

Analisi Numerica

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni:

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Martedì 9.30-10.30

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<http://www.sbai.uniroma1.it/users/bruni-vittoria>

nella pagina dedicata al corso [Analisi Numerica](#)

Equazione del trasporto

Un'onda (elettromagnetica, sonora, della superficie di un liquido) che viaggia non distorta alla velocità costante $c > 0$ è ben rappresentata dal seguente modello matematico

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

in cui x rappresenta la posizione, t il tempo e u l'intensità della perturbazione. All'istante iniziale ($t = 0$) il profilo dell'onda è $u(x, 0) = f(x)$ mentre ad istanti di tempo successivi, tale profilo trasla verso destra della quantità ct . Questo fenomeno è ben descritto dalla seguente **equazione del trasporto**

$$u_t + cu_x = 0$$

dove $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$.

In modo analogo, un'onda che viaggia a sinistra, cioè $u(x, t) = f(x + ct)$, soddisfa le seguente equazione

$$u_t - cu_x = 0$$

Equazione delle onde (corda vibrante)

Si consideri una corda elastica tesa tra i punti $x = 0$ e $x = L$ lungo l'asse x . Se la corda è perturbata rispetto alla configurazione a riposo ed successivamente è lasciata vibrare, lo spostamento $u(x, t)$ è descritto dalla seguente equazione

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

dove $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ e $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, nell'ipotesi in cui il moto della corda avviene in un piano fissato e i punti della corda sono vincolati a muoversi solo in una direzione trasversale alla corda, u è regolare e si considerano solo piccoli spostamenti (si trascurano i termini del secondo ordine rispetto a u_x), la densità della corda è costante e non ci sono forze trasversali che agiscono sulla corda (il peso è trascurabile).

Effettuando il cambio di variabili $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, si può dimostrare che la funzione

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

con f, g due funzioni continue con derivata prima e seconda, è soluzione dell'equazione delle onde ed è la sovrapposizione di due onde che viaggiano in direzioni opposte.

Equazione del calore

Si consideri un filo metallico di lunghezza L isolato termicamente, omogeneo e di densità R , calore specifico C e conduttività termica k . Il filo è inizialmente a temperatura T_0 mentre gli estremi sono mantenuti a temperatura T_1 ; allora, la temperatura $u(x, t)$ del filo in un punto x all'istante t soddisfa la seguente equazione

$$u_t = \frac{k}{RC} u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{condizione iniziale}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = T_1, \quad t > 0 \quad \text{condizione ai limiti (al bordo)}$$

Equazione di Poisson

Si consideri una membrana perfettamente elastica, omogenea, disposta sul piano xy e fissata con tensione uniforme lungo il contorno $\partial\Omega$ dell'aperto limitato Ω . Se la membrana è sottoposta a carichi trasversali di densità F , allora la sua configurazione $u(x, y)$ soddisfa la seguente equazione

$$u_{xx} + u_{yy} = -a^2 F, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

dove a è una costante che dipende dalle caratteristiche del materiale.

Equazioni alle derivate parziali

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è una relazione che lega una **funzione incognita** $u(x_1, \dots, x_r)$ alle sue **derivate parziali**.

Caso particolare: $u = u(x, y)$

Equazioni del primo ordine: $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

Equazioni del secondo ordine: $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$

Equazioni quasi-lineari

Primo ordine: $a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = f(x, y, u)$

(se a, b sono funzioni solo di x e y e f è lineare in u
l'equazione è **lineare**)

Secondo ordine:

$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$

(se a, b sono funzioni solo di x e y e f è lineare in u, u_x, u_y
l'equazione è **lineare**)

Problemi ai valori iniziali

In alcuni casi il problema differenziale descrive l'**evoluzione** nel tempo di un fenomeno fisico ed è completato dalle **condizioni iniziali**.

$$\begin{cases} a(x, t, u) u_x + b(x, t, u) u_t = f(x, t, u) & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{Condizioni iniziali}$$

Esempio: equazione del trasporto

$$u_t + c u_x = 0 \quad x \in \mathbf{R} \quad t > 0$$

Soluzione (o integrale generale): $u(x, t) = \gamma(x - ct)$

Nota. L'integrale generale dipende da **funzioni arbitrarie**.

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{Condizioni iniziali}$$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(x, t) = \varphi(x - ct)$

Problemi al bordo

Nei casi di interesse applicativo $u(x, t)$ verifica l'equazione differenziale per $t > 0$ e $a < x < b$ e soddisfa, oltre alle **condizioni iniziali**, le **condizioni al bordo** (o ai limiti) per $x = a$ e $x = b$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x, t, u) u_{xx} + b(x, t, u) u_{xt} + c(x, t, u) u_{tt} = f(x, t, u) \quad a < x < b, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad a \leq x \leq b \quad \text{Condizioni iniziali} \\ u(a, t) = \rho(t) \quad u(b, t) = \sigma(t) \quad t \geq 0 \quad \text{Condizioni al bordo} \end{array} \right.$$

Esempio: equazione della propagazione del calore

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \frac{k}{RC} u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 \quad 0 \leq x \leq L \\ u(t, 0) = u(t, L) = T_1 \quad t > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L: \text{lunghezza del filo} \\ k: \text{conduttività termica} \\ R: \text{densità} \\ C: \text{calore specifico} \end{array}$$

Problemi stazionari

Nel caso di fenomeni **stazionari** $u(x, y)$ verifica l'equazione differenziale in un dominio $\Omega \subset R^2$ e soddisfa **condizioni al bordo** sulla **frontiera** di Ω , $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} a(x, y, u) u_{xx} + b(x, y, u) u_{xy} + c(x, y, u) u_{yy} = f(x, y, u) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \psi(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{Condizioni al bordo}$$

Esempio: **equazione di Poisson**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Linee caratteristiche per le equazioni del primo ordine

Si cerca la soluzione $u(x, y)$ del **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$$

dove $x = \alpha(\tau)$ e $y = \beta(\tau)$ sono le **equazioni parametriche** di una curva Γ assegnata.

\Rightarrow Si cerca una **superficie integrale** che passi per la **curva** \mathcal{C} (dello spazio (x, y, u)) di equazione

$$x = \alpha(\tau) \quad y = \beta(\tau) \quad u = \varphi(\tau)$$

Linee caratteristiche per le equazioni quasi-lineari del primo ordine

$$\text{Problema di Cauchy} \begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u) & (a \neq 0) \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$$

Se φ è **derivabile** $\Rightarrow \frac{d}{d\tau}u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \alpha'(\tau)u_x + \beta'(\tau)u_y = \varphi'(\tau)$

Per poter calcolare u_x e u_y su Γ bisogna risolvere il **sistema lineare**:

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\alpha(\tau), \beta(\tau), u)u_x + b(\alpha(\tau), \beta(\tau), u)u_y = f(\alpha(\tau), \beta(\tau), u) \\ \alpha'(\tau)u_x + \beta'(\tau)u_y = \varphi'(\tau) \end{cases} \quad \text{su } \Gamma$$

che ammette soluzione **solo se** $D = \det \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \neq 0$

Linee caratteristiche: sono le **curve** lungo le quali $D = a\beta' - b\alpha' = 0$

\Rightarrow se si assegnano le condizioni iniziali sulle linee caratteristiche il problema di Cauchy è **impossibile** o **indeterminato**

Equazioni quasilineari del 1° ordine

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u)$$

Curve caratteristiche: $a \underbrace{\frac{\beta'}{d\tau}}_{\frac{dy}{d\tau}} - b \underbrace{\frac{\alpha'}{d\tau}}_{\frac{dx}{d\tau}} = 0 \Rightarrow \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{a(x, y, u)}$

Esempio

$$\begin{cases} u_t + 2t u_x = 0 & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Curve caratteristiche:

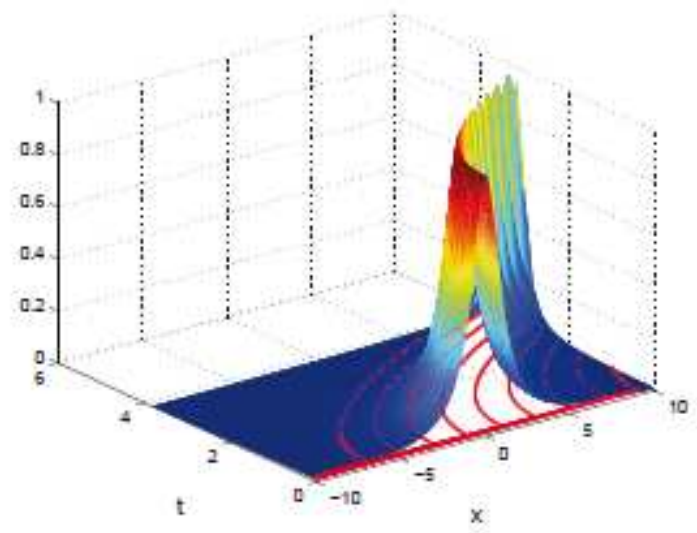
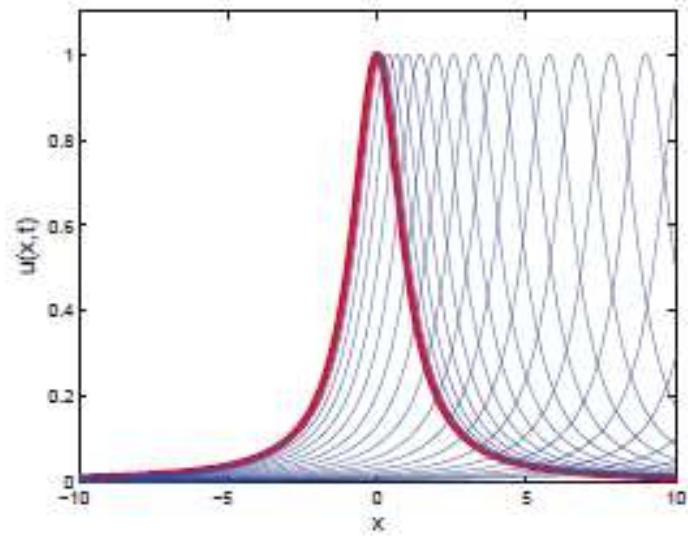
$$\Gamma = \{x = t^2 + \text{costante}\}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - t^2)^2}$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = \frac{1}{1 + (\text{costante})^2}$$

Nota. Se l'equazione ha coefficienti a e b **costanti** le **curve caratteristiche** sono **rette** con coefficiente angolare $\frac{b}{a}$:

$$y - \left(\frac{b}{a}\right) x = \text{costante}$$



Equazione del trasporto

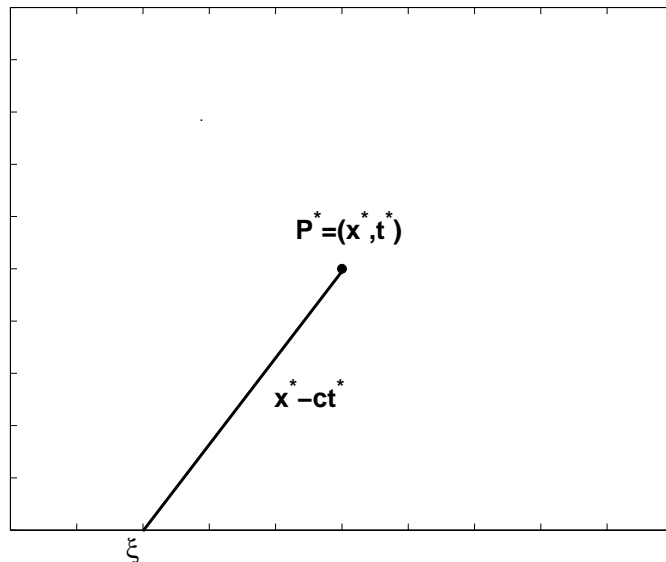
$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Curve caratteristiche: $\Gamma : x - ct = \text{costante} \Rightarrow u(x, t) = \varphi(x - ct)$

Lungo le curve caratteristiche la soluzione u assume un valore **costante**

$$x - ct = \xi \Rightarrow u(x, t)|_{\Gamma} = u(\xi + ct, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - ct)$$

Dominio di dipendenza continuo



Il segmento P^*C è detto **dominio di dipendenza continuo** di P^* : la soluzione nel punto $P^* = (x^*, t^*)$ è

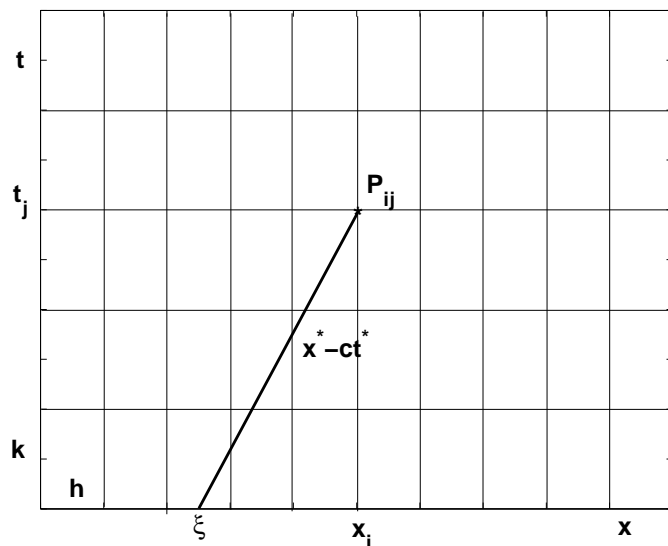
$$u(x^*, t^*) = \varphi(x^* - ct^*) = \varphi(\xi^*)$$

Schemi numerici per l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = \psi(t) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

Nota. Per avere continuità deve essere $\varphi(0) = \psi(0)$

Discretizzazione: $x_i = ih \quad t_j = jk \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad 0 \leq j \leq M+1$



$$R = \{(x_i, t_j), 0 \leq i \leq N+1, 0 \leq j \leq M+1\}$$

$$\Rightarrow u_t(x_i, t_j) + c u_x(x_i, t_j) = 0$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**

Formula alle differenze finite per u_x e u_t

Se u ammette derivate parziali continue fino al secondo ordine può essere sviluppata in **serie di Taylor** di ordine 2

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + k u_t(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j) \quad \eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - h u_x(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Formula alle differenze finite in avanti per $u_t(x_i, t_j)$:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \underbrace{\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j)}_{O(k)}$$

Primo ordine in k

Formula alle differenze finite indietro per $u_x(x_i, t_j)$:

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \underbrace{\frac{h}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j)}_{O(h)}$$

Primo ordine in h

Schema numerico

Sostituendo nell'equazione

$$u_t(x_i, t_j) + c u_x(x_i, t_j) = 0$$

le **approssimazioni** delle derivate parziali si ricava la relazione esatta

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j) + c \left[\frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \frac{h}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j) \right] = 0$$

Lo schema numerico si ottiene sostituendo $u(x_i, t_j)$ con l'**approssimazione** u_{ij} e trascurando l'**errore**:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0$$

Schema upwind

Aggiungendo le **condizioni iniziali** e **al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico**, chiamato **schema upwind**:

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = (1 - \alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j} & i = 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & i = 0, 1, \dots, N + 1 \\ u_{0,j} = \psi(t_j) & j = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\alpha = c \frac{k}{h}$$

Numero di Courant

Si tratta di uno schema

- del **primo ordine** in x e t
- **esplicito**
- a **due livelli temporali**

Convergenza

Uno schema numerico è **convergente** se

$$\max_{(x_i, t_j) \in R} |e(x_i, t_j)| = \max_{(x_i, t_j) \in R} |u(x_i, t_j) - u_{i,j}| \rightarrow 0 \quad \text{per } h, k \rightarrow 0$$

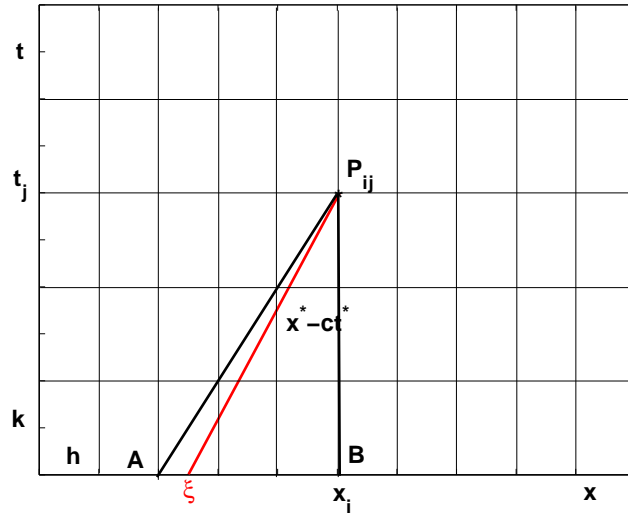
Teorema di equivalenza di Lax. Dato un problema differenziale lineare con c.i. e c.b. ben posto, **condizione necessaria e sufficiente** di **convergenza** di uno schema alle differenze è che lo schema sia **consistente** e **stabile**

Consistenza: l'**errore locale di troncamento** $\rightarrow 0$ per $h, k \rightarrow 0$

Stabilità : l'**accumularsi** degli errori locali di troncamento si mantiene **limitato** per $h, k \rightarrow 0$ e t fissato

Condizione necessaria di convergenza

Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo $AP_{ij}B$ è detto **dominio di dipendenza discreto** di P_{ij}

La **soluzione** $u_{i,j}$ in P_{ij} dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo** $AP_{ij}B$ formato dall'asse delle x , dalla retta che congiunge $(x_i, 0)$ e P_{ij} e dalla retta di coefficiente angolare $\frac{k}{h}$ passante per P_{ij} .

Condizione necessaria per la **convergenza** è che il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo

$$\Rightarrow \frac{k}{h} \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{ck}{h} \leq 1} \quad \text{Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy}$$

Condizione sufficiente per la stabilità

Ponendo $U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T$

$V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, 0]^T = [\psi(t_j), 0, \dots, 0]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix}$$

Matrice di amplificazione

lo **schema upwind** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Introducendo la **perturbazione** $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N,0}]^T$ su U_0 , senza perturbare i valori al contorno, si ha

$$(U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) + \alpha V_j$$

da cui

$$S_{j+1} = A S_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = A^j S_0 \Rightarrow \|S_j\| \leq \|A\|^j \cdot \|S_0\|$$

Condizione sufficiente affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |\alpha| + |1 - \alpha| \leq 1$$

Poichè $\alpha > 0$, la condizione è verificata se $\alpha \leq 1$. Di conseguenza, la condizione necessaria

$$\alpha = \frac{c k}{h} \leq 1$$

è anche sufficiente e il metodo **upwind** è **condizionatamente stabile** (**stabilità condizionata**)

Convergenza dello schema upwind

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u)(x_i, t_j) &= u_t(x_i, t_j) + cu_x(x_i, t_j) = \\ &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k) + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + O(h)\end{aligned}$$

Equazione
differenziale
(esatta)

$$(\mathcal{L}_R \{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}$$

Schema numerico
applicato alla
soluzione esatta

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R \{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k + h) \rightarrow 0 \quad \text{per } k, h \rightarrow 0$$

⇒ Lo schema è **consistente** e del **primo ordine** in x e t

⇒ Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionatamente convergente**

Nota. Lo schema è **esatto** per tutti i **polinomi bilineari** in x e t .

Studio dell'errore globale

Errore globale: $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

Schema esatto: $u(x_i, t_{j+1}) = (1 - \alpha)u(x_i, t_j) + \alpha u(x_{i-1}, t_j) + k\tau(x_i, t_j)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{j+1} &= AW_j + \alpha V_j + kT_j & W_j &= [u(x_1, t_j), \dots, u(x_N, t_j)]^T \\ & & V_j &= [u(x_0, t_j), 0, \dots, 0, u(x_{N+1}, t_j)]^T \\ & & T_j &= [\tau(x_1, t_j), \dots, \tau(x_N, t_j)]^T \end{aligned}$$

Schema upwind: $u_{i,j+1} = (1 - \alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j}$

$$\Rightarrow U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Sottraendo le due relazioni, per l'errore $E_j = [e_{1,j}, e_{2,j}, \dots, e_{N,j}]^T$ si ha

$$E_{j+1} = A E_j + kT_j = \underbrace{A^{j+1} E_0}_{\text{errore di propagazione}} + \underbrace{k \sum_{r=1}^{j+1} A^{j+1-r} T_{r-1}}_{\text{errore di troncamento}}$$

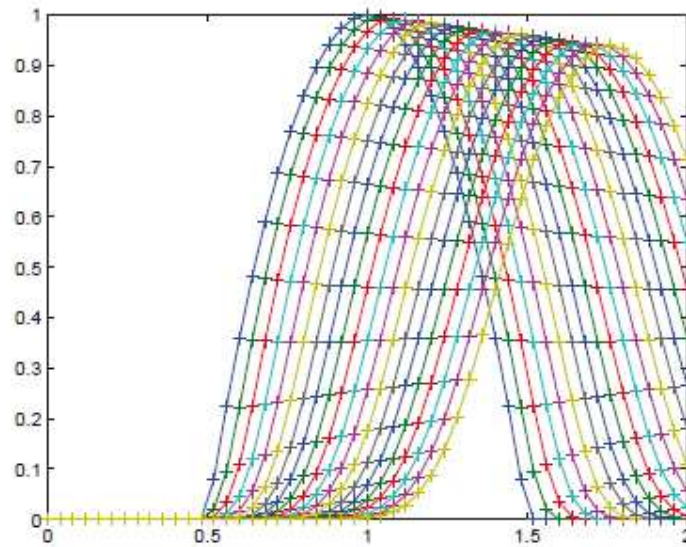
convergenza = stabilità + consistenza

Esempio

Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} (\frac{1}{2} - x)(x - \frac{3}{2}) & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione approssimata ottenuta scegliendo $k = 0.02$ e $h = 0.04$ è mostrata in figura e il **numero di Courant** è $\alpha = \frac{1}{2}$



```

function [u] = PDE_upwind(numCFL,M,N,u0,g0)
%
% u = PDE_upwind(numCFL,M,N,u0,g0): risolve lequazione del trasporto
% con il metodo upwind
%
% numCFL: numero di Courant-Friedrichs-Lewy
% M: numero di passi temporali
% N+1: numero di nodi
% u0: condizione iniziale
% g0: condizione al bordo
% u: soluzione approssimata
u = zeros(N+1,M+1);
u(:,1) = u0;
u(1,:) = g0;
for j = 1:M
for i = 2:N+1
u(i,j+1) = (1-numCFL)*u(i,j)+numCFL*u(i-1,j);
end
end

```

Altri schemi espliciti

Usando le **differenze finite centrate** si ottengono gli schemi seguenti.

Metodo leapfrog: $u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \alpha(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$

(differenze finite centrate sia per u_x che per u_t)

Metodo di Lax-Wendroff:

$$u_{i,j+1} = (1 - \alpha^2)u_{i,j} - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)u_{i+1,j} + \frac{1}{2}\alpha(1 + \alpha)u_{i-1,j}$$

(differenze finite centrate per u_x)

Errore locale di troncamento: $\tau(x_i, y_j) = O(k^2 + h^2)$

I due schemi sono **consistenti**, del **secondo ordine** e **condizionatamente stabili** se $\alpha < 1$ \Rightarrow i due schemi sono **convergenti**

Schemi impliciti

Sono schemi in cui la soluzione approssimata è ottenuta risolvendo ad ogni passo temporale un **sistema lineare**.

Esempio. Utilizzando le **differenze finite all'indietro** per approssimare sia u_t che u_x si ha

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j) + \\ & + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \frac{h}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j) = 0 \\ & \eta_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

Schema numerico: $(1 + \alpha)u_{i,j} - \alpha u_{i-1,j} = u_{i,j-1}$

Si tratta di uno schema del **primo ordine** in x e t , **implicito**, a **due livelli temporali**.

Convergenza dello schema implicito

$$\Rightarrow AU_{j+1} + \alpha V_{j+1} = U_j \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha & 1 + \alpha \end{bmatrix}$$

Una perturbazione E_0 sul vettore U_0 produce un errore

$$E_{j+1} = A^{-1}E_j$$

$$\text{con } A^{-1} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta^{N-1} & \beta^{N-2} & \dots & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Lo schema è **consistente**, del **primo ordine** e **incondizionatamente stabile** in quanto si può dimostrare che

$$\|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m = 1$$

independentemente da k e h

⇒ lo schema è **incondizionatamente convergente**

Schema di Crank-Nicolson

Utilizzando le **differenze finite centrate**

$$u_t \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$u_x \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) \simeq \frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2}}{2h} \simeq \frac{1}{2h} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}) \right]$$

nell'equazione $u_t \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) + c u_x \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0$

si ha lo **schema numerico** seguente:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{\alpha}{4} (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$$

Lo schema è **consistente**, del **secondo ordine** e **incondizionatamente stabile** \Rightarrow lo schema è **incondizionatamente convergente**

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 10 §§ 10.1-10.4