Analisi Numerica
(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni:

Equazioni differenziali ordinarie: Problemi ai limiti

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Martedì 9.30-10.30

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://www.sbai.uniroma1.it/users/bruni-vittoria

nella pagina dedicata al corso Analisi Numerica

Problemi ai limiti

Problemi ai limiti

In molti **problemi** le grandezze coinvolte dipendendono dalla **posizione** piuttosto che dal **tempo**.

In questo caso il modello matematico consiste in un'equazione differenziale con **condizioni imposte in più punti**.

Dato un intervallo $[a, b]$, una funzione $f(x, y, y')$ e due valori α e β, si cerca la funzione y tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Esempio: Deflessione di una trave

Una trave orizzontale di sezione rettangolare e di lunghezza l, tesa lungo la direzione della sua lunghezza da una forza S, è soggetta a un carico trasversale uniforme t. La **deflessione** della trave $w(x)$ è descritta dall'equazione differenziale **non lineare** del secondo ordine

$$\boxed{[1 + (w'(x))^2]^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{t(x)}{2EI}(x - l) \qquad 0 < x < l}$$

con $w(x)$: **deflessione** della trave; x: **distanza** dall'estremo sinistro della trave; l: **lunghezza** della trave;
$t(x) = qx$: intensità del **carico**; E: **modulo di elasticità** ;
S: **tensione** agli estremi della trave; I: **momento principale di inerzia**

Supponendo che la trave sia **fissata** agli estremi, all'equazione differenziale devono essere associate le **condizioni al bordo**

$$\boxed{w(0) = w(l) = 0}$$

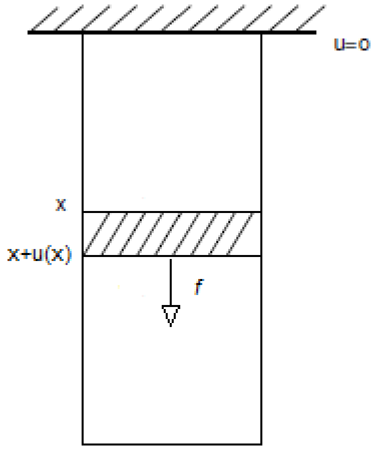
Se si trascurano i termini del secondo ordine, il problema differenziale diventa lineare:

$$\boxed{\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{t(x)}{2EI}(x-l) \qquad 0 < x < l}$$

e si può risolvere in modo esatto se la sbarra ha spessore uniforme (EI è costante). Se, invece, lo spessore non è uniforme, il momento di inerzia I è una funzione di x e il problema va risolto numericamente.

Esempio: Equilibrio di una sbarra elastica

Si consideri una sbarra elastica fissata verticalmente ad un estremo



e siano x la **distanza** di un punto **dal vertice**,

$u(x)$ lo **spostamento**,

$\epsilon = \frac{du}{dx}$ lo **strain** nella sbarra (allungamento della molla),

$\sigma(x)$ lo **stress** (forza interna dipendente dallo strain mediante l'equazione costitutiva del materiale; se si considera la legge di Hooke: $\sigma(x) = E(x)\frac{du}{dx}$, con $E(x)$ modulo di Young),

$f(x)$ la **forza di trazione esterna** (per esempio: $f = \rho a g$, con g accelerazione di gravità , a la sezione trasversale della sbarra e ρ la densità del materiale).

All'equilibrio si ha

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x),$$

cioè

$$u''(x)E(x) + u'(x)E'(x) + f(x) = 0$$

con $u(0) = 0$ in quanto $x = 0$ rappresenta l'estremo bloccato e $E(x)\frac{du}{dx}|_{x=L} = 0$ in quanto $x = L$ rappresenta l'estremo libero in cui lo stress deve essere nullo.

Equazioni lineari: Esempio 1

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Integrale generale: $y(x) = \gamma_1 \sinh x + \gamma_2 \cosh x$

Condizioni al bordo $\Rightarrow$ $\gamma_1 = \dfrac{\beta}{\sinh b} \qquad \gamma_2 = 0$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \beta \dfrac{\sinh x}{\sinh b}}$ $\Rightarrow$ La soluzione **esiste** ed è **unica** per qualunque valore di b

Equazioni lineari: Esempio 2

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Integrale generale: $y(x) = \gamma_1 \sin x + \gamma_2 \cos x$

Condizioni al bordo $\Rightarrow$ $\gamma_1 = \dfrac{\beta}{\sin b} \qquad \gamma_2 = 0$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \beta \dfrac{\sin x}{\sin b}}$ $\Rightarrow$ La soluzione è **unica** solo se $b \neq n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$

Se $b = n\pi$ e $\beta = 0$ $\Rightarrow$ Ci sono **infinite** soluzioni $y(x) = c \sin x$

Se $b = n\pi$ e $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ **Non esistono** soluzioni

Problemi differenziali lineari

Consideriamo il problema differenziale **lineare**

$$\begin{cases} y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y - r(x) & \quad a < x < b \\ y(a) = \alpha \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

Teorema. Se *i)* $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sono **continue** in $[a, b]$

ii) $|p(x)| \leq K$ e $q(x) > 0$ per $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$ la **soluzione** del problema differenziale **esiste** ed è **unica**

Metodi alle differenze finite

I **metodi alle differenze finite** consistono nel sostituire ciascuna delle **derivate** che compaiono nell'equazione differenziale con una approssimazione ottenuta tramite le **differenze finite**.

Discretizzazione: si divide l'intervallo $[a, b]$ in $N+1$ **sottointervalli uguali** di ampiezza $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ e si introducono $N+2$ **nodi equispaziati** x_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$

$$\boxed{x_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, N+1}$$

Nei punti **interni** x_i, $i = 1, \ldots, N$, l'equazione differenziale diventa

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y(x_i) - r(x_i) \qquad i = 1, \ldots, N$$

Formula alle differenze centrate per $y'(x_i)$

Se $y \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$, per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$ si può sviluppare y in **serie di Taylor** con punto iniziale x_i e arrestandosi all'ordine 2:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(\eta_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(\eta_i^-)$$

$$\eta_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \qquad \eta_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$$

Formula alle differenze finite centrate per $y'(x_i)$: sottraendo il secondo sviluppo dal primo e usando il teorema della media si ha

$$\boxed{y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)}_{\downarrow} \qquad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})}$$

Errore di troncamento: $\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) = O(h^2)$ **Secondo ordine**

Formula alle differenze centrate per $y''(x_i)$

Se $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$, per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$ si può sviluppare y in **serie di Taylor** con punto iniziale x_i e arrestandosi all'ordine 4

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^-)$$

$$\xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \qquad \xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$$

Formula alle differenze finite centrate per $y''(x_i)$: sommando i due sviluppi in serie e usando il teorema della media si ha

$$\boxed{y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)} \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})}$$

Errore di troncamento: $\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\dfrac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = O(h^2)$ **Secondo ordine**

Metodi alle differenze finite lineari

I **metodi alle differenze finite** consistono nel sostituire le **formule alle differenze finite** nell'**equazione differenziale** esatta collocata nei punti x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Operatore differenziale esatto:

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) := -y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i) \qquad i = 1, ..., N$$

Metodo alle differenze finite:

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} +$$

$$+ q(x_i)y(x_i) - \frac{h^2}{12}[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)] = r(x_i)$$

$$i = 1, ..., N$$

Schema alle differenze finite lineari

Indicando con y_i l' **approssimazione** di $y(x_i)$ e trascurando l'**errore di troncamento** nella discretizzazione dell'operatore differenziale $(\mathcal{L}\, y)(x_i)$, si ottiene lo **schema alle differenze finite lineari**:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \qquad\qquad y_{N+1} = \beta \\ -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)\, y_i = r(x_i), \\ \hfill i = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$$

Operatore differenziale discreto:

$$(\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)\, y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Schema numerico:

$$(\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = r(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Errore di troncamento /1

Definizione. L'**errore di troncamento** è definito come la differenza tra l'**operatore differenziale esatto** e l'**operatore differenziale discreto** applicato alla soluzione esatta.

Operatore differenziale esatto:

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i)$$

Operatore differenziale discreto (applicato alla soluzione esatta):

$$(\mathcal{L}_h\,\{y(x_i)\})_i = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+\, p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)y(x_i)$$

Errore di troncamento:

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) := (\mathcal{L}\, y)(x_i) - (\mathcal{L}_h\,\{y(x_i)\})_i$$

Errore di troncamento /2

Operatore differenziale esatto
(dello schema alle differenze finite lineare):

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} +$$

$$+\, q(x_i)y(x_i) - \frac{h^2}{12}[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)]$$

Errore di troncamento:

$$\begin{aligned} \tau(x_i, y(x_i); h; f) &= (\mathcal{L}\, y)(x_i) - (\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i = \\ &= -\frac{h^2}{12}[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)] \end{aligned}$$

Consistenza dello schema alle differenze finite

Definizione. Uno **schema alle differenze finite** è **consistente** se

$$\lim_{h \to 0} \tau(x, y(x); h; f) = 0$$

Errore di troncamento:

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{12}[2\, p(x_i)\, y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)] = O(h^2) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Lo **schema alle differenze finite lineare** è **consistente** e del **secondo ordine** .

Nota. Un metodo del secondo ordine è **esatto** per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

Stabilità dello schema alle differenze finite

Definizione. Uno **schema alle differenze finite lineare** è detto **stabile** se, data una **funzione discreta** $\{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ definita sulla **discretizzazione** $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, esiste una **costante** M tale che

$$\max_{0\le i\le N+1} |v_i| \le M \left\{ \max(|v_0|, |v_{N+1}|) + \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h \{v_i\})_i| \right\}$$

Dalla stabilità segue la **limitazione dell'errore globale** $\{e_i\}_{i=0}^{N+1}$ con $e_i := y(x_i) - y_i$:

$$\max_{0\le i\le N+1} |e_i| \le M \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h \{e_i\})_i|\} = M \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h\{y(x_i)\})_i - (\mathcal{L}_h \{y_i\})_i|\} =$$

$$= M \max_{1\le i\le N} |\tau(x_i, y(x_i); h; f)|$$

Nota.
- $(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i = \underbrace{(\mathcal{L}y)(x_i)}_{=r(x_i)} - \tau(x_i, y(x_i); h; f)$
- $(\mathcal{L}_h \{y_i\})_i = r(x_i)$ (schema numerico)

Convergenza dello schema alle differenze finite

Teorema. Siano $K = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$ e $0 < L = \min_{a \le x \le b} q(x)$.
Se $h\,K < 2 \;\; \Rightarrow$ lo **schema alle differenze finite lineari** è **stabile** con $M = \max(1, 1/L)$

Poiché la stabilità è soggetta alla **condizione** $h\,K < 2$ si parla di **stabilità condizionata**.

La **consistenza** e la **stabilità condizionata** implicano la **convergenza condizionata** dello schema alle differenze finite.

Sistema lineare

La soluzione approssimata si ottiene risolvendo il **sistema lineare tridiagonale** di N equazioni nelle N incognite $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$

$$AY = B$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= \left[h^2r(x_1) + \left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha, h^2r(x_2), \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots, h^2r(x_{N-1}), h^2r(x_N) + \left(1-\frac{h}{2}p(x_N)\right)\beta\right]^T \end{aligned}$$

Se valgono le **ipotesi** dei teoremi precedenti e se, in particolare, $\boxed{h\,K \leq 2}$
$\Rightarrow$ il sistema lineare ammette un'**unica** soluzione

Esercizio 1

Si consideri il seguente problema ai limiti lineare

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = sinh(1)$$

del quale si conosce la soluzione analitica $y(x) = sinh(x)$.

Si vuole confrontare la soluzione analitica con quella numerica ottenuta costruendo uno schema alle differenze finite nell'intervallo su cinque nodi equidistanti $[0,\ 1]$ di passo $h = 0.25$

Riscrivendo l'equazione nella forma $-y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - r(x) = 0$, si ha

$$-y''(x) + y(x) = 0$$

e quindi $p(x) = r(x) = 0$, $q(x) = 1$.

I punti in cui va determinata la soluzione sono

$$x_i = x_0 + ih = 0 + 0.25i, \quad i = 1, .., 3$$

mentre il sistema di tre equazioni in tre incognite da risolvere è

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 \\ -1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) \\ 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_3) & 2 + h^2 q(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha \\ h^2 r(x_2) \\ h^2 r(x_3) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_3)\right)\beta \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 + h^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è tridiagonale e il sistema può essere risolto con un metodo numerico per la soluzione di sistemi lineari con matrice dei coefficienti tridiagonale (per esempio il metodo di Thomas oppure il metodo SOR)

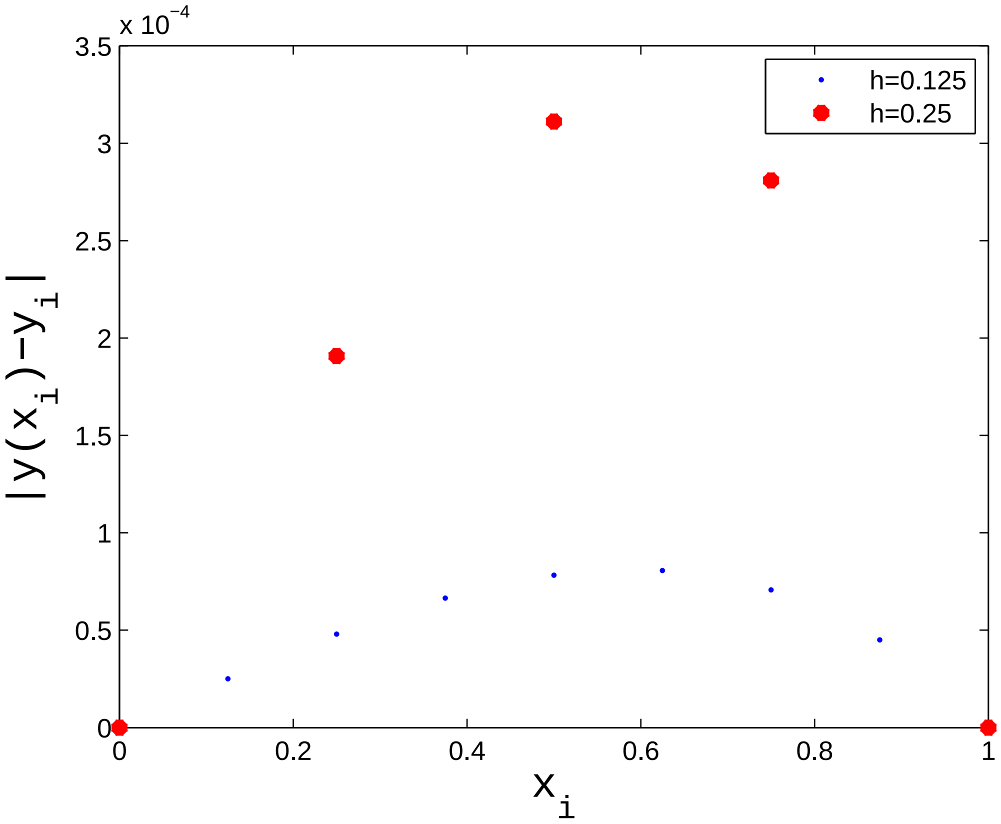
Usando il passo $h = 0.25$, si ha

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
0	0	0	0
0.250000000000000	0.252803113763196	0.252612316808168	-0.000190796955027
0.500000000000000	0.521406422136591	0.521095305493747	-0.000311116642844
0.750000000000000	0.822597631893524	0.822316731935830	-0.000280899957694
1.000000000000000	1.175201193643801	1.175201193643801	0

mentre usando il passo $h = 0.125$ si ha

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
0	0	0	0
0.125000000000000	0.125350843284863	0.125325775241115	-0.000025068043748
0.250000000000000	0.252660293496053	0.252612316808168	-0.000047976687884
0.375000000000000	0.383917560793118	0.383851067913615	-0.000066492879503
0.500000000000000	0.521173539977575	0.521095305493747	-0.000078234483828
0.625000000000000	0.666572855724182	0.666492264456616	-0.000080591267566
0.750000000000000	0.822387372341479	0.822316731935830	-0.000070640405649
0.875000000000000	0.991051691651612	0.991006637144295	-0.000045054507318
1.000000000000000	1.175201193643801	1.175201193643801	0

Grafico dell'errore



Esercizio 2

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y + \dfrac{\sin(\log x)}{x}, \quad 1 < x < 2, \\ \\ y(1) = 1, \qquad\qquad y(2) = 2. \end{cases}$$

La **soluzione esatta** del problema ai limiti è

$$y = \frac{x}{2}(4 - x) - x(1 - x)C - \frac{x^2}{2}(\cos(\log x) + \sin(\log x))$$

$$C = \cos(\log 2) + \sin(\log 2)$$

Confrontiamo ora la soluzione esatta con la soluzione prodotta risolvendo in modo numerico il problema.

In questo caso:

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{2}{x^2}, \quad r(x) = -\frac{sin(log(x))}{x}.$$

Lo schema alle differenze finite con **passo di integrazione** $h = 0.1$ produce il seguente sistema lineare (quindi $N = 9$)

$$\begin{pmatrix} 1.9835 & -0.9091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0833 & 1.9861 & -0.9167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0769 & 1.9882 & -0.9231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0714 & 1.9898 & -0.9286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0667 & 1.9911 & -0.9333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0625 & 1.9922 & -0.9375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0588 & 1.9931 & -0.9412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0556 & 1.9938 & -0.9444 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0526 & 1.9945 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0900 \\ -0.0018 \\ -0.0026 \\ -0.0033 \\ -0.0039 \\ -0.0045 \\ -0.0051 \\ -0.0055 \\ 1.8888 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è

x_i	y_i	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.00000000000000	1.00000000000000	0
1.10000000000000	1.08997131797320	0.00010114433934
1.20000000000000	1.17916606461186	0.00019022023241
1.30000000000000	1.26868984692269	0.00026145441230
1.40000000000000	1.35967878869232	0.00031053136854
1.50000000000000	1.45328006475235	0.00033417783276
1.60000000000000	1.55063839843931	0.00032988009877
1.70000000000000	1.65288667818922	0.00029568731179
1.80000000000000	1.76113946446343	0.00023007183610
1.90000000000000	1.87648855084921	0.00013182838403
2.00000000000000	2.00000000000000	0

Nota. L'approssimazione può essere migliorata **riducendo** il passo h che però non può essere troppo piccolo a causa dell'**instabilità** che si produce nell'approssimare le derivate con le differenze finite.

Esercizio 3

Approssimare la deflessione di una trave di acciaio lunga 120 cm con lo schema alle differenze finite lineare. Le caratteristiche della trave sono: $t(x) = qx$, $q = 100 kg/m$, $E = 3.0 \cdot 10^7 kg/cm2$, $S = 1000 kg$, $I = 625 cm4$.

```
function [xi, yi] = ODE_diffin(a,b,N,alpha,beta,pfun,qfun,rfun)
% Function ODE_diffin: [xi, yi] = ODE_diffin(a,b,N,alpha,beta,p,q,r)
% Soluzione del problema differenziale lineare ai limiti
% y''= p(x)y'+q(x)y-r(x)    a < x < b
% y(a)= alpha
% y(b)= beta
% con il metodo alle differenze finite lineare con passo h=(b-a)/(N+1).
% N  il numero di nodi interni
%


% Calcolo del passo di integrazione e del vettore dei nodi
%
h = (b-a)/(N+1);
xi = a+(0:N+1)*h;
```

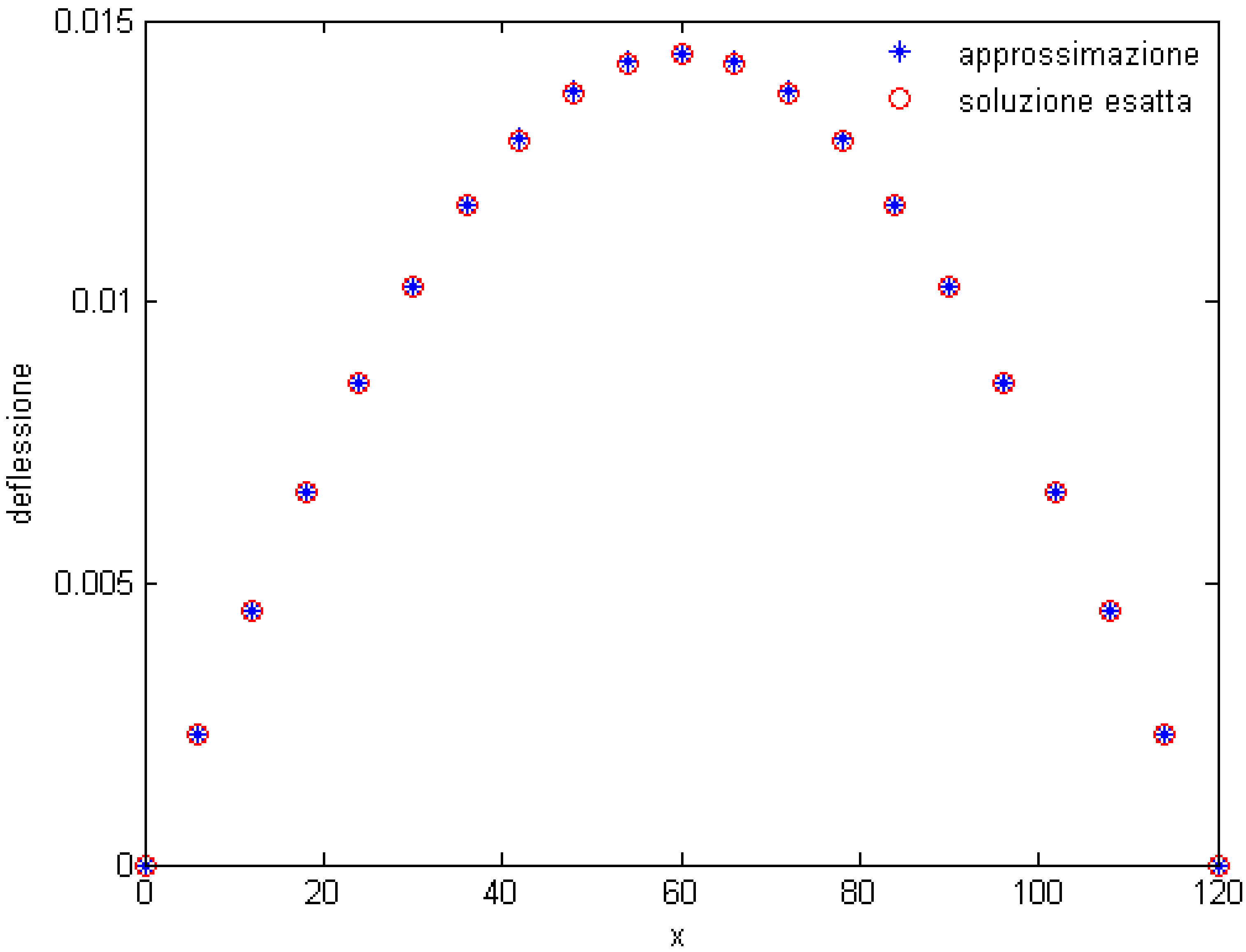
```
%
% Costruzione della matrice A
%
A_diag  = 2+h^2*qfun(xi(2:N+1)).*ones(1,N);
A_coinf = -1-h/2*pfun(xi(3:N+1)).*ones(1,N-1);
A_cosup = -1+h/2*pfun(xi(2:N)).*ones(1,N-1);
A = diag(A_diag)+diag(A_coinf,-1)+diag(A_cosup,1);
%

% Costruzione del vettore B
%
B = h^2*rfun(xi(2:N+1)).*ones(1,N);
B(1) = B(1)+alpha*(1+h/2*pfun(xi(2)));      % condizioni al bordo sn
B(N) = B(N)+beta*(1-h/2*pfun(xi(N+1)));     % condizioni al bordo dx
```

```
%
% Calcolo della soluzione approssimata
%

yi = A\B';
yi = [alpha yi' beta];

%
% Grafico della soluzione approssimata
%

figure(1)
plot(xi,yi,'b*')
```

Dal command window

```
>>L = 120;
>>S = 1000;
>>E = 3e7;
>>I = 625
>>q=100;
>>c1=S/(E*I);
>>c2=q/(2*E*I);
>>pfun = @(x)[0];
>>qfun = @(x)[c1];
>>rfun = @(x)[-c2*x.*(x-L)];
>>[xp, yp] = ODE_diffin(0,L,20-1,0,0,pfun,qfun,rfun);
>>disp([xp' yp'])
>>%Soluzione esatta
>>x = linspace(0,120,21);
>>wx=2*c2/(c1^2*(1+exp(sqrt(c1)*L)))*(exp(sqrt(c1)*x)+...
exp(-sqrt(c1)*(x-L)))-c2/c1^2*(2-c1*L*x+c1*x.^2);
>>disp([xp' yp'  wx' abs(wx'-yp')])
>>hold on, plot(x,wx,'ro')
```

x_i	y_i	y_i	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0	0
6	0.002298063068	0.002292591613	0.000005471455
12	0.004530466548	0.004520100076	0.000010366472
18	0.006638462726	0.006623776862	0.000014685864
24	0.008570215650	0.008551786654	0.000018428997
30	0.010280801030	0.010259204311	0.000021596718
36	0.011732206148	0.011708017671	0.000024188476
42	0.012893329792	0.012867126148	0.000026203644
48	0.013739982191	0.013712338638	0.000027643554
54	0.014254884971	0.014226377709	0.000028507262
60	0.014427671121	0.014398875879	0.000028795242
66	0.014254884971	0.014226377709	0.000028507262
72	0.013739982191	0.013712338638	0.000027643554
78	0.012893329792	0.012867126148	0.000026203644
84	0.011732206148	0.011708017671	0.000024188476
90	0.010280801030	0.010259204311	0.000021596718
96	0.008570215650	0.008551786654	0.000018428997
102	0.006638462726	0.006623776862	0.000014685864
108	0.004530466548	0.004520099843	0.000010366705
114	0.002298063068	0.002292591846	0.000005471222
120	0	0	0


0.015
0.01
0.005
0
deflessione
0
20
40
60
80
100
120
x
approssimazione
soluzione esatta

Osservazione: metodo upwind

La condizione imposta $hK < 2$ può essere eliminata se si approssima in maniera diversa $y'(x_i)$. Invece di utilizzare le differenze finite centrate, si possono usare rispettivamente quelle in avanti se $p(x_i) \leq 0$, ovvero $\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$, e quelle all'indietro se $p(x_i) > 0$, ovvero $\frac{y_i-y_{i-1}}{h}$.

Ne risulta che l'operatore differenziale discreto è

$$(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i =$$

$$= -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{(|p(x_i)| - p(x_i))y_{i+1} - 2|p(x_i)|y_i + (|p(x_i)| + p(x_i))y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i =$$

$$= r(x_i)$$

Lo schema **upwind** è meno accurato dello schema alle differenze finite centrate ma non da vincoli sulla scelta del passo di discretizzazione h.

Estrapolazione di Richardson

L'**estrapolazione di Richardson** viene utilizzata per generare un'approssimazione di **accuratezza elevata** a partire da approssimazioni di accuratezza minore. L'estrapolazione può essere utilizzata quando l'**errore di troncamento** ha una espressione dipendente dal passo h nota.

Formula alle differenze finite centrate:

$$y'(x_i) = \underbrace{\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}}_{N_1(h)} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(x_i) - \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_i) + O(h^6) =$$

$$= N_1(h) - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(x_i) - \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_i) + O(h^6)$$

$$y'(x_i) = N_1(h) - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(x_i) - \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_i) + O(h^6)$$

Sostituendo h con $h/2$ si ha

$$y'(x_i) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{6} y^{(3)}(x_i) - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^4}{120} y^{(5)}(x_i) + O(h^6)$$

Sottraendo la prima espressione dalla seconda moltiplicata per 4 si **elimina** il termine $O(h^2)$:

$$y'(x_i) = \underbrace{\frac{4\,N_1(h/2) - N_1(h)}{3}}_{N_2(h)} + \frac{h^4}{480} y^{(5)}(x_i) + O(h^6) =$$

$$= N_2(h) + O(h^4)$$

Estrap. di Richardson: schema alle differenze finite

Prima estrapolazione

$$y'(x_i) = N_2(h) + O(h^4)$$

Ripetendo il ragionamento si ottiene:

Seconda estrapolazione

$$y'(x_i) = \underbrace{\frac{16\,N_2(h/2) - N_2(h)}{15}}_{N_3(h)} + O(h^6) = N_3(h) + O(h^6)$$

Nota. Benché l'estrapolazione abbia **costo computazionale** ed **errori di arrotondamento** minimi, non conviene utilizzarla ulteriormente a causa dell'**instabilità** della differenziazione numerica.
Per ottenere approssimazioni di ordine più elevato si possono utilizzare formule a **tre o cinque punti**.

Estrapolazione di Richardson: esempio

Se $y_i^{(h)}$, $y_i^{(h/2)}$, $y_i^{(h/4)}$ indicano le approssimazioni ottenute con passo di integrazione $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$ nei punti $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, ..., N$, l'**estrapolazione di Richardson** è data da:

Prima estrapolazione:
$$y_i^{E_1} = \frac{4y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

Seconda estrapolazione:
$$y_i^{E_2} = \frac{4y_i^{(h/4)} - y_i^{(h/2)}}{3}, i = 1, \ldots, N,$$

Estrapolazione finale:
$$y_i^{E_3} = \frac{16y_i^{E_2} - y_i^{E_1}}{15}. \quad i = 1, \ldots, N.$$

Utilizzando come passo iniziale $h = 0.1$ nell'Esercizio 2, $y_i^{E_3}$ ha un **errore massimo** di $\mathbf{6.3 \cdot 10^{-11}}$.

Problemi differenziali non lineari

Consideriamo il problema differenziale del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & a < x < b \\ y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta & \textbf{condizioni al bordo} \end{cases}$$

dove $f(x, y, z) \in C^1([a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ è una funzione **non lineare**.

Esistenza e unicità della soluzione

Teorema. Se *i)* $f(x, y, z)$ e le derivate parziali $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ e $f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$ sono **continue** in

$$D = \{(x, y, z) | a \le x \le b, -\infty < y, z < \infty\}$$

ii) $f_y(x, y, z) \ge \delta$ in D per qualche $\delta > 0$

iii) esistono due **costanti** K e L tali che

$$K = \max_{(x,y,z)\in D} f_y(x, y, z)$$

$$L = \max_{(x,y,z)\in D} |f_z(x, y, z)|$$

$\Rightarrow$ la **soluzione** del problema differenziale **esiste** ed è **unica**

Schema alle differenze finite

Sostituendo le **formule alle differenze finite centrate** nell'**equazione differenziale** $-y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, si ha:

$$-\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = 0$$

Lo **schema alle differenze finite** si ottiene trascurando l'**errore di troncamento** e aggiungendo le **condizioni al bordo**.

Se y_i è l' **approssimazione** di $y(x_i)$ si ha

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \qquad y_{N+1} = \beta \\ (\mathcal{L}_h\{y_i\})_i = -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0 \quad i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Consistenza dello schema alle differenze finite

Operatore differenziale (esatto):

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} +$$

$$+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = 0$$

Operatore differenziale discreto (applicato alla soluzione esatta):

$$(\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right)$$

Errore di troncamento:

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = \underbrace{(\mathcal{L}\, y)(x_i)}_{=0} - (\mathcal{L}_h \{y(x_i)\})_i = O(h^2) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Lo **schema alle differenze finite** non lineare è **consistente** e del **secondo ordine**

Nota. Lo schema è **esatto** per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

Stabilità dello schema alle differenze finite /1

Definizione. Uno **schema alle differenze finite non lineare** è detto **stabile** se, date due **funzioni discrete** $\{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ e $\{u_i\}_{i=0}^{N+1}$ definite sulla **discretizzazione** $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, esiste una **costante** M tale che

$$\max_{0 \le i \le N+1} |v_i - u_i| \le M \Big\{ \max(|v_0 - u_0|, |v_{N+1} - u_{N+1}|) +$$

$$+ \max_{1 \le i \le N} |(\mathcal{L}_h \{v_i\})_i - (\mathcal{L}_h \{u_i\})_i| \Big\}$$

Stabilità dello schema alle differenze finite /2

Teorema. Siano $K = \max_{(x,y,z)\in D} |f_z(x,y,z)|$ e $0 < L = \min_{(x,y,z)\in D} f_y(x,y,z)$.
Se $h\,K \leq 2 \;\Rightarrow\;$ lo **schema alle differenze finite non lineari** è **stabile** con $M = \max(1, 1/L)$

$$\Rightarrow \max_{0\leq i\leq N+1} |e_i| = \max_{0\leq i\leq N+1} |y(x_i) - y_i| \leq$$

$$\leq M \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{L}_h\,\{y(x_i)\})_i - \underbrace{(\mathcal{L}_h\,\{y_i\})}_{=0}|\} = M \max_{1\leq i\leq N} |\tau(x_i, y(x_i); h; f)|$$

La **consistenza** e la **stabilità condizionata** implicano la **convergenza condizionata** dello schema alle differenze finite

Schema alle differenze finite non lineare

Si tratta di risolvere il **sistema non lineare** di N equazioni nelle N incognite $y_1, y_2, \ldots, y_N$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2-\alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\[2ex] -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3-y_1}{2h}\right) = 0 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\[2ex] -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

Se valgono le **ipotesi** dei teoremi precedenti e, in particolare, $\boxed{hK \leq 2}$
$\Rightarrow$ il sistema ammette un'**unica soluzione**.

Soluzione del sistema con il metodo di Newton

La soluzione $[y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ del **sistema non lineare** può essere approssimata con il **metodo di Newton**: si genera una **successione di approssimazioni** $\{[y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_N^{(k)}]^T\}$ che **converge** alla soluzione se l'**approssimazione iniziale** $\{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}]^T\}$ è abbastanza **vicina** alla soluzione e la **matrice Jacobiana** $J(y_1, \dots, y_N)$ del sistema è **regolare**.

Matrice Jacobiana: $J(y_1, \dots, y_N)$ è **tridiagonale**

$$[J(y_1, \dots, y_N)]_{ij} = \begin{cases} -1 + \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i+1, \quad i = 1, \dots, N-1 \\[2ex] 2 + h^2 f_y\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i, \quad i = 1, \dots, N \\[2ex] -1 - \dfrac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) & j = i-1, \quad i = 2, \dots, N \end{cases}$$

con $y_0 = \alpha$ e $y_{N+1} = \beta$.

Algoritmo del metodo di Newton

Se $Y^{(k)} = [y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_N^{(k)}]^T$ indica l'**approssimazione** alla k-esima iterazione, l'**algoritmo del metodo di Newton** è

$$\boxed{\begin{cases} J(y_1^{(k)}, \dots, y_N^{(k)})V = B^{(k)} \\ \\ Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + V \end{cases} \qquad k = 0, 1, \dots}$$

$$\begin{aligned} B^{(k)} &= -\left[2y_1^{(k)} - y_2^{(k)} - \alpha + h^2 f\left(x_1, y_1^{(k)}, \frac{y_2^{(k)} - \alpha}{2h}\right), -y_1^{(k)} - 2y_2^{(k)} - y_3^{(k)} + \right. \\ &\left. + h^2 f\left(x_2, y_2^{(k)}, \frac{y_3^{(k)} - y_1^{(k)}}{2h}\right), \dots, -y_{N-1}^{(k)} + 2y_N^{(k)} - \beta + h^2 f\left(x_N, y_N^{(k)}, \frac{\beta - y_{N-1}^{(k)}}{2h}\right) \quad \right]^T \end{aligned}$$

• Ad ogni iterazione bisogna risolvere un **sistema lineare tridiagonale**, che ha un costo computazionale ridotto

• L'**approssimazione iniziale** $Y^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}]^T$ si può ottenere approssimando $y(x)$ con la **retta** che congiunge i punti (a, α) e (b, β), cioè ponendo $y_i^{(0)} = \alpha + i\left(\frac{\beta - \alpha}{b - a}h\right)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Esempio

Si consideri il seguente problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), & 1 \le x \le 3 \\ y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3} \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

Si vuole valuater l'errore che si commette approssimando $y(x)$ con la soluzione prodotta risolvendo il problema in modo numerico mediante il metodo delle differenze finite centrate scegliendo come $h = 0.1$ come passo di integrazione ed il seguente criterio di arresto per il metodo di Newton.

$$\max_{1 \le i \le N} |y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| \le 10^{-8}$$

$f(x, y, y') = \dfrac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$, $[a,\ b] = [1,\ 3]$, $\alpha = 17$, $\beta = \dfrac{43}{3}$, i punti (nodi) in cui approssimare la funzione sono $x_i = 1 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, 20$ e il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2\frac{1}{8}\left(32 + 2x_1^3 - y_1\frac{y_2-\alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2\frac{1}{8}\left(32 + 2x_2^3 - y_2\frac{y_3-y_1}{2h}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -y_{18} + 2y_{19} - y_{20} + h^2\frac{1}{8}\left(32 + 2x_{19}^3 - y_{19}\frac{y_{20}-y_{18}}{2h}\right) = 0 \\ -y_{19} + 2y_{20} + h^2\frac{1}{8}\left(32 + 2x_{20}^3 - y_{20}\frac{\beta-y_{19}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana è

$$[J(y_1,\dots,y_{20})]_{ij} = \begin{cases} -1 - \frac{h}{2}\frac{y_i}{8} & i = j-1, \quad j = 2,\dots,20 \\ 2 - \frac{h}{2}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{8} & i = j, \quad j = 1,\dots,20 \\ -1 + \frac{h}{2}\frac{y_i}{8} & i = j+1, \quad j = 1,\dots,19 \end{cases}$$

La tabella riporta i risultati ottenuti

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1.0	17.000000	17.000000	
1.1	15.754503	15.755455	9.520×10^{-4}
1.2	14.771740	14.773333	1.594×10^{-3}
1.3	13.995677	13.997692	2.015×10^{-3}
1.4	13.386297	13.388571	2.275×10^{-3}
1.5	12.914252	12.916667	2.414×10^{-3}
1.6	12.557538	12.560000	2.462×10^{-3}
1.7	12.299326	12.301765	2.438×10^{-3}
1.8	12.126529	12.128889	2.360×10^{-3}
1.9	12.028814	12.031053	2.239×10^{-3}
2.0	11.997915	12.000000	2.085×10^{-3}
2.1	12.027142	12.029048	1.905×10^{-3}
2.2	12.111020	12.112727	1.707×10^{-3}
2.3	12.245025	12.246522	1.497×10^{-3}
2.4	12.425388	12.426667	1.278×10^{-3}
2.5	12.648944	12.650000	1.056×10^{-3}
2.6	12.913013	12.913846	8.335×10^{-3}
2.7	13.215312	13.215926	6.142×10^{-4}
2.8	13.553885	13.554286	4.006×10^{-4}
2.9	13.927046	13.927241	1.953×10^{-4}
3.0	14.333333	14.333333	

Estrapolazione di Richardson

Se $y_i^{(h)}$, $y_i^{(h/2)}$, $y_i^{(h/4)}$ indicano le approssimazioni ottenute con passo di integrazione $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$ nei punti $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, ..., N$, l'**estrapolazione di Richardson** è data da:

Prima estrapolazione: $$y_i^{E_1} = \frac{4y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

Seconda estrapolazione: $$y_i^{E_2} = \frac{4y_i^{(h/4)} - y_i^{(h/2)}}{3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

Estrapolazione finale: $$y_i^{E_3} = \frac{16y_i^{E_2} - y_i^{E_1}}{15}. \quad i = 1, \ldots, N.$$

Utilizzando come passo iniziale $h = 0.1$ nell'esercizio precedente, $y_i^{E_3}$ ha un **errore massimo** di $\mathbf{3.68 \cdot 10^{-10}}$.

Esercizio

Risolvere il problema non lineare della deflessione di una trave lunga $120cm$ usando lo schema alle differenze finite.

Le caratteristiche della trave sono:

$$q = 100Kg/m \qquad E = 3.0 \cdot 10^7 Kg/cm^2$$

$$S = 1000Kg \qquad I = 625cm^4$$

Esercizio

Approssimare la soluzione del seguente problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{1}{2}(1 + x + y)^3, & x \in (0,\ 1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

mediante lo schema alle differenze finite con $N = 3, 10, 20, 50$.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: §9.13 (escluso metodo shooting)