Foglio di esercizi 1 - 7 Marzo 2019

Probabilità e statistica – Ingegneria Meccanica

Alessandro Ciallella

Esercizio 1. Una serratura si apre con un codice decimale di quattro cifre. Trovare i numeri N_1 ed N_2, dove:

N_1 è il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura;

N_2 è il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura sapendo che due cifre sono pari $(0, 2, 4, 6, 8)$ e due sono dispari $(1, 3, 5, 7, 9)$.

Soluzione.

N_1 è pari al numero totale di codici decimali di 4 cifre, che sono 10^4.

N_2 si calcola moltiplicando le $\binom{4}{2}$ possibili scelte per le due posizioni in cui inserire le cifre pari per le possibili scelte delle cifre pari e di quelle dispari (5 per la prima cifra pari e 5 per la seconda, analogamente per le dispari). Quindi $N_2 = 6 \cdot 5^4 = 3750$.

Esercizio 2. Una serratura si apre con un codice decimale di tre cifre. Trovare il numero massimo N di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura sapendo che due cifre sono pari e una è dispari.

Soluzione.

N si trova moltiplicando le possibili scelte delle tre cifre (5^3) per le $\binom{3}{1}$ possibili scelte della posizione dove inserire la cifra dispari. Quindi $N = 3 \cdot 5^3 = 375$.

Esercizio 3. Ad una riunione di condominio si incontrano N persone. Sapendo che tutti stringeranno la mano a tutti, quante sono in totale le strette di mano?

Soluzione.

Il numero di strette di mano è pari al numero delle possibili scelte dei sottoinsiemi di due persone tra N, cioè $\binom{N}{2}$. In alternativa si può osservare che ciascuna delle N persone stringerà la mano $N - 1$ volte, ma che in questo modo si conta ciascuna stretta di mano due volte, sia come A stringe la mano a B che B stringe la mano ad A. Il numero di strette di mano è allora $N \cdot (N - 1)/2$.

Esercizio 4. Una targa è composta da due lettere tre numeri e altre due lettere, ad esempio $AB123CD$

Calcolare:

a) Tutte le possibili targhe;

b) Tutte le possibili targhe che contengono i tre caratteri B,C,8;

c) Tutte le possibili targhe palindrome.

Soluzione.

Supponiamo che tutte le 26 lettere dell'alfabeto possano essere scelte (le targhe automobilistiche italiane utilizzano invece solo 22 lettere, escludendo la I, la U, la O e la Q, si potrebbe rifare il conto in questo altro caso).

a) Ci sono 26 possibili scelte per ciascuna delle lettere e 10 per ogni cifra numerica, per cui tutte le targhe possibili sono $26^4 \cdot 10^3 = 456976000$.

b) Il numero di targhe che contengono B, C e 8 può essere trovato come prodotto delle possibili scelte per le 4 lettere che contengono B e C con le possibili scelte delle 3 cifre numeriche che contengono l'8.

   Le sequenze di 3 cifre numeriche che contengono almeno un 8 possono essere calcolate come differenza tra quanti sono i numeri di tre cifre (10^3) e quanti sono i numeri di tre cifre che non contengono l'8. Questi ultimi sono 9^3, poiché per ogni cifra ci sono 9 possibili scelte, ossia tutte le cifre da 0 a 9 escludendo l'8. Per la parte numerica abbiamo allora $10^3 - 9^3 = 271$ possibilità.

   Tra le parole di quattro lettere, che sono in totale 26^4, ne abbiamo 24^4 che non contengono né B né C. Contiamo quante solo quelle che contengono la B ma non la C. Per contare le parole che contengono esattamente una B si osserva che si hanno $\binom{4}{1} = 4$ scelte per la posizione dove inserire la B e 24^3 scelte per le altre lettere che non possono essere né B né C. Analogamente ci sono $\binom{4}{2} = 6$ scelte per le posizioni dove inserire la B e 24^2 scelte per le altre due lettere creando una parola con esattamente due B. Infine, ci sono $4 \cdot 24$ parole con esattamente tre B ed una sola parola con quattro B. Il totale è $4 \cdot 24^3 + 6 \cdot 24^2 + 4 \cdot 24 + 1 = 58849$.
   In alternativa, ragionando come per la parte numerica, si poteva trovare $58849 = 25^4 - 24^4$ dove 25^4 sono tutte le parole per l'alfabeto senza la C e 24^4 quelle per l'alfabeto senza la B e la C. Analogamente, ci sono 58849 parole di quattro lettere che contengono la C ma non la B.
   Il numero di parole con B e C si trova ora sottraendo al numero di parole distinte possibili il numero di quelle che contengono B ma non C, C ma non B e né B né C. Sono allora $26^4 - 2 \cdot 58849 - 24^4 = 7502$.

   Infine, moltiplicando il numero di scelte possibili per la parte numerica e per quella letterale troviamo il numero di targhe cercato che è $7502 \cdot 271 = 2033042$.

c) Le prime due lettere e le prime due cifre si possono scegliere liberamente, mentre le altre sono obbligate per ottenere una targa che sia uguale leggendo da destra o da sinistra.

Ci sono allora $26^2 \cdot 10^2 = 67600$ targhe palindrome.

Esercizio 5. Si effettuano estrazioni senza reimmissione da un'urna che contiene 15 palline bianche e 15 nere.
Calcolare la probabilità p_{13} che la prima e la terza pallina estratta siano nere.
Calcolare la probabilità p_B che estraendo 4 palline si ottengano più palline bianche che palline nere.

Soluzione.
Se abbiamo estratto nera sia la prima che la terza possiamo aver ottenuto dalla seconda estrazione nera oppure bianca. L'estrazione della sequenza $(nera, nera, nera)$ ha probabilità

$$P\{(nera, nera, nera)\} = \frac{15}{30}\frac{14}{29}\frac{13}{28} = \frac{1}{4}\frac{13}{29}$$

mentre la sequenza $(nera, bianca, nera)$ ha probabilità

$$P\{(nera, bianca, nera)\} = \frac{15}{30}\frac{15}{29}\frac{14}{28} = \frac{1}{4}\frac{15}{29}.$$

$p_{13} = P\{(nera, nera, nera), (nera, bianca, nera)\} = \frac{1}{4} \cdot (\frac{13+15}{29}) = \frac{7}{29}$.

Si noti che $p_{13} = p_{12}$, dove p_{12} è la probabilità di estrarre nera sia la prima che la seconda, infatti $p_{12} = \frac{15}{30} \cdot \frac{14}{29} = \frac{7}{29}$.

Estrarre più bianche che nere accade se estraiamo esattamente 3 bianche e una nera oppure se estraiamo quattro palline bianche. Allora

$$p_B = P(\textit{estratte 3B e 1N}) + P(\textit{estratte 4 B}) = \frac{\binom{15}{3}\binom{15}{1}}{\binom{30}{4}} + \frac{\binom{15}{4}\binom{15}{0}}{\binom{30}{4}} = \frac{26}{87}$$

Esercizio 6. In una fila di 6 sedili devono sedersi 6 studenti, 3 maschi e 3 femmine.
In quanti modi diversi possono sedersi nei casi:
a) senza restrizioni;
b) maschi vicini tra loro e femmine vicine tra loro;
c) maschi vicini tra loro;
d) studenti dello stesso sesso non devono stare vicini.
Se si dispongono casualmente, qual è la probabilità che
e) i maschi capitino tutti vicini?
f) studenti dello stesso sesso non capitino vicini?

Soluzione.
a) Ci sono $6! = 720$ permutazioni dei sei studenti;
b) Possiamo disporre prima i tre uomini e poi le tre donne oppure prima le tre donne e poi i tre uomini. Inoltre ciascun terzetto può essere disposto in $3!$ modi diversi. In totale possono sedersi in $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ modi diversi.
c) Oltre ai 72 modi calcolati nel punto b), sono ammissibili le disposizioni:
1) prima una donna, poi i tre uomini e poi le altre due donne;
2) prima due donne, poi i tre uomini ed infine l'ultima donna. Per ciascuna di queste abbiamo $3! \cdot 3!$ modi diversi di ordinare le persone corrispondenti alle permutazioni dei tre uomini moltiplicato per le permutazioni delle tre donne.
In totale ci sono allora $72 + 72 = 144$ modi di mettere seduti i maschi vicini tra loro.
d) Possiamo iniziare con un uomo o con una donna, poi gli studenti devono mettersi alternati. Di nuovo ci sono $3! \cdot 3!$ modi di permutare gli uomini e le donne. In totale ci sono $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ disposizioni diverse possibili.
e) La probabilità si può calcolare come numero dei casi favorevoli, calcolato nel punto c), diviso numero dei casi possibili, calcolato nel punto a). La probabilità è allora $1/5$.
f) Analogamente, da quanto calcolato al punto d) troviamo probabilità pari a $1/10$.

Esercizio 7. 20 studenti si dividono in 4 squadre da 5 che si sfideranno in un torneo di calcetto con un tabellone di semifinali e finale tra le vincenti. Quante possibili combinazioni (diverse divisioni in squadre, diverso tabellone delle semifinali, diversi esiti delle partite) sono possibili?
Soluzione.
Abbiamo $\binom{20}{5}$ modi diversi di scegliere le 5 persone che formano la squadra vincitrice, $\binom{15}{5}$ scelte tra i rimanenti per formare la squadra finalista perdente, $\binom{10}{5}$ modi di scegliere la squadra eliminata in semifinale dalla vincitrice e $\binom{5}{5}$ un unico modo di scegliere la quarta squadra. Complessivamente abbiamo allora

$$\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} = \binom{20}{5,5,5,5}$$

diversi esiti possibili.

Esercizio 8. Un dado equo a sei facce viene tirato due volte. Descrivere lo spazio campionario e calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
a) A = { Il sei esce esattamente una volta }
b) B = { Entrambi i numeri sono pari }

c) C = { La somma dei due esiti è 4 }
d) D = { La somma dei due esiti è divisibile per 3 }
Soluzione.
Lo spazio campionario è l'insieme delle possibili coppie ordinate i cui elementi sono interi positivi compresi tra 1 e 6, quindi

$$S = \big\{(n, m)|n, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\}.$$

Gli esiti possibili sono allora 36 ed equiprobabili.
a) $P(A) = P\{(1,6),(2,6),(4,6),(4,6),(5,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\} = \frac{10}{36}$
b) $P(B) = P\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
c) $P(C) = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
d) $P(D) = P\{(1,2),(2,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),$
$(6,6)\} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 9. In un urna ci sono n bigliettini numerati da 1 a n. Calcolare la probabilità di pescare due biglietti con numeri consecutivi nel caso in cui l'estrazione avvenga con rimpiazzo e nel caso in cui avvenga senza rimpiazzo. Descrivere inoltre in entrambi i casi lo spazio campionario.
Soluzione.
Nel caso con rimpiazzo lo spazio degli eventi è $S = \{(n_1, n_2)|n_i \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \in 1, 2\}$. Quindi i casi possibili saranno n^2 (tutte le coppie in un insieme di n elementi). Poiché S è uno spazio campionario equiprobabile, la probabilità di un evento sarà casi favorevoli su casi possibili. Dobbiamo allora calcolare i casi favorevoli. Ho due possibilità: se pesco il primo elemento dall'insieme $\{2, 3, \ldots, n-2, n-1\}$ avrò due possibilità per la seconda pesca, prendere l'elemento $i+1$ o l'elemento $i-1$, se invece pesco 1 oppure n avrò un solo caso di successo nella pesca successiva cioè il 2 se pesco 1 o $n-1$ se pesco n. I casi favorevoli totali sono dunque $2 \cdot (n-2) + 1 \cdot 2$. Dunque la probabilità sarà

$$\frac{2 \cdot (n-2) + 1 \cdot 2}{n^2} = \frac{2n-2}{n^2}.$$

Nel caso senza rimpiazzo i casi favorevoli non cambiano ma, cambiando lo spazio campionario, cambiano i casi possibili. Infatti ora tutti i possibili esiti saranno $n \cdot (n-1)$, in quanto per la seconda estrazione avremo un biglietto in meno. Dunque lo spazio campionario è ora $\Omega = \{(n_1, n_2)|n_1 \neq n_2; n_1, n_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, e la probabilità è

$$\frac{2 \cdot (n-2) + 1 \cdot 2}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{n}.$$

Esercizio 10. Sei in una stanza con altre $n-1$ persone. Qual è la probabilità che (ignorando gli anni bisestili...)
a) nessuno compia gli anni nel tuo stesso giorno (evento A)?
b) almeno un'altra persona compia gli anni nel tuo stesso giorno (evento B)?
c) nessuno compia gli anni nello stesso giorno di nessun altro (evento C)?
d) esistano almeno 2 persone che compiono gli anni nello stesso giorno (evento D)?
Soluzione.
Supponendo equiprobabili tutti i 365 giorni dell'anno,
a) La probabilità è 364/365 per ciascuna delle altre persone, da cui

$$P(A) = \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}.$$

b) Osservando che $B = A^C$

$$P(B) = P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}.$$

Si può osservare che $P(B)$ è maggiore di $\frac{1}{2}$ quando ci sono almeno altre 253 persone.
c) Consideriamo in ordine le persone. Fissata una prima persona, considero la seconda: la probabilità che non ci sia coincidenza di compleanni è 364/365, cioè tutti i giorni tranne il compleanno della prima. Presa ora la terza persona, la probabilità che questa compia gli anni in un giorno diverso dal primo e dal secondo è 363/365. Proseguendo così, dopo $i-1$ persone con compleanni distinti, la i–esima ha probabilità $(365-(i-1))/365$ di compiere gli anni in un giorno lasciato libero dalle precedenti. Ne segue che

$$P(C) = \frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(n-1)}{365}.$$

d) La probabilità $P(D)$ si calcola osservando che $D = C^C$ da cui segue $P(D) = 1 - P(C)$. Si noti che per $n = 23$ persone nella stanza la probabilità che ci siano almeno due compleanni coincidenti è maggiore di $\frac{1}{2}$ e per $n = 50$ diventa circa 0.97.