

Analisi Numerica

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni:

Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Martedì 9.30-10.30

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<http://www.sbai.uniroma1.it/users/bruni-vittoria>

nella pagina dedicata al corso [Analisi Numerica](#)

Linee caratteristiche per le equazioni del 2° ordine

Si cerca la soluzione $u(x, y)$ del **problema di Cauchy**

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_x(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = g(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_y(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = h(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi'(\tau) = \underbrace{g(\tau)}_{u_x} \alpha'(\tau) + \underbrace{h(\tau)}_{u_y} \beta'(\tau)$$

dove $x = \alpha(\tau)$ e $y = \beta(\tau)$ sono le **equazioni parametriche** di una curva Γ assegnata.

\Rightarrow Si cerca una **superficie integrale** che passi per la **curva** \mathcal{C} (dello spazio (x, y, u)) di equazione

$$x = \alpha(\tau) \quad y = \beta(\tau) \quad u = \varphi(\tau)$$

e che in ogni punto di \mathcal{C} sia **tangente** al piano di equazione

$$(x - \alpha(\tau)) g(\tau) + (y - \beta(\tau)) h(\tau) = u - \varphi(\tau)$$

Linee caratteristiche per le equazioni quasi-lineari del 2° ordine

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_x(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = g(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_y(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = h(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$$

Se φ, g, h sono **derivabili** \Rightarrow
$$\begin{cases} g'(\tau) = \alpha'(\tau)u_{xx} + \beta'(\tau)u_{xy} \\ h'(\tau) = \alpha'(\tau)u_{xy} + \beta'(\tau)u_{yy} \end{cases}$$

Per poter calcolare u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} su Γ bisogna risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \\ \alpha'(\tau)u_{xx} + \beta'(\tau)u_{xy} = g'(\tau) \\ \alpha'(\tau)u_{xy} + \beta'(\tau)u_{yy} = h'(\tau) \end{cases} \quad \text{su } \Gamma$$

che ammette soluzione solo se $D = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \neq 0$

Equazione delle linee caratteristiche

Linee caratteristiche: sono le **curve** lungo le quali

$$D = a(\beta')^2 - b\alpha'\beta' + c(\alpha')^2 = 0$$

⇒ se si assegnano le condizioni iniziali sulle linee caratteristiche il problema di Cauchy è **impossibile** o **indeterminato**

$$\Rightarrow a \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - b \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} + c \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0 \Rightarrow a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

Direzioni caratteristiche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u, u_x, u_y) \pm \sqrt{b(x, y, u, u_x, u_y)^2 - 4a(x, y, u, u_x, u_y)c(x, y, u, u_x, u_y)}}{2a(x, y, u, u_x, u_y)}$$

Nota. Se l'equazione ha coefficienti a, b, c **costanti** le **curve caratteristiche** sono **due famiglie di rette** con coefficiente an-

golare $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \text{costante}$

Equazioni quasilineari del 2° ordine

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

Linee caratteristiche

In ogni punto (x, y) le linee caratteristiche hanno **tangente** data da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u, u_x, u_y) \pm \sqrt{b(x, y, u, u_x, u_y)^2 - 4a(x, y, u, u_x, u_y)c(x, y, u, u_x, u_y)}}{2a(x, y, u, u_x, u_y)}$$

- Nei punti x, y in cui $b^2 - 4ac > 0$ ci sono **due direzioni caratteristiche reali** → l'equazione è **iperbolica**
- Nei punti x, y in cui $b^2 - 4ac = 0$ le **direzioni caratteristiche** sono **reali e coincidenti** → l'equazione è **parabolica**
- Nei punti x, y in cui $b^2 - 4ac < 0$ le **direzioni caratteristiche** sono **complesse coniugate** → l'equazione è **ellittica**

Equazioni paraboliche

Le equazioni paraboliche modellizzano problemi **non stazionari** in cui predomina il **trasporto per conduzione o diffusione**.

Esempio

La **temperatura** $u(x, t)$ assunta in un generico punto x al tempo t da un **filo metallico omogeneo termicamente isolato** che abbia temperatura costante T_0 all'**istante iniziale** e sia mantenuto a temperatura T_1 ai suoi **estremi**, soddisfa l'equazione

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} = \frac{RC}{K} u_t & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = T_1 & t > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L : \text{lunghezza} \\ R : \text{densità} \\ C : \text{calore specifico} \\ K : \text{conduttività termica} \end{array}$$

Equazione di diffusione del calore

$$\boxed{u_{xx} = u_t} \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 0$$

Curve caratteristiche: $\boxed{t = \text{costante}}$ \Rightarrow Non si possono assegnare le condizioni iniziali per u e u_t lungo l'asse x

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} f(\xi) d\xi}$$

Nota. Se $f(x) > 0$ per $x \in [0, L]$ e $f(x) = 0$ per $x \notin [0, L]$, $u(x, t) > 0$ per $x \in \mathbf{R}$ e $t \geq 0 \Rightarrow$ il calore si **diffonde**

Dominio di dipendenza continuo

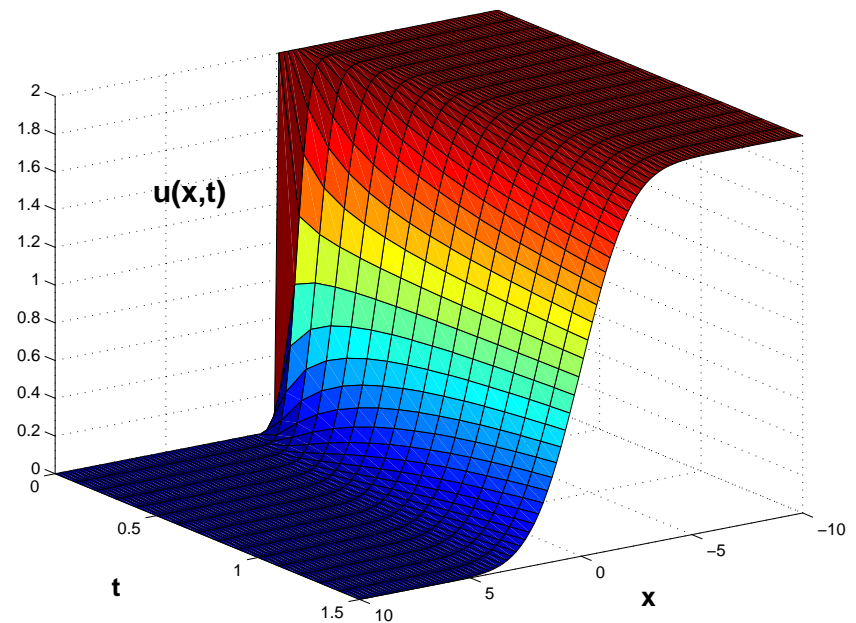
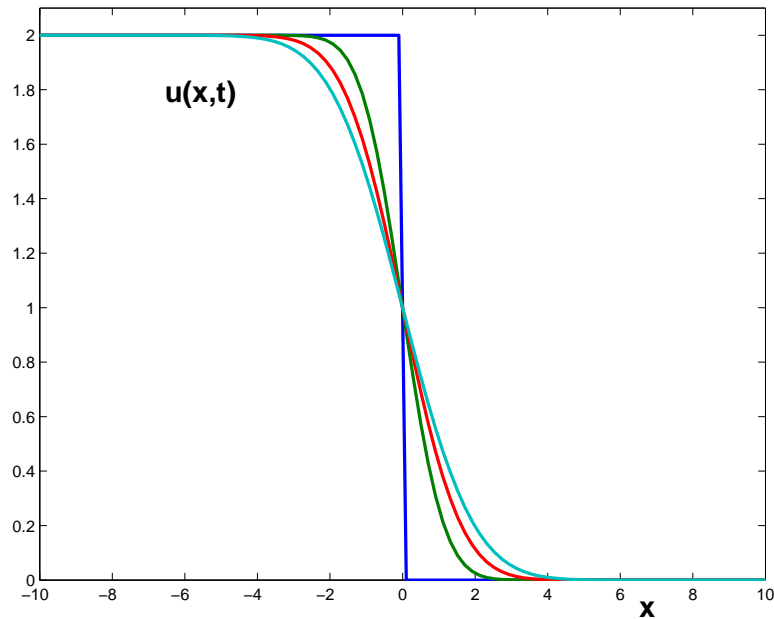
In ogni punto $P(x, t)$ la soluzione $u(x, t)$ **dipende** dai valori del **dato iniziale** $f(x)$ su tutto \mathbf{R}

\Rightarrow il **dominio di dipendenza continuo** è **tutto \mathbf{R}**

Esempio

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ 0 & \text{per } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2/4t} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$



Problema ai valori iniziali e al contorno per l'equazione del calore

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = g(t) \quad u(1, t) = l(t) & t \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{con } f(0) = g(0)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x) \left\{ \int_0^1 f(\xi) \sin(k\pi \xi) d\xi + \right. \\ \left. + k\pi \int_0^t e^{k^2 \pi^2 \tau} [g(\tau) - (-1)^k l(\tau)] d\tau \right\}$$

Dominio di dipendenza continuo

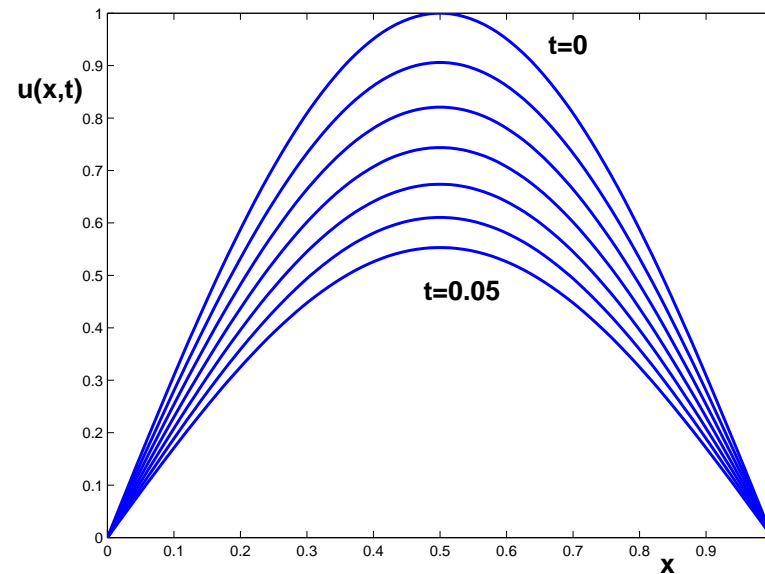
In ogni punto $P(x, t)$ la soluzione $u(x, t)$ **dipende** dai valori del **dato iniziale** $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ e dai valori delle **condizioni al bordo** $g(t)$ e $l(t)$ per ogni $t \geq 0$

\Rightarrow il **dominio di dipendenza continuo** è il rettangolo $[0, 1] \times [0, t]$

Esempio

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} = u_t \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

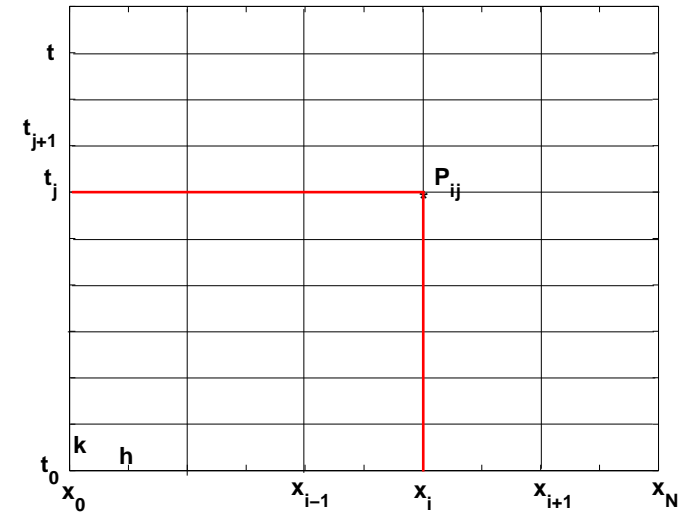
$$u(x, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x \left\{ \int_0^1 \sin \pi \xi \sin k\pi \xi d\xi \right\} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$



Schemi numerici per l'equazione del calore

Discretizzazione: $x_i = ih$ $t_j = jk$

$$R = \{(x_i, t_j), 0 \leq i \leq N + 1, 0 \leq j \leq M + 1\}$$



$$\Rightarrow u_{xx}(x_i, t_j) = u_t(x_i, t_j)$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**.

Formule alle differenze finite

Formula alle differenze finite centrate per $u_{xx}(x_i, t_j)$:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi_i, t_j)}_{O(h^2)}$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

È una formula del **secondo ordine** in h

Formula alle differenze finite in avanti per $u_t(x_i, t_j)$:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \underbrace{\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j)}_{O(k)}$$

$$\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

È una formula del **primo ordine** in k

Uno schema esplicito

Usando una **differenza centrata** per approssimare $u_{xx}(x_i, t_j)$ e una **differenza in avanti** per approssimare $u_t(x_i, t_j)$ si ottiene l'**equazione discreta**

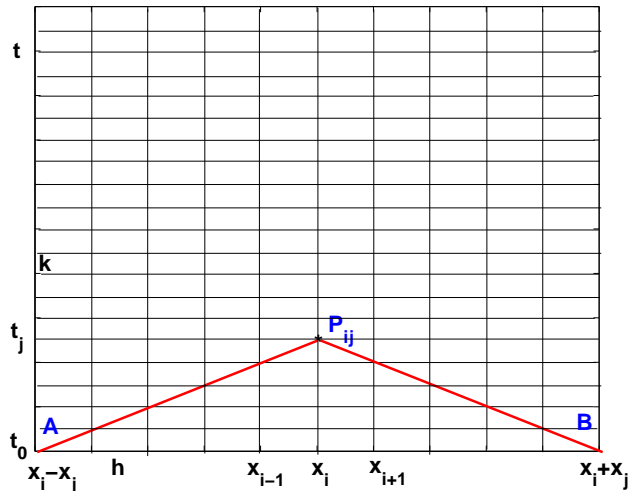
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

Aggiungendo le **condizioni iniziali** e **al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico esplicito a due livelli temporali**, del **primo ordine** in k e del **secondo ordine** in h :

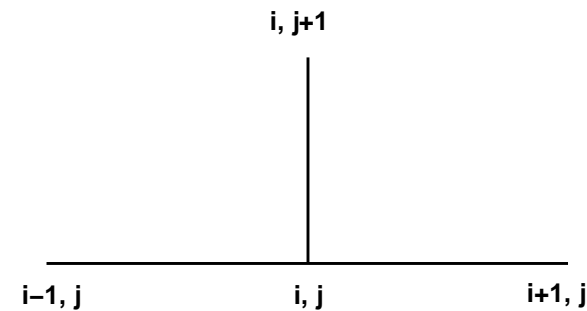
$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N + 1 \\ u_{0,j+1} = g(t_{j+1}) \quad u_{N,j+1} = l(t_{j+1}) \quad j = 1, 2, \dots, M \end{array} \right. \quad \alpha = \frac{k}{h^2}$$

Condizione necessaria di convergenza

Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo $AP_{ij}B$ è detto **dominio di dipendenza discreto** di P_{ij}



La **soluzione** $u_{i,j}$ in P_{ij} dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo** $AP_{ij}B$ formato dal segmento $[x_i - \frac{h}{k}t_j, x_i + \frac{h}{k}t_j]$ e dalle rette di coefficienti angolari $\pm \frac{k}{h}$ passanti per P_{ij} .

Condizione necessaria per la **convergenza** è che per $h, k \rightarrow 0$ il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo $\Rightarrow \frac{k}{h} \rightarrow 0$ per $h, k \rightarrow 0$ (se $\alpha = \text{costante}$ si ha $\frac{k}{h} = \alpha h \rightarrow 0$)

Condizione sufficiente per la stabilità

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T \quad V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, u_{N+1,j}]^T = [g(t_j), 0, \dots, l(t_j)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 - 2\alpha \end{bmatrix}$$

Matrice di amplificazione

Lo **schema esplicito** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Perturbazione: $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N-1,0}]^T$

$$\Rightarrow (U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) + \alpha V_j$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = AS_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = A^j S_0 \Rightarrow \|S_j\| \leq \|A\|^j \cdot \|S_0\|$$

Condizione sufficiente affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \leq 1 \Rightarrow 2|\alpha| + |1 - 2\alpha| \leq 1$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Stabilità condizionata

Convergenza dello schema esplicito

Equazione differenziale (esatta)

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u)(x_i, t_j) &= u_t(x_i, t_j) - u_{xx}(x_i, t_j) = \\ &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x_i, \eta_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi_i, t_j)\end{aligned}$$

Schema numerico applicato alla soluzione esatta

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k + h^2) \rightarrow 0 \text{ per } k, h \rightarrow 0$$

⇒ Lo schema è **consistente**

⇒ Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionata-**

mente convergente per $\alpha = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

Studio dell'errore globale

Errore globale: $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

Schema esatto:

$$u(x_i, t_{j+1}) = \alpha u(x_{i-1}, t_j) + (1 - 2\alpha) u(x_i, t_j) + \alpha u(x_{i+1}, t_j) + k\tau(x_i, t_j)$$

$$\Rightarrow W_{j+1} = AW_j + \alpha V_j + \underbrace{kT_j}_{\text{errore di troncamento}}$$

errore di
troncamento

Schema esplicito:

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha) u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots, M$$

$$\Rightarrow U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Sottraendo le due relazioni, per l'errore $E_j = [e_{1,j}, e_{2,j}, \dots, e_{N-1,j}]^T$ si ha

$$E_{j+1} = A E_j + kT_j = \underbrace{A^{j+1} E_0}_{\text{errore di propagazione}} + \underbrace{k \sum_{r=1}^{j+1} A^{j+1-r} T_{r-1}}_{\text{errore di troncamento}}$$

convergenza = stabilità + consistenza

Osservazioni sullo schema esplicito

Dallo sviluppo in **serie di Taylor** si ha

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \underbrace{\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, t_j)}_{O(k)} + O(k^2)$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_i, t_j)}_{O(h^2)} + O(h^4)$$

Dall'equazione differenziale si ha: $u_{tt} = (u_t)_t = (u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = u_{xxxx}$

⇒ Se si sceglie $\frac{k}{2} = \frac{h^2}{12}$, cioè $\alpha = \frac{1}{6}$, lo schema ha **ordine** $O(k^2 + h^4)$

Schema di Crank-Nicholson

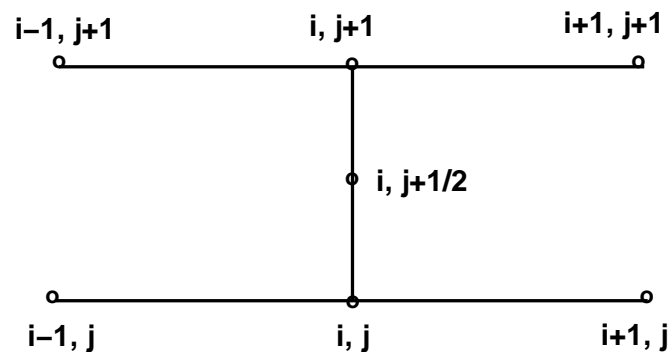
Utilizzando le **differenze centrate**

$$u_t \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$u_{xx} \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \right]$$

nell'equazione $u_t \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right) = u_{xx} \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \right)$ si ha lo **schema numerico** seguente:

$$-\alpha u_{i-1,j+1} + 2(1+\alpha)u_{i,j+1} - \alpha u_{i+1,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + 2(1-\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j}$$



È uno schema **implicito** a **due livelli** temporali, **consistente** e del **secondo ordine** sia in k che in h

Stabilità dello schema di Crank-Nicholson - 1

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T$$

$$V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, u_{N+1,j}]^T = [g(t_j), 0, \dots, l(t_j)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(1+\alpha) & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha & 2(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(1-\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 2(1-\alpha) & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha & 2(1-\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 2(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AU_{j+1} = BU_j + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

Stabilità dello schema di Crank-Nicholson - 2

$$AU_{j+1} = BU_j + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

Perturbazione: $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N-1,0}]^T$

$$\Rightarrow A(U_{j+1} + S_{j+1}) = B(U_j + S_j) + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = (A^{-1}B)S_j = CS_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = C^j S_0$$
$$\Rightarrow \|S_j\| \leq \|C\|^j \cdot \|S_0\|$$

Condizione sufficiente

affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che $\|C\| \leq 1$

Si dimostra che $\|C\|_2 \leq 1$ indipendentemente dai valori di k e h

\Rightarrow lo schema è **incondizionatamente stabile**

\Rightarrow per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **incondizionatamente convergente**

Esempio

Approssimare la soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale

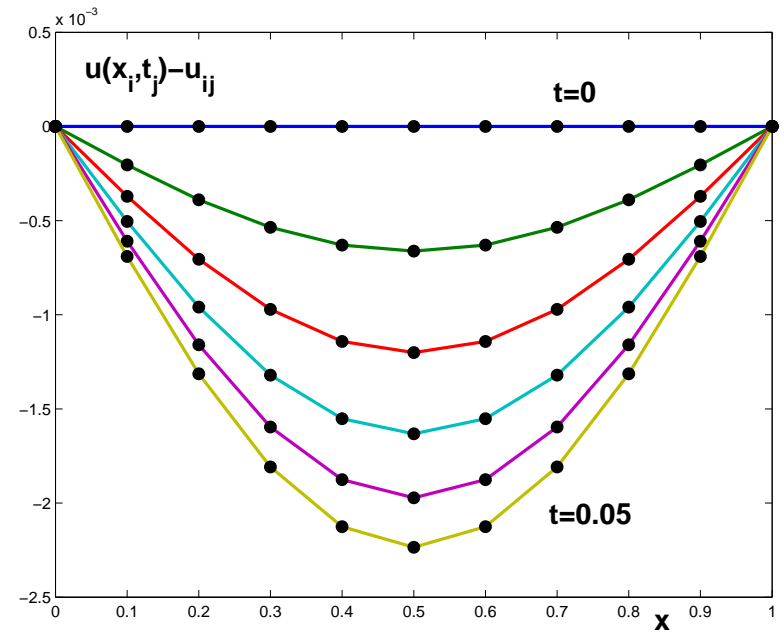
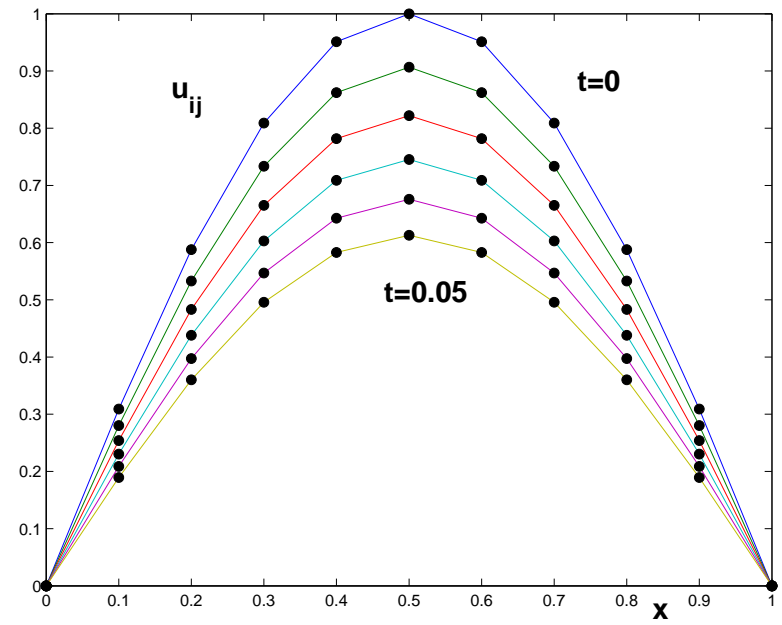
$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{array} \right. \quad u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

con $h = 0.1$ e $\alpha = 1$.

Discretizzazione: $x_i = i0.1, i = 0, 1, \dots, 10$ $t = j0.01, j = 0, 1, \dots, 5$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad V_j = 0$$

$$AU_{j+1} = BU_j$$



Equazioni iperboliche

Le **equazioni iperboliche** modellizzano problemi di **trasporto** di grandezze fisiche in assenza di dissipazione (propagazione di onde elettromagnetiche, onde meccaniche, vibrazioni ...).

$$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

Curve caratteristiche: $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac > 0$

⇒ ci sono **due direzioni caratteristiche** distinte

Esempio

Una **corda elastica** viene perturbata dalla sua condizione di riposo, lungo l'asse x , e lasciata vibrare. Lo **spostamento normale** $u(x, t)$ di un punto x all'istante t soddisfa l'equazione

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} & x \in \mathbf{R} & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Equazione delle onde

$$u_{tt} = C^2 u_{xx} \quad x \in \mathbf{R} \quad t > 0$$

Curve caratteristiche: $a = 1, b = 0, c = -C^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm C$

$$x \pm C t = \text{costante}$$

$$\xi = x + C t \quad \eta = x - C t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando prima rispetto a η e poi rispetto a ξ si ottiene l'**integrale generale** dell'equazione delle onde

$$u(x, t) = f(x + C t) + g(x - C t) \quad f, g : \text{funzioni arbitrarie}$$

$u(x, t)$ è la **somma** di due segnali che si propagano con velocità $\pm C$ mantenendo un valore **costante** lungo le curve caratteristiche. Anche le **discontinuità** si propagano lungo le curve caratteristiche.

Problema ai valori iniziali per l'equazione delle onde

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} & x \in \mathbf{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{condizioni iniziali}$$

$$u(x, t) = f(x + Ct) + g(x - Ct) \Rightarrow \begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = Cf'(x) - Cg'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{C} \psi(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz + A \quad A: \text{costante arbitraria}$$

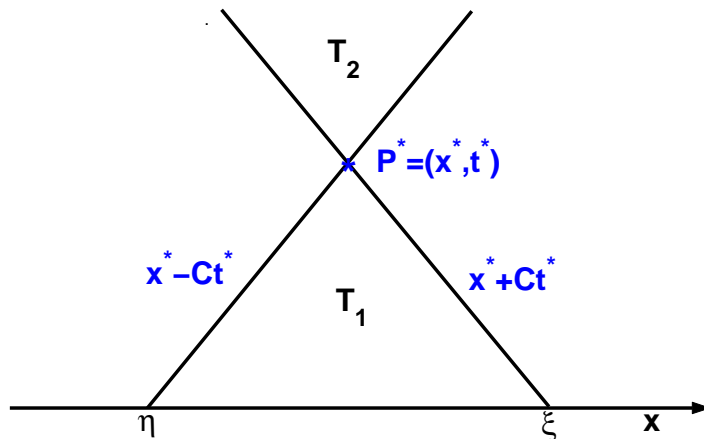
$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz + A \right] \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz - A \right]$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + Ct) + \varphi(x - Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(z) dz$$

**Formula di
D'Alembert**

Formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + Ct) + \varphi(x - Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(z) dz$$



Il valore della soluzione nel punto $P^* = (x^*, y^*)$ dipende solo dai valori dei dati nell'**intervallo**

$$I = [x^* - Ct, x^* + Ct]$$

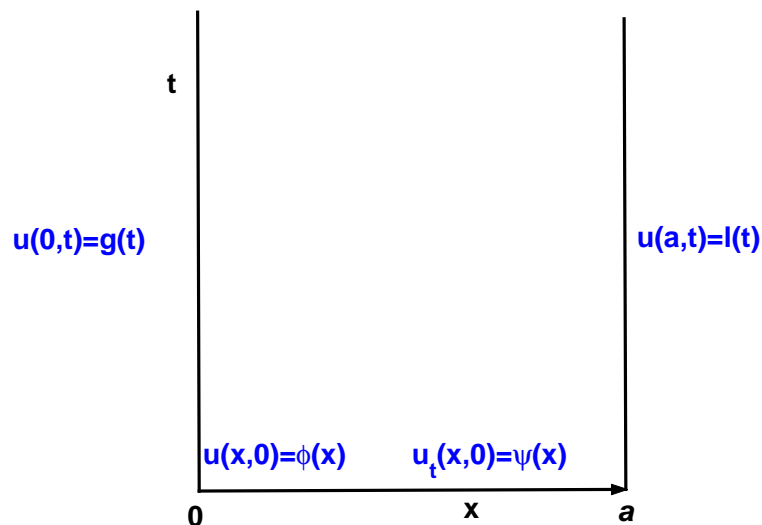
(**intervallo di dipendenza**)

Dominio di dipendenza continuo: triangolo $T_1 \Rightarrow$ Il valore della soluzione in P^* **dipende** solo dalla soluzione nei punti appartenenti al triangolo T_1

Dominio di influenza: triangolo $T_2 \Rightarrow$ Il valore della soluzione in P^* **influenza** la soluzione solo nei punti appartenenti al triangolo T_2

Problema ai valori iniziali e ai limiti per l'equazione delle onde

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < a \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq a \\ u(0, t) = g(t) \quad u(a, t) = l(t) \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{condizioni iniziali} \\ \text{condizioni al bordo} \\ \text{di tipo Dirichlet} \end{array}$$



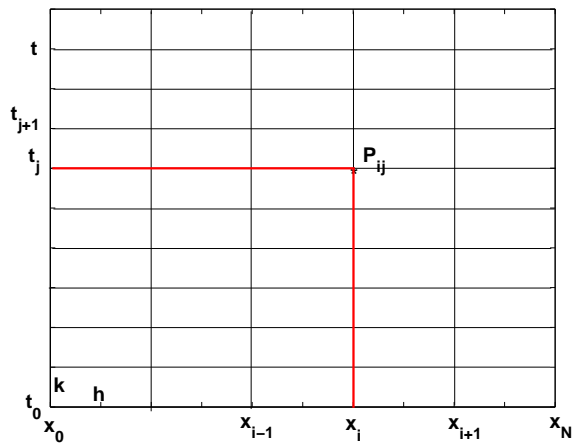
La soluzione è rappresentata da uno sviluppo in **serie di Fourier**.

Nota. Per avere la **continuità** della soluzione si deve avere $g(0) = \varphi(0)$ e $l(0) = \varphi(a)$

Schemi numerici per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - C^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Discretizzazione: $x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N + 1$
 $t_j = jk \quad 0 \leq j \leq M + 1$



$$\Rightarrow u_{tt}(x_i, t_j) - C^2 u_{xx}(x_i, t_j) = 0$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**

Differenze finite per u_{tt} , u_{xx} e u_t

Formula alle differenze finite centrate per $u_{tt}(x_i, t_j)$:

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} + O(k^2)$$

**Secondo
ordine in k**

Formula alle differenze finite centrate per $u_{xx}(x_i, t_j)$:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2)$$

**Secondo
ordine in h**

Formula alle differenze finite centrate per $u_t(x_i, 0)$:

$$u_t(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1}))}{2k} + O(k^2)$$

**Secondo
ordine in k**

Schema esplicito

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + C^2 \frac{k^2}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) & i = 1, 2, \dots, N \\ & j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & i = 0, 1, \dots, N + 1 \\ \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = \psi(x_i) \Rightarrow u_{i,-1} = u_{i,1} - 2k\psi(x_i) & i = 1, 2, \dots, N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 & j = 0, 1, 2, \dots, M + 1 \end{array} \right.$$

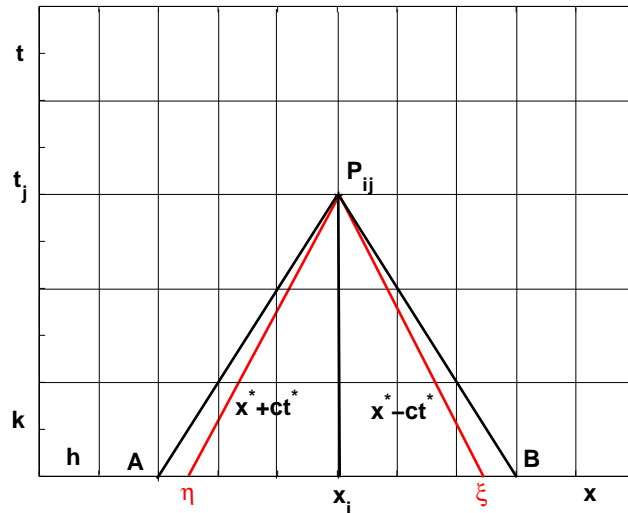
È uno schema **esplicito**, del **secondo ordine** in k e h , a **due livelli**

temporali. Posto $\alpha = C \frac{k}{h}$ si ha

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i,j+1} = \alpha^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \alpha^2) u_{i,j} + \alpha^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} & 1 \leq i \leq N \\ & 0 \leq j \leq M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & 0 \leq i \leq N + 1 \\ u_{i,-1} = \frac{1}{2} \alpha^2 [\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1})] + (1 - \alpha^2) \varphi(x_i) + k\psi(x_i) & 1 \leq i \leq N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 & 0 \leq j \leq M + 1 \end{array} \right.$$

Condizione necessaria di convergenza

Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo $AP_{ij}B$ è detto **dominio di dipendenza discreto** di P_{ij}

L'**approssimazione** $u_{i,j}$ in P_{ij} dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo** $AP_{ij}B$ formato dall'asse delle x e dalle rette di coefficiente angolare $\pm \frac{k}{h}$ passanti per P_{ij} .

Condizione necessaria per la **convergenza** è che il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo

$$\Rightarrow \frac{k}{h} \leq \frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{Ck}{h} \leq 1} \quad \text{Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy}$$

Condizione sufficiente per la stabilità

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T \quad U_0 = [\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_N)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) \end{bmatrix}$$

**Matrice di
amplificazione**

$$U_{-1} = \frac{1}{2}AU_0 + k\Psi \quad \Psi = [\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_N)]^T$$

Lo **schema esplicito** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j - U_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Perturbazione: $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N,0}]^T$

$$\Rightarrow (U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) - (U_{j-1} - U_j)$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = AS_j - S_{j-1} \quad 0 \leq j \leq M$$

Sistema alle differenze: $S_{j+1} = AS_j - S_{j-1} \quad 0 \leq j \leq M$

La soluzione è $S_j = \beta^j Q$ con $AQ = \frac{\beta^2 + 1}{\beta} Q = \lambda Q$

Condizione sufficiente affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$|\beta| = \left| \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 1} \right| \leq 1 \Rightarrow |\lambda| < 2$$

Per gli autovalori di A si ha $\lambda_i = 2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)} \quad 1 \leq i \leq N$

\Rightarrow

$$\alpha = \frac{Ck}{h} \leq 1$$

Stabilità condizionata

Convergenza dello schema esplicito

Equazione differenziale esatta:

$$(\mathcal{L}u)(x_i, t_j) = u_{tt}(x_i, t_j) - C^2 u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} + O(k^2) - C^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2) = 0$$

Schema numerico applicato alla soluzione esatta:

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - C^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k^2 + h^2) \rightarrow 0 \text{ per } k, h \rightarrow 0$$

⇒ Lo schema è **consistente** e del **secondo ordine**

⇒ Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionatamente convergente**

Equazioni ellittiche

Le **equazioni ellittiche** modellizzano lo stato **stazionario** di problemi descritti nello stato non stazionario da equazioni iperboliche o paraboliche.

$$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

Curve caratteristiche: $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac < 0$

⇒ le **direzioni caratteristiche** sono **complesse coniugate**

Esempio

Una **membrana** perfettamente **elastica** e **omogenea**, disposta sul piano xy , è fissata con **tensione uniforme** lungo il suo contorno Γ ed è sottoposta a un **carico trasversale** di densità F

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -a^2 F(x, y) & (x, y) \in A \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad a: \text{costante dipendente dalle caratteristiche della membrana}$$

Equazione di Poisson

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = -f(x, y)$$

Curve caratteristiche: $a = c = 1, b = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \quad \boxed{x \pm iy = \text{costante}}$

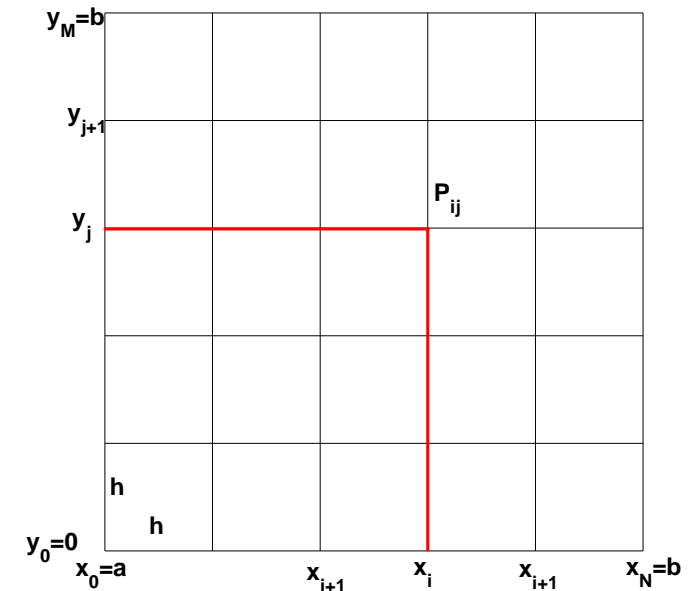
Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_x n_x + u_y n_y = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y), x \in (0, a), y \in (0, b)\}$$



Esempio di Hadamard

Il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & y > 0, x \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_y(x, 0) = 0 & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

ha come soluzione $u(x, y) \equiv 0, \quad y \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$

Se le condizioni iniziali vengono modificate come segue,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 10^{-4} \sin(10^4 x)$$

la soluzione diventa

$$u(x, y) = 10^{-8} \sin(10^4 x) \sinh(10^4 y), \quad y \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Poichè per y sufficientemente grande $\sinh(10^4 y)$ si comporta come $e^{(10^4 y)}$, una perturbazione arbitrariamente piccola sul dato iniziale, produce una variazione arbitrariamente grande nella soluzione rendendo il **problema ai valori iniziali instabile**.

Osservazione

Per l' **equazione di Poisson** i problemi ai valori iniziali possono essere mal posti; sono più naturali le condizioni al contorno.

Per il **problema di Dirichelet** vale, inoltre, il seguente teorema

Teorema: Se Ω è sufficientemente regolare e $g(x)$ è una funzione continua su $\partial\Omega$, allora il **problema di Dirichelet** ammette un'unica soluzione che dipende con continuità dal dato $g(x)$,

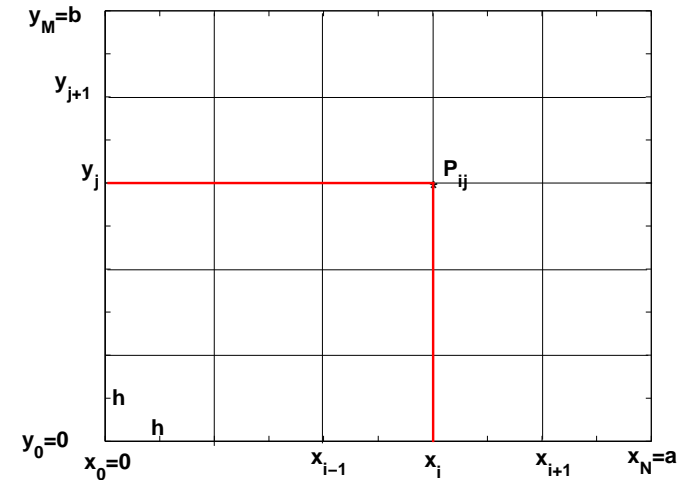
Schemi numerici per l'equazione di Poisson

Discretizzazione

$$x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N$$

$$y_j = jh \quad 0 \leq j \leq M$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j)$$



Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**.

Formula alle differenze finite centrate per $u_{xx}(x_i, y_j)$:

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi_i, y_j)$$

Secondo ordine in h

Formula alle differenze finite centrate per $u_{yy}(x_i, y_j)$:

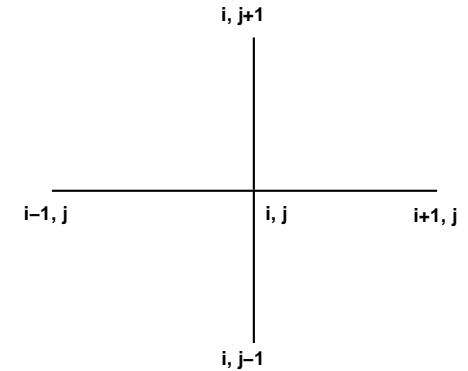
$$u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{yyyy}(x_i, \eta_j)$$

Secondo ordine in h

Uno schema implicito

Usando le **differenze centrate** per approssimare $u_{xx}(x_i, y_j)$ e $u_{yy}(x_i, y_j)$ si ottiene l'**equazione discreta**

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -f(x_i, y_j)$$



Aggiungendo le **condizioni al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico implicito**, del **secondo ordine** in h :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f(x_i, y_j) & \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N-1 \\ j = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \\ u_{0,j} = g(0, y_j) \quad u_{N,j} = g(N, y_j) & j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = g(x_i, 0) \quad u_{i,M} = g(x_i, M) & i = 0, 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Si tratta di un **sistema lineare** di $(N-1)(M-1)$ equazioni nelle $(N-1)(M-1)$ incognite $u_{i,j}$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$.

Sistema lineare

Se $N = 5$ e $M = 4$ si ottiene il **sistema lineare** 12×12

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{11} \\
 u_{21} \\
 u_{31} \\
 u_{41} \\
 u_{12} \\
 u_{22} \\
 u_{32} \\
 u_{42} \\
 u_{13} \\
 u_{23} \\
 u_{33} \\
 u_{43}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_{11} + g_{10} + g_{01} \\
 f_{21} + g_{20} \\
 f_{31} + g_{30} \\
 f_{41} + g_{51} + g_{40} \\
 f_{12} + g_{20} \\
 f_{22} \\
 f_{32} \\
 f_{42} + g_{52} \\
 f_{13} + g_{03} + g_{14} \\
 f_{23} + g_{24} \\
 f_{33} + g_{34} \\
 f_{43} + g_{44} + g_{53}
 \end{bmatrix}$$

$A \qquad U = F$

La matrice A è **tridiagonale a blocchi** e **definita positiva**

\Rightarrow **metodo di Gauss-Seidel** o **metodo SOR**

Consistenza dello schema implicito

Equazione differenziale (esatta):

$$(\mathcal{L}u)(x_i, y_j) = u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + O(h^2) + \\ + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} + O(h^2) = -f(x_i, y_j)$$

Schema numerico applicato alla soluzione esatta:

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2}$$

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, y_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, y_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = \\ = -f(x_i, y_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = O(h^2) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

⇒ Lo schema è **consistente** e del **secondo ordine**

Stabilità dello schema implicito

Teorema. Data una qualsiasi **funzione discreta** $V = \{v_{ij}\}_{i=0, j=0}^{N+1, M+1}$, definita sul **reticolo** $R \cup \partial R$ si ha

$$\max_R |V| \leq \max_{\partial R} |V| + \frac{a^2}{2} \max_R |\mathcal{L}_R V|$$

Errore globale: $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

$$(\mathcal{L}_R \{e_{i,j}\})_{ij} = \underbrace{(\mathcal{L}_R \{u(x_i, y_j)\})_{ij}}_{-f(x_i, y_j) - \tau(x_i, y_j)} - \underbrace{(\mathcal{L}_R \{u_{i,j}\})_{ij}}_{-f(x_i, y_j)} = -\tau(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max_{(x_i, y_j) \in R} |e_{i,j}| &\leq \max_{(x_i, y_j) \in \partial R} |e_{i,j}| + \frac{a^2}{2} \max_{(x_i, y_j) \in R} |(\mathcal{L}_R \{e_{i,j}\})_{ij}| = \\ &= \frac{a^2}{2} \max_{(x_i, y_j) \in R} |\tau(x_i, y_j)| \end{aligned}$$

L'**errore globale** è controllato dall'**errore di troncamento**

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 10 §§ 10.5-10.7