

**Programma del corso di  
ANALISI MATEMATICA II (1015376)**

9 CFU (90 ore) - a.a. 2019/2020 - Cds Ingegneria Chimica (L-9)  
prof.ssa Isabella Ianni

### Curve

Definizione di curva parametrica. Esempi di curve nel piano e nello spazio. Interpretazione cinematica. Curve chiuse, curve semplici. Sostegno di una curva. Curve equivalenti. Esempi di curve equivalenti con verso concorde e discorde. Esempi di curve con stesso sostegno ma non equivalenti.

Vettore tangente ad una curva derivabile, definizione ed esempi. Interpretazione geometrica (retta tangente) e cinematica (velocità istantanea). Esempi di curve derivabili che non ammettono retta tangente in qualche punto (punti d'angolo o cuspidi). Definizione di curva regolare ed esempi. Definizione del versore tangente a una curva regolare. Curve equivalenti hanno lo stesso versore tangente (a meno del verso). Esempi di calcolo del versore tangente.

Concatenamento di curve, definizione ed esempi. Curve regolari a tratti. Calcolo della lunghezza di una curva regolare. Curve equivalenti hanno la stessa lunghezza. Ascissa curvilinea.

Curvatura, torsione, terna di Frénet, piano osculatore e cerchio osculatore per curve nello spazio: definizioni, significati geometrici ed esempi. Teorema di unicità della curva con curvatura e torsione assegnate (solo enunciato).

### Elementi di topologia in $\mathbb{R}^N$

Definizione di distanza euclidea e di intorno sferico. Insiemi aperti e chiusi: definizioni, principali proprietà ed esempi. Definizione di punti interni, esterni e di frontiera per un insieme  $A$ . Definizione di punto isolato e di accumulazione per un insieme  $A$ . Parte interna e chiusura di un insieme  $A$ . Definizione ed esempi di insiemi limitati, compatti, connessi.

### Funzioni reali di due o più variabili reali

Definizione ed esempi di funzioni di più variabili a valori reali. Dominio, immagine e grafico di una funzione. Restrizione di una funzione ad una curva. Insiemi di livello. Funzioni limitate inferiormente, limitate superiormente e limitate.

Definizione di limite di funzione di più variabili ed esempi di verifica del limite. Enunciato del teorema di unicità del limite. Indipendenza del limite dal percorso compiuto per avvicinarsi ad  $x_0$  ed esempi di non esistenza del limite. Studio del limite per funzioni di due variabili passando a coordinate polari. Enunciato del teorema di permanenza del segno. Commutatività del limite rispetto alle 4 operazioni (enunciato).

Continuità per funzioni di più variabili: definizione ed esempi. Gli insiemi di sotto e sopra livello *stretti* di funzioni continue sono aperti. Gli insiemi di livello di funzioni continue sono chiusi. Continuità di funzioni elementari. Continuità di somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. Continuità di composizione di funzioni continue.

### Calcolo differenziale per funzioni reali di due o più variabili reali

Derivate parziali per funzioni di 2 variabili: definizione, esempi. Derivabilità. Gradiente. Calcolo delle derivate parziali attraverso la derivazione della funzione di una variabile ottenuta

dalla restrizione della funzione di partenza a rette parallele agli assi, esempi. Interpretazione geometrica delle derivate parziali per funzioni di 2 variabili: curve coordinate e legame tra le derivate parziali e le direzioni delle rette tangenti alle 2 curve coordinate. Equazione del piano generato dalle rette tangenti alle 2 curve coordinate.

Definizione di piano tangente al grafico di una funzione di due variabili in un punto. L'esistenza del piano tangente implica la continuità (con dim.). La derivabilità non implica la continuità, esempi. La derivabilità non implica l'esistenza del piano tangente. Differenziabilità: definizione ed esempi. Una funzione differenziabile è derivabile ed il suo piano tangente coincide col piano generato dalle rette tangenti alle 2 curve coordinate (con dim.). Notazioni equivalenti per indicare la differenziabilità. Esempi di funzioni non differenziabili (derivabili e non continue, derivabili e continue). Criterio di differenziabilità per funzioni  $C^1$  (senza dim.) ed applicazioni.

Derivate direzionali per funzioni di 2 variabili: definizione, esempi. Calcolo delle derivate direzionali derivando la funzione di una variabile ottenuta dalla restrizione della funzione di partenza a rette di direzione assegnata, esempi. Interpretazione geometrica della derivata direzionale. La differenziabilità implica l'esistenza della derivata direzionale per ogni direzione e formula del gradiente per il calcolo della derivata direzionale (senza dim.). Il gradiente di una funzione individua la direzione di massima pendenza del suo grafico. Esempio di funzione non differenziabile che ammette tutte le derivate direzionali.

Derivabilità di funzioni composte ottenute restringendo funzioni di due variabili a curve del piano (senza dim) ed esempi.

Derivate di ordine successivo: definizione ed esempi. Matrice Hessiana: definizione ed esempi. Teorema di Schwarz per le derivate miste (senza dim.). Formula di Taylor di ordine 2 con resto di Peano (con dim.)

Calcolo differenziale per funzioni di 3 e più variabili.

## Problemi di ottimizzazione

Richiami sullo studio di massimi e minimi per funzioni reali di una variabile reale. Definizione di massimi e minimi relativi ed assoluti per funzioni di 2 variabili ed esempi.

Forme quadratiche associate a matrici simmetriche  $2 \times 2$ : definizione, esempi, classificazione in base al segno (definite positive, definite negative, indefinite, semidefinite), teorema di caratterizzazione del segno (senza dim) ed esempi.

Ottimizzazione libera per funzioni di 2 variabili: teorema di Fermat per massimi/minimi relativi interni (senza dim); studio dei punti stazionari (interni) attraverso il segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana. Esempi.

Ottimizzazione vincolata per funzioni di 2 variabili: definizione ed esempi di punti di massimo/minimi vincolati a una curva; definizione, esempi e studio di punti stazionari vincolati (interni) a una curva regolare; teorema di Weierstrass di esistenza di massimi/minimi assoluti (senza dim). Studio di massimi/minimi assoluti su insiemi  $K$  chiusi e limitati tali che la frontiera  $\partial K$  è il supporto di un numero finito di curve regolari  $\gamma_i$  (ricerca, analisi e confronto di: punti stazionari interni all'insieme  $K$ , punti stazionari vincolati (interni) alle curve  $\gamma_i$ , estremi delle curve  $\gamma_i$ ). Vincoli in forma implicita: teorema dei moltiplicatori di Lagrange (senza dim) ed esempi.

## Integrali multipli

Integrale doppio di funzioni continue su rettangoli: definizione ed esempi. Domini normali rispetto all'asse  $x$  e rispetto all'asse  $y$ : definizione ed esempi. Integrale doppio di funzioni

continue su domini normali: definizione ed esempi. Integrale di funzioni continue su unioni finite di domini normali (con interni a 2 a 2 disgiunti). Linearità e monotonia dell'integrale doppio.

Formula di riduzione per il calcolo dell'integrale doppio: enunciato, interpretazione geometrica ed esempi. Calcolo dell'area di un dominio nel piano mediante il calcolo dell'integrale doppio.

Formula del cambiamento di variabili per il calcolo dell'integrale doppio: enunciato, giustificazione geometrica ed esempi. Calcolo dell'integrale doppio passando a coordinate polari.

Calcolo dell'integrale doppio in domini simmetrici per funzioni pari o dispari rispetto alla simmetria del dominio.

Domini dello spazio normali rispetto al piano  $xy$ . Formula di riduzione per fili per il calcolo degli integrali tripli: enunciato, interpretazione geometrica ed esempi.

Formula di riduzione per strati per il calcolo degli integrali tripli: enunciato, interpretazione geometrica ed esempi.

Formula del cambiamento di variabili per il calcolo dell'integrale triplo: enunciato ed esempi. Calcolo dell'integrale triplo passando a coordinate cilindriche e a coordinate sferiche. Calcolo del volume di un corpo nello spazio mediante il calcolo dell'integrale triplo.

### Integrali curvilinei e campi vettoriali

Integrale curvilineo di funzioni di più variabili: definizione ed esempi. Interpretazione geometrica per funzioni di 2 variabili, interpretazione come *massa totale di un filo* per funzioni di 3 variabili.

Campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^2$ : definizione ed esempi. Divergenza e rotore di un campo vettoriale.

Integrale curvilineo di un campo vettoriale: definizione, esempi e significato fisico di *lavoro*. Teorema della forze vive.

Campi conservativi: definizione ed esempi. Determinazione del potenziale di un campo conservativo: esempi. Calcolo dell'integrale curvilineo per campi conservativi.

Teorema di conservazione dell'energia totale per campi di forze conservativi.

Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi (senza dim.)

Campi irrotazionali: definizione ed esempi. Irrotazionalità dei campi conservativi. Esistenza di campi irrotazionali e non conservativi. Domini semplicemente connessi in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ : definizione ed esempi.

Formule di Gauss-Green (in domini regolari normali e in loro unioni finite). Applicazione al calcolo dell'area di un dominio piano regolare.

I campi irrotazionali in domini semplicemente connessi sono conservativi (dimostrazione solo nel caso di campi piani).

### Superfici e integrali superficiali

Superfici regolari parametriche: definizione, esempi. Vettore normale e piano tangente a una superficie regolare parametrica. Vettori tangenti alle linee coordinate e loro legame con il piano tangente. Casi particolari: superfici cartesiane, superfici di rotazione.

Area di una superficie regolare parametrica: enunciato, motivazione geometrica, esempi. Area di superfici cartesiane. Area di superfici di rotazione e teorema di Guldino.

Integrali superficiali di funzioni: definizione, interpretazione come *massa totale di una lamina*, esempi.

Superfici orientabili. Superfici orientate e orientazione di una superficie regolare parametrica orientabile indotta dalla parametrizzazione. Nastro di Möbius.

Integrale superficiale di un campo vettoriale: definizione, esempi, significato fisico di *flusso*. Superfici regolari parametriche “a pezzi” e orientate e additività degli integrali superficiali.

Teorema della divergenza: enunciato ed esempi. Campi solenoidali: definizione, esempi. Flusso di un campo solenoidale in un dominio regolare e in un'intercapedine.

Superfici regolari parametriche orientate con bordo. Teorema del rotore: enunciato ed esempi.

## Successioni e serie di funzioni

Successioni di funzioni: definizione, esempi. Convergenza puntuale. Convergenza uniforme. Teorema di continuità del limite uniforme. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (senza dim.)

Serie di funzioni: definizione, esempi, convergenza puntuale, convergenza uniforme. Convergenza totale e criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme. Teoremi di continuità della somma, di integrazione e di derivazione per serie.

Serie di potenze: definizione ed esempi. Teorema di esistenza del raggio di convergenza (senza dimostrazione) e tipi di convergenza nell'intervallo di convergenza (senza dimostrazione). Criteri per il calcolo del raggio di convergenza (senza dimostrazione). Raggio di convergenza delle serie delle derivate. La somma di una serie di potenze è una funzione  $C^\infty$  e le sue derivate sono le funzioni somma delle serie delle derivate. Serie di Taylor: definizione ed esempi. La serie di potenze è la serie di Taylor della sua somma. Funzioni analitiche: definizione. Le funzioni analitiche sono  $C^\infty$  ma non è vero il viceversa (controesempi). Condizione sufficiente per l'analiticità.

Funzioni periodiche: definizione ed esempi. Polinomi trigonometrici di grado  $n$ . Serie di Fourier associata a una funzione periodica: definizione ed esempi. Criterio di convergenza per serie di Fourier (senza dimostrazione).