti dall'origine per più di r con $0 < r < 3$.

   $p_1 =$

4. Un segnale radio viene emesso con frequenza distribuita normalmente con valore atteso μ e deviazione standard 30kHz. Supponendo di osservare la seguente serie di frequenze in kHz:

   610 601 578 615 640 630 618 602 613 610 625 685 622 608 597

   Determinare una stima di μ.

   $\hat{\mu} =$

5. Si vuole stimare il diametro medio di certi biscotti artigianali di forma circolare per valutare la grandezza delle confezioni. Assumendo che il diametro dei biscotti segua una distribuzione Gaussiana con deviazione standard nota $\sigma = 2\ mm$, determinare la numerosit minima di un campione di biscotti $X_1, \ldots, X_n$, affinch la media campionaria $\bar{x}$ non differisca dal diametro medio per pi di 2 mm al livello di confidenza del 95%.

   n