Un'applicazione notevole della mutua induzione:
il principio di funzionamento del trasformatore

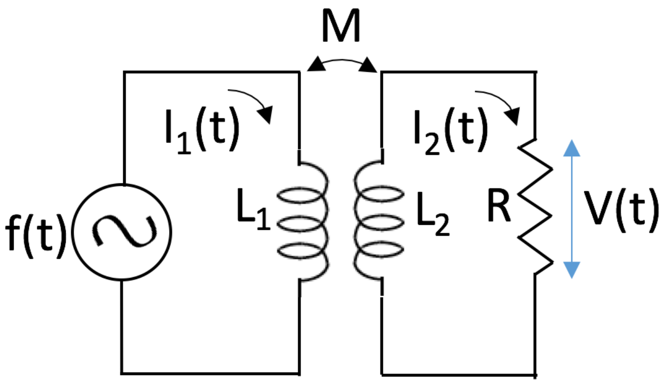
Fissiamo l'attenzione su due particolari circuiti accoppiati magneticamente: attorno ad un cilindro di materiale ferromagnetico ($\mu_r >> 1$) lungo L e di sezione S vengono avvolte n_1 spire per unità di lunghezza (circuito 1, primario) e n_2 spire per unità di lunghezza (circuito 2, secondario).

Con questa configurazione è rapido calcolare[1]:

$L_1 = n_1^2 \mu L S$ $\qquad$ $L_2 = n_1^2 \mu L S$ $\qquad$ $M = n_1 n_2 \mu L S$[2]

da cui:

$M/L_1 = n_2/n_1$ $\qquad$ $M/L_2 = n_1/n_2$ $\qquad$ $M^2 = L_1 L_2$[3]



Si alimenti il primario con un generatore $f(t) = f_0 \sin\omega t$ al quale corrisponde il fasore $\overline{f} = f_0$.
Nel primario circolerà la corrente $I_1(t) = I_{10} \sin(\omega t+\varphi_1)$ alla quale corrisponde il fasore $\overline{I_1} = I_{10}\, e^{j\varphi}$
Nel secondario circolerà, analogamente, la corrente $I_2(t)$ alla quale corrisponde il fasore $\overline{I_2}$ che, ai capi della resistenza R produrrà una differenza di potenziale $V(t) = R\, I_2(t)$ ($\overline{V} = R\,\overline{I_2}$).

Nel primo circuito, quindi, $f(t) + f_{1ind}(t) = 0$ mentre nel secondo $f_{2ind}(t) = RI_2(t) = V(t)$ con

$f_{1ind}(t) = - L_1\, dI_1/dt - M\, dI_2/dt$ $\qquad$ $f_{2ind}(t) = - M\, dI_1/dt - L_2\, dI_2/dt$

da cui:

$f(t) = L_1\, dI_1/dt + M\, dI_2/dt$ $\qquad$ $M\, dI_1/dt + L_2\, dI_2/dt + RI_2(t) = 0$ e, passando ai fasori,

$\overline{f} = j\omega L_1 \overline{I_1} + j\omega M \overline{I_2}$ $\qquad$ $j\omega M \overline{I_1} + j\omega L_2 \overline{I_2} + R\overline{I_2} = 0.$

Risolvendo il sistema si ottengono[4]:

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{f}(R + j\omega L_2)}{j\omega L_1(R + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} = \frac{\overline{f}(R + j\omega L_2)}{j\omega R L_1}$$

$$\overline{I_2} = \frac{- j\,\omega\, M\,\overline{f}}{j\omega L_1(R + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} = \frac{- j\,\omega\, M\,\overline{f}}{j\omega R L_1} = - \frac{M}{L_1}\frac{\overline{f}}{R}$$

da cui

$$\frac{\overline{V}}{\overline{f}} = \frac{R\,\overline{I_2}}{\overline{f}} = - \frac{M}{L_1} = - \frac{n_2}{n_1}$$

---

[1] questi calcoli (L e M) potrebbero essere un esercizio d'esame
[2] se i due avvolgimenti sono concordi M>0; se sono discordi nel calcolo del flusso compare un segno meno → M<0
[3] questo è un risultato che vale per qualsiasi trasformatore in cui tutto il campo generato da un circuito produce flusso nell'altro circuito (non c'è flusso disperso)
[4] i denominatori si semplificano considerando che $M^2 = L_1 L_2$

Per esempio, se il numero di spire per unità di lunghezza del secondario è maggiore di quello dell'avvolgimento primario si ha un innalzamento della tensione (trasformatore in salita). Questo non può avvenire, tuttavia, violando la conservazione dell'energia: la corrente che circola nel secondario si riduce della stessa quantità mantenendo la potenza del secondario uguale a quella erogata dal generatore nel primario.

Ciò risulta più evidente se la resistenza di carico è $R << \omega L_2$ (condizione facilmente ottenibile in pratica):

$$\overline{I_1} = \frac{\bar{f}(R + j\omega L_2)}{j\omega R L_1} \sim \frac{L_2}{L_1}\frac{\bar{f}}{R}$$

$$\frac{\overline{I_2}}{\overline{I_1}} = -\frac{M}{L_1}\frac{\bar{f}}{R} \times \frac{L_1}{L_2}\frac{R}{\bar{f}} = -\frac{M}{L_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

e considerando la potenza erogata dal generatore e quella dissipata nella resistenza[5] si ha:

$$\frac{P_{secondario}}{P_{primario}} = \frac{|\bar{V}| \times |\overline{I_2}|}{|\bar{f}| \times |\overline{I_1}|} = \left|\frac{\bar{V}}{\bar{f}}\right| \times \left|\frac{\overline{I_2}}{\overline{I_1}}\right| = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{n_1}{n_2} = 1$$

Riassumendo:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{f}} = -\frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\overline{I_2}}{\overline{I_1}} = -\frac{n_1}{n_2}$$

e $$P_{primario} = P_{secondario}$$

[5] per semplicità considero solo le ampiezze e non le fasi: si potrebbe dimostrare che i fattori di potenza del primario e del secondario sono uguali