

Ph.D. in Information and Communication Technologies ICT  
Ph.D. Course:

## Perturbative and qualitative methods: tools to solve nonlinear problems

Edition 2021 (30 hours, 6 credits)

**Instructor: Sandra Carillo**

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

SAPIENZA Università di Roma

Sandra.Carillo@uniroma1.it

<http://www.sbai.uniroma1.it/~sandra.carillo>

**Course Description:** This Course provides some methods to study nonlinear problems focussing mainly on cases which are modelled via nonlinear ordinary differential equations. The aim is to construct solutions to nonlinear problems which arise in applications via *qualitative* and *perturbation* methods. The first ones study the analytical consequences of conservation laws and their implications as far as the solutions admitted by such problems are concerned. The second ones are concerned with *ad hoc* methods developed when in the nonlinear a *small* parameter appears.

### Class Schedule

The lectures of the course are going to be scheduled in May-June, 2021, possibly, in the seminar room at the second floor of the DIET Department, Via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italy, the timetable will be provided in due time.

The arguments can be schematically listed in:

- a) **Qualitative methods: an introduction.**
- b) **Straightforward Perturbation Method.**
- c) **Multiple Scale Method.**
- d) **Singular Perturbation Method.**
- e) **Boundary Layer Method.**

f) **Visualisation of the results via computer algebra manipulation (MATLAB' Toolbox).**

Some background notions on ordinary differential equations open the course. In particular, on *qualitative* and *perturbation* methods are introduced as tools to study nonlinear ordinary differential equations. Then, some ideas on qualitative methods (conservation of energy, phase plane) are briefly illustrated and applied to physically significant cases.

Then, various *perturbation* methods are presented and illustrative examples are studied in detail. Critical aspects as well as advantages of each method are pointed to the students' attention. In addition, via computer algebra methods, the solutions of the problems are constructed and plotted. Cauchy and boundary value problems are both treated. As a first *toy problem*, the Cauchy problem in the case of a linear weakly damped oscillator is studied. Then, nonlinear o.d.es, such as Duffing equation, are studied. Also the Van der Pol equation, which can be used to model the cardiac cycle, is analysed. In most of the provided examples, various methods are applied and a comparison among the different approximations obtained and the related region of validity (in time or space) is given. A variety of examples of application is provided and the students are invited to actively participate developing a personal project with applicative meaning.

If there is interest in the audience, an overview on how to apply Perturbation Methods in the case of partial differential equations closes the course.

### **Texts: Selected Chapters from**

- M.H.Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, M.H.Holmes, Introduction to Perturbation Methods, Springer, New York, 1995; **Author(s):** M.H.Holmes;
- M. Lo Schiavo, *Note di sistemi dinamici*, SIMAI e-Lecture Notes, Vol 12 (2013) <http://cab.unime.it/journals/index.php/lecture/article/view/928>, ISBN-13:978-88-905708-5-8
- D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations An introduction for Scientists and Engineers*, FOURTH EDITION Oxford University Press, 1999.
- Further material provided by the Instructor.

**Final Exam** The student is asked to prepare a personally developed example similar to those studied during the course. Problems originated from scientific interests of the candidate are welcome.

Ph.D. in Information and Communication Technologies ICT  
Ph.D. Course:

## Metodi perturbativi e qualitativi: strumenti per risolvere problemi non lineari

Edizione 2019 (30 ore, 6 creditis)

**Docente:Instructor: Sandra Carillo**

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

SAPIENZA Università di Roma

Sandra.Carillo@uniroma1.it

<http://www.sbai.uniroma1.it/~sandra.carillo>

**Descrizione del corso:** Questo corso fornisce alcuni metodi per studiare problemi non lineari con particolare riferimento a casi in il modello si traduce in equazioni differenziali ordinarie non lineari. L'obiettivo è quello di costruire soluzioni a problemi non lineari, originati da applicazioni varie, mediante l'applicazione di metodi qualitativi e perturbativi. I primi studiano le conseguenze analitiche delle leggi di conservazione e le loro implicazioni per quanto riguarda le soluzioni ammesse da tali problemi. I secondi riguardano i metodi ad hoc sviluppati quando nel parametro non lineare appare un piccolo parametro.

### Class Schedule

Le lezioni del corso sono programmate nel periodo maggio- giugno 2021, se possibile, nella sala seminari al secondo piano del reparto DIET, Via Eudossiana 18, 00184 Roma, Italia, con orario da definire.

Gli argomenti possono essere elencati schematicamente in:

- a) Cenni a Metodi qualitativi.
- b) Metodo perturbativo diretto.
- c) Metodo delle Scale Multiple.
- d) Metodo Perturbativo Singolare.
- e) Metodo degli Strati Sottili.
- f) Visualizzazione dei risultati tramite *computer algebra manipulation* (MATLAB' Toolbox).

Alcune nozioni di base sulle equazioni differenziali ordinarie aprono il corso. In particolare, i metodi qualitativi e i perturbativi sono introdotti come strumenti per studiare equazioni differenziali ordinarie non lineari. Quindi, alcune idee sui metodi qualitativi (conservazione dell'energia, piano di fase) sono brevemente illustrate e applicate a casi fisicamente significativi.

Successivamente, vengono illustrati vari metodi perturbativi corredati da esempi illustrativi studiati in dettaglio. Aspetti critici e vantaggi di ciascun metodo sono messi in evidenza. Inoltre, via metodi di computer algebra, le soluzioni dei problemi sono costruite e rappresentate graficamente. Sono trattati sia problemi relativi ad assegnati valori iniziali (Cauchy) che al contorno.

Il primo problema giocattolo studiato è il problema di Cauchy relativo ad un oscillatore lineare debolmente smorzato. Quindi, si considera l'oscillatore non lineare modellato dall'equazione di Duffing.

Inoltre, viene analizzata l'equazione di Van der Pol, che pu essere utilizzata per modellare il ciclo cardiaco. Nella maggior parte degli esempi illustrati, si applicano diversi metodi perturbativi e, quindi, li si pongono a confronto per analizzare le diverse approssimazioni ottenute e, soprattutto, la relativa regione di validità (nel tempo o nello spazio) delle soluzioni ottenute. Viene fornita una varietà di esempi di applicazioni e gli studenti sono invitati a partecipare attivamente sviluppando di un progetto personale con significato applicativo.

In caso interesse da parte degli studenti che frequentano il corso, cenni su applicazioni di metodi Perturbativi nel caso di equazioni differenziali parziali chiudono il corso.

## Testi: Capitoli selezionati da

- M.H.Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, M.H.Holmes, Introduction to Perturbation Methods, Springer, New York, 1995; **Author(s)**: M.H.Holmes; **ISBN-13**: 978-0000000000
- M. Lo Schiavo, *Note di sistemi dinamici*, SIMAI e-Lecture Notes, Vol 12 (2013) <http://cab.unime.it/journals/index.php/lecture/article/view/928>, **ISBN-13**:978-88-905708-5-8
- D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations An introduction for Scientists and Engineers*, FOURTH EDITION Oxford University Press, 1999.
- Ulteriore materiale fornito dal Docente.

**Esame Finale** Agli studenti viene chiesto di preparare un esempio sviluppato personalmente simile a quelli studiati durante il corso. I problemi originati da interessi scientifici del candidato sono i benvenuti.