

Programma del corso “Geometria 1” (9 CFU)
Sapienza-Università di Roma
Ingegneria Civile, Ambiente e Territorio
a.a. 2020/2021
Docente: Prof. Giovanni Cerulli Irelli
Co-docente: Dr. Marco Trevisiol



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programma di massima

1 Spazi vettoriali:

- 1.1 Gruppi, campi, numeri complessi, teorema fondamentale dell'algebra, [divisione tra polinomi -Precorsi].
- 1.2 Definizione di spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} ; Esempi (funzioni a valori in uno spazio vettoriale, \mathbb{K}^n , vettori geometrici del piano e dello spazio, polinomi, polinomi di grado minore o uguale ad n).
- 1.3 Combinazioni lineari.
- 1.4 Sottospazi vettoriali, generatori, Span, Lemma di scambio.
- 1.5 Dipendenza ed indipendenza lineare.
- 1.6 Basi e dimensione, coordinate.
- 1.7 Intersezione e somma di sottospazi vettoriali; formula di Grassmann; somma diretta di sottospazi vettoriali.

2 Applicazioni lineari:

- 2.1 Definizione ed esempi.
- 2.2 Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare; teorema della dimensione; rango.
- 2.3 Applicazioni lineari e basi; funzione "coordinate in una base data".
- 2.4 Matrice associata ad un'applicazione lineare in due basi date; spazio delle colonne di una matrice.
- 2.5 Moltiplicazione righe per colonne di matrici.
- 2.6 Cambiamenti di base. Applicazioni lineari simili e teorema di classificazione.
- 2.7 Algoritmo di eliminazione di Gauss; matrici a scala e a scala ridotta.
- 2.8 Inverse destre e sinistre; inversa di una matrice quadrata; algoritmo di inversione.
- 2.9 Matrici elementari.
- 2.10 Spazio delle righe di una matrice. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi vettoriali.

3 Determinante

- 3.1 Esistenza ed unicità del determinante.
- 3.2 Sviluppi di Laplace.
- 3.3 Teorema di Binet.
- 3.4 Determinante 2×2 come area orientata.
- 3.5 Determinante di Vandermonde.
- 3.6 Matrice aggiunta e formula di Cramer.

3.7 Teorema di Cayley-Hamilton.

3.8 Tecniche di calcolo per l'inversa (algoritmo di inversione, formula di Cramer, teorema di Cayley-Hamilton).

4 Geometria affine del piano e dello spazio

4.1 Sottospazi affini. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini.

4.2 Sottospazi affini di \mathbb{R}^2 e loro posizione reciproca. Fasci di rette.

4.3 Sottospazi affini di \mathbb{R}^3 e loro posizione reciproca. Fasci di rette e piani.

5 Sistemi di equazioni lineari:

5.1 Matrici associate ad un sistema lineare, Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare.

5.2 Teorema di Rouchè-Capelli.

5.3 Teorema degli orlati.

5.4 Formula di Cramer per la soluzione di un sistema lineare non-singolare.

5.5 Decomposizione LU e suo utilizzo per la risoluzione di opportuni sistemi lineari.

5.6 Sistemi lineari associati a circuiti elettrici e a reti di flusso.

6 Spazi Euclidei

6.1 Forme bilineari, matrice associata ad una forma bilineare in una base, cambiamento di base e matrici associate a forme bilineari, matrici congruenti.

6.2 Forme bilineari simmetriche: Ortogonale di un sottospazio, teorema di decomposizione ortogonale, basi ortogonali, esistenza di una base ortogonale (rispetto ad una forma bilineare simmetrica)

6.3 Forme bilineari reali: teorema di Sylvester, segnatura di una forma bilineare, basi di Sylvester, due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

6.4 Prodotti scalari (reali), esempi: prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n , prodotto scalare L^2 , prodotto di Lagrange nei polinomi.

6.5 Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale; Algoritmo di Gram-Schmidt.

6.6 Insiemi/basi ortogonali, coefficienti di Fourier.

6.7 Distanza tra sottospazi affini.

6.8 Norma, distanza tra punti.

6.9 Angoli, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, Disuguaglianza triangolare, teorema di Pitagora.

6.10 Decomposizione QR. (Facoltativo)

6.11 Soluzioni approssimate di un sistema non risolubile di equazioni lineari; equazioni normali di un sistema di equazioni lineari; tecniche di calcolo delle soluzioni approssimate; polinomio approssimante di dati statistici.

7 Geometria euclidea del piano e dello spazio

- 7.1 Versori normali e direttori di una retta del piano e dello spazio; coseni direttori.
- 7.2 Distanza punto-retta nel piano. Bisettrici di un angolo. Asse di un segmento.
- 7.3 Circonferenze del piano; equazioni parametriche delle circonferenze; retta tangente ad un punto di una circonferenza.
- 7.4 Isometrie del piano.
- 7.5 Distanza punto-retta, punto-piano, retta-retta nello spazio.

8 Autovalori ed autovettori:

- 8.1 Definizione ed interpretazione geometrica.
- 8.2 Autospazi; molteplicità geometrica di un autovalore.
- 8.3 Endomorfismi diagonalizzabili.
- 8.4 Teorema spettrale reale.
- 8.5 Il gruppo $SO(3)$. (Facoltativo)
- 8.6 Esponenziale di una matrice. (Facoltativo)
- 8.7 Forme quadratiche definite positive.
- 8.8 Classificazione affine delle coniche.
- 8.9 Proprietà focali delle coniche non-degeneri. (Facoltativo)

9 MATLAB:

- 9.1 Il corso da 2 ore Matlab-Onramp è richiesto all'esame orale.
- 9.2 Matrici simboliche.
- 9.3 Calcolo di una base del nucleo e dell'immagine di una matrice.
- 9.4 Calcolo della forma a scala ridotta di una matrice.
- 9.5 Risoluzione di sistemi lineari, anche con parametro.
- 9.6 Grafici in 2d.
- 9.7 Calcolo del polinomio caratteristico e degli autovalori di una matrice.
- 9.8 Decomposizione QR. (Facoltativo)